Заметим что метод, примененный здесь, пригоден для исследования воздействия случайного шума на более общие как одномерные, так и многомерные системы, содержащие малый параметр ε, которые при $\varepsilon = 0$ становятся консервативными.

Поступила 25 I 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Д у б Дж. Вероятностные процессы. ИЛ, 1959.
2. Х а с ь м и н с к и й Р. З. Об одной оценке решения параболического уравнения и некоторых ее применениях. Докл. АН СССР, 1962, т. 143, в. 5, стр. 1060—1063.
3. Х а с ь м и н с к и й Р. З. О методе усреднения для параболических и эллиптических дифференциальных уравнений и случайных процессов диффузионного типа. Теория вероятн. и ее примен., 1963, т. 8, вып. 1, стр. 3—25.
4. Я г л о м А. М. О статистической обратимости брауновского движения. Матем. сб., 1949, т. 24 (66), вып. 3, стр. 457—492.
5. M a r u y a m a G., T a n a k a T. Ergodic property of N-dimensional recurrent Markov processes. Mem. Fac. Sci., Kyushu Univ., 1959, vol. A-XIII, 2, p. 157—172.
6. А н д р о н о в А. А., В и т т А. А., Х а й к и н С. Э. Теория колебаний. Физматгиз, 1959.
7. Б е р ш т е й н И. Л. Флуктуации в автоколебательной системе и определение естественной размытости частоты лампового генератора. Ж. техн. физ., 1941, т. 11, вып. 4, стр. 305—316.
8. Б е р ш т е й н И. Л. Флуктуации амплитуды и фазы лампового генератора. Изв. АН СССР, сер. физ., 1950, т. 14, № 2, стр. 145—173.
9. Р ы т о в С. М. Флуктуации в автоколебательных системах томсоновского типа. I, II. Ж. экспр. и теор. физ., 1955, т. 29, вып. 3, стр. 304—314, 315—328.

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ПРОЦЕССАМИ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ОБЪЕКТАХ

А. И. Егоров (Фрунзе)

Ряд практических задач приводит к необходимости изучать управляемые процессы в системах с распределенными параметрами. А. Г. Бутковский и А. Я. Лернер [1] сформулировали в наиболее общей форме задачу об оптимальном управлении процессами в таких системах и показали, что в некоторых случаях эта задача может быть решена при помощи принципа максимума Л. С. Понтрягина [2]. Позже А. Г. Бутковский [3] и [4] нашел условия оптимальности для случая, когда управляемый процесс описывается нелинейным интегральным уравнением

$$Q(P) = \int_D K(P, S, Q(S), u(S))\, dS$$

где $Q(P)$ — вектор-функция, характеризующая состояние управляемой системы, m — вектор-функция, вообще говоря, нелинейная относительно Q и u, $u(S)$ — допустимое управление, а D — область m-мерного эвклидова пространства.

В предлагаемой заметке дана постановка одного типа задач оптимального управления процессами, которые описываются системами квазилинейных уравнений с частными производными. Методом Л. И. Розоноэра [5] получены необходимые условия оптимальности. Указаны также достаточные в локальном смысле условия оптимальности, когда процесс описывается системой линейных уравнений.

Пусть управляемый процесс описывается уравнениями

$$L_i[u_i] \equiv \frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial t} + b_i(x, t)\frac{\partial u_i}{\partial x} + c_i(x, t)\frac{\partial u_i}{\partial t} = f_i(x, t, u_1, \ldots, u_n, v) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

где функции b_i и c_i имеют непрерывные производные по x и t второго порядка в области G $(0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$, v — управляющий параметр, принимающий значения из выпуклой области V (открытой или замкнутой) некоторого r-мерного эвклидова пространства. Функции f_i предполагаются непрерывными по x и t и дважды непрерывно дифференцируемыми по $u_1, \ldots, u_n$ и v.

Будем предполагать, что функции u_i удовлетворяют дополнительным условиям (условиям Гурса)

$$u_i(x, 0) = \varphi_i(x), \qquad u_i(0, t) = \psi_i(t) \tag{2}$$

где функции φ_i и ψ_i непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условиям сопряжения $\varphi_i(0) = \psi_i(0)$.

За класс допустимых управлений возьмем множество кусочно-непрерывных по x и t и ограниченных функций, определенных в области G со значениями в V.

Если управление $v(x, t)$ терпит разрыв вдоль линии, параллельной одной из осей координат, например вдоль линии $t = a$

$$v(x, t) = \begin{cases} v_1(x, t) & \text{при } 0 \leqslant t < a, \ 0 \leqslant x \leqslant l \\ v_2(x, t) & \text{при } a < t \leqslant T, \ 0 \leqslant x \leqslant l \end{cases}$$

где $v_i(x, t)$ — непрерывные функции, то соответствующее ему решение задачи (1)—(2) в области G можно построить последовательно. Сначала решается задача

$$L_i[u_i] = f(x, t, u_1, \ldots, u_n, v_1(x, t)), \qquad u_i(x, 0) = \varphi_i(x), \qquad u_i(0, t) = \psi_i(t)$$
$$(0 \leqslant t \leqslant a, \ 0 \leqslant x \leqslant l)$$

Она имеет единственное дважды непрерывно дифференцируемое по x и t решение $u_i = u_i^1(x, t)$ [6], стр. 63—67. Аналогично находим решение $u_i = u_i^2(x, t)$ задачи

$$L_i[u_i] = f(x, t, u_1, \ldots, u_n, v_2(x, t)), \qquad u_i(x, a) = u_i^1(x, a), \qquad u_i(0, t) = \psi_i(t)$$
$$(a \leqslant t \leqslant T, \ 0 \leqslant x \leqslant l)$$

Следовательно, разрывному управлению соответствует непрерывное решение

$$u(x, t) = \begin{cases} u^1(x, t) & \text{при } 0 \leqslant t < a \\ u^2(x, t) & \text{при } a \leqslant t \leqslant T \end{cases}$$

Однако на линии разрыва $t = a$ функции $u_i(x, t)$ не имеют непрерывных производных. Если функция $v(x, t)$ регулярна ([7], стр. 19), то ей соответствует единственное решение $u(x, t) = \{u_1, \ldots, u_n\}$ — такое, что функции $u(x, t)$ имеют непрерывные производные первого порядка по x и t и интегрируемые производные второго порядка. В классе непрерывных функций решение задачи (1) — (2) в этом случае не единственное (см. пример 2).

Поэтому всегда можно считать, что каждому допустимому управлению $v(x, t)$ соответствует единственное решение $u(x, t)$, которое имеет непрерывные производные по x и t, если $v(x, t)$ регулярно, и непрерывно, если $v(x, t)$ не регулярно.

Пусть A_i $(i = 1, \ldots, n)$ — заданная система вещественных чисел; $\alpha_i(x)$, $\beta_i(t)$ и $\gamma_i(x, t)$ — заданные в области G непрерывные функции. Возьмем допустимое управление $v(x, t)$, обозначим через $u(x, t)$ решение задачи (1) — (2), соответствующее этому управлению, и рассмотрим функционал

$$S = \sum_{i=1}^{n} \Big[A_i u_i(l, T) + \int_0^l \alpha_i(x)\, u_i(x, T)\, dx + \int_0^T \beta_i(t)\, u_i(l, t)\, dt + \int_0^l \int_0^T \gamma_i(x, t)\, u_i(x, t)\, dt\, dx\Big]$$

где l и T — постоянные, входящие в определение области G.

Среди всех допустимых управлений требуется определить такое управление $v(x, t)$, чтобы функционал S достигал своего наименьшего (наибольшего) значения.

Допустимое управление, реализующее минимум (максимум) этого функционала, будем называть min-оптимальным (max-оптимальным) по S.

Кстати отметим, что краевая задача рассматриваемого вида представляет большой интерес с точки зрения физических приложений. Она встречается при изучении процессов сорбции и десорбции газов [8], процессов сушки [9] и др. Наличие параметра v в уравнениях (1) дает возможность управлять процессом и во многих случаях выбирать наилучший режим, что (с математической точки зрения) сводится к минимизации или максимизации некоторого функционала. В ряде случаев задача может быть сведена к рассмотрению функционала S.

Пусть, например, управляемый процесс описывается уравнениями (1) с условиями (2) и требуется минимизировать функционал

$$J = \int_0^l \int_0^T f_0(x, t, u, v)\, dx\, dt$$

Вводим вспомогательную переменную u_0 при помощи уравнения

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\, \partial t} = f_0(x, t, u, v) \tag{3}$$

и дополнительных условий

$$u(0, t) = u(x, 0) = 0 \tag{4}$$

Тогда задача сводится к минимизации функционала $S = u_0(l, T)$, определенного на функциях $u_0, \ldots, u_n$, заданных уравнениями (1), (3) и дополнительными условиями (2) и (4). Для решения введем вспомогательные функции $w_i(x, t)$ уравнениями

$$M_i[w_i] \equiv \frac{\partial^2 w_i}{\partial x\, \partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(b_i w_i) - \frac{\partial}{\partial t}(c_i w_i) = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f_\nu(x, t, u, v)}{\partial u_i} w_\nu - \gamma_i(x, t) \tag{5}$$

с дополнительными условиями

$$w_i(x, T) = \int_l^x \alpha_i(\xi) \exp\left(\int_\xi^x c_i(\xi, T)\, d\xi\right) d\xi - A_i \exp\left(\int_l^x c_i(\xi, T)\, d\xi\right)$$

$$w_i(l, t) = \int_T^t \beta_i(\tau) \exp\left(\int_\tau^t b_i(l, \tau)\, d\tau\right) d\tau - A_i \exp\left(\int_T^t b_i(l, \tau)\, d\tau\right), \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{6}$$

где постоянные A_i и функции $\alpha_i(x)$, $\beta_i(t)$ и $\gamma_i(x, t)$ взяты из функционала S. Система уравнений (5) линейная, линейны также условия (6). Поэтому каждому допустимому управлению соответствует единственная вектор-функция $w(x, t) = \{w_1, \ldots, w_n\}$, определенная в области G, удовлетворяющая системе уравнений (5) и дополнительным условиям (6). Положим

$$H(u(x, t), w(x, t), v, x, t) = \sum_{i=1}^n w_i(x, t) f_i(x, t, u(x, t), v)$$

Будем говорить, что управление $v(x, t)$ удовлетворяет условию максимума, если $H(u(x, t), w(x, t), v(x, t), x, t)$ $((=))$ $\sup H(u(x, t), w(x, t), v, x, t) (v \in V)$ (H), где символ $((=))$ означает равенство, справедливое во всех точках области G, кроме, быть может, множества точек, лежащих на конечном числе линий с нулевой площадью.

Условие минимума определяется аналогично.

Теорема 1 (принцип максимума). Для того чтобы допустимое управление $v(x, t)$ было min-оптимальным (max-оптимальным) по S, необходимо, чтобы оно удовлетворяло условию максимума (минимума).

Для доказательства рассмотрим функционал

$$J[u, w, v] = \iint_G \left[\sum_{i=1}^n w_i L_i[u_i] - H(u, w, v, x, t)\right] dx\, dt$$

Если $u = u(x, t)$ — решение задачи (1) — (2), соответствующее управлению v, то функционал равен нулю при произвольной функции $w = w(x, t)$.

Пусть допустимое управление $v(x, t)$ и соответствующее ему решение $u(x, t)$ min-оптимальны по S. Обозначим через $w(x, t)$ решение задачи (5) — (6), соответствующее функциям $v(x, t)$ и $u(x, t)$.

Через $u(x, t) + \Delta u(x, t)$ и $w(x, t) + \Delta w(x, t)$ обозначим решения тех же задач, но соответствующие допустимому управлению $v(x, t) + \Delta v$, где $\Delta v(x, t)$ — некоторое приращение управления $v(x, t)$. Очевидно, что приращения Δu_i и Δw_i удовлетворяют уравнениям

$$L_i[\Delta u_i] = \Delta \frac{\partial H}{\partial w_i}, \qquad M_i[\Delta w_i] = \Delta \frac{\partial H}{\partial u_i} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{7}$$

и краевым условиям

$$\Delta u_i(x, 0) = \Delta u_i(0, t) = \Delta w_i(x, T) = \Delta w_i(l, t) = 0 \tag{8}$$

где

$$\Delta \frac{\partial H}{\partial z_i} = \frac{\partial H(z + \Delta z, v + \Delta v, x, t)}{\partial z_i} - \frac{\partial H(z, v, x, t)}{\partial z_i}, \quad z = \{u_1, \ldots, w_n\} \tag{9}$$

Обозначим через ΔJ приращение функционала J. Тогда, учитывая линейность операторов L_i, получим

$$\Delta J = J[z + \Delta z, v + \Delta v] - J[z, v] = \iint\limits_G \sum_{i=1}^n [\Delta w_i L_i[u_i] + \Delta w_i L_i[\Delta u_i] +$$

$$+ w_i L_i[\Delta u_i]]\, dxdt - \iint\limits_G [H(z + \Delta z, v + \Delta v, x, t) - H(z, v, x, t)]\, dx\, dt = 0 \tag{10}$$

Известно ([10], стр. 196), что для любых функций $p(x, t)$ и $q(x, t)$, дважды кусочно непрерывно дифференцируемых по x и t, в области G справедливо равенство (формула Грина)

$$\iint\limits_G [pL_i[q] - qM_i[p]]\, dx\, dt = \int\limits_\sigma P_{1i}(x, t)\, dt - P_{2i}(x, t)\, dx$$

где σ — контур, ограничивающий область G, а

$$P_{1i}(x, t) = \frac{1}{2}\left[p\frac{\partial q}{\partial t} - q\frac{\partial p}{\partial t}\right] + b_i pq, \quad P_{2i}(x, t) = \frac{1}{2}\left[p\frac{\partial q}{\partial x} - q\frac{\partial p}{\partial x}\right] + c_i qp$$

Учитывая, что область G есть прямоугольник, получаем

$$\iint\limits_G pL_i[q]\, dxdt = \int\limits_0^T [P_{1i}(l, t) - P_{1i}(0, t)]\, dt +$$

$$+ \int\limits_0^l [P_{2i}(x, T) - P_{2i}(x, 0)]\, dx + \iint\limits_G qM_i[p]\, dx\, dt$$

Интегрируя по частям одномерные интегралы в правой части этого равенства, будем иметь

$$\iint\limits_G pL_i[q]\, dxdt = [p(l, t)\, q(l, t)]_{t=0}^T - [p(0,t)\, q(0,t)]_{t=0}^T -$$

$$- \int\limits_0^l \left\{q(x, t)\left[\frac{\partial p}{\partial x} - c_i p\right]\right\}_{t=0}^T dx - \int\limits_0^T \left\{q(x, t)\left[\frac{\partial p}{\partial t} - b_i p\right]\right\}_{x=0}^l dt + \iint\limits_G qM_i[p]\, dxdt \tag{11}$$

Положим в последнем равенстве $q = \Delta u_i$, $p = \Delta w_i$. Тогда в силу уравнений (5) и условий (6) и (8) следует, что

$$\iint\limits_G \sum_{i=1}^n w_i L_i[\Delta u_i]\, dxdt = - \sum_{i=1}^n \Bigg[A_i \Delta u_i(l, T) + \int\limits_0^l \alpha_i(x)\, \Delta u_i(x, T)\, dx +$$

$$+ \int\limits_0^T \beta_i(t)\, \Delta u_i(l, t)\, dt + \iint\limits_G \gamma_i(x, t)\, \Delta u_i(x, t)\, dxdt\Bigg] + \iint\limits_G \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial u_i} \Delta u_i(x, t)\, dx\, dt$$

или

$$\iint\limits_G \sum_{i=1}^n w_i L_i[\Delta u_i]\, dxdt = - \Delta S + \iint\limits_G \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial u_i} \Delta u_i(x, t)\, dx\, dt \tag{12}$$

где ΔS — приращение функционала S, полученное в результате перехода от управления $v(x, t)$ к управлению $v + \Delta v$. Далее имеем

$$\iint\limits_G \sum_{i=1}^n \Delta w_i L_i [u_i]\, dx\, dt = \iint\limits_G \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial w_i} \Delta w_i\, dx\, dt \tag{13}$$

В равенстве (11) положим $q = \Delta u_i$, $p = \Delta w_i$. Тогда в силу уравнений (7) и краевых условий (8) следует, что

$$\iint\limits_G \sum_{i=1}^n \Delta w_i L_i [\Delta u_i]\, dx\, dt = \iint\limits_G \sum_{i=1}^n \Delta \frac{\partial H}{\partial u_i} \Delta u_i dx\, dt$$

С другой стороны, справедливо равенство

$$\iint\limits_G \sum_{i=1}^n \Delta w_i L_i [\Delta u_i]\, dx\, dt = \iint\limits_G \sum_{i=1}^n \Delta \frac{\partial H}{\partial w_i} \Delta w_i\, dx\, dt$$

Из двух последних соотношений получаем, что

$$\iint\limits_G \sum_{i=1}^n \Delta w_i L_i [\Delta u_i]\, dx\, dt = \frac{1}{2} \iint\limits_G \sum_{i=1}^{2n} \Delta \frac{\partial H}{\partial z_i} \Delta z_i\, dx\, dt \tag{14}$$

где через z обозначен $2n$-мерный вектор с компонентами $u_1, \ldots, u_n, w_1, \ldots, w_n$, а $\Delta \partial H / \partial z_i$ определяется по формуле (9). К функции H применим формулу Тейлора, ограничиваясь в разложении членами второго порядка относительно приращений

$$H(z + \Delta z, v + \Delta v, x, t) - H(z, v, x, t) = H(z, v + \Delta v, x, t) - H(z, v, x, t) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial H(z, v + \Delta v, x, t)}{\partial z_i} \Delta z_i + \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^{2n} \frac{\partial^2 H(z + \theta \Delta z, v + \Delta v, x, t)}{\partial z_i \partial z_j} \Delta z_i \Delta z_j \tag{15}$$

где $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Из равенства (10) в силу соотношений (12) — (15) следует, что

$$\Delta J = -\Delta S + \iint\limits_G \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial H(z, v, x, t)}{\partial z_i} \Delta z_i\, dx\, dt +$$
$$+ \frac{1}{2} \iint\limits_G \sum_{i=1}^{2n} \Delta \frac{\partial H(z, v, x, t)}{\partial z_i} \Delta z_i\, dx dt - \iint\limits_G \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial H(z, v + \Delta v, x, t)}{\partial z_i} \Delta z_i\, dx\, dt -$$
$$- \frac{1}{2} \iint\limits_G \sum_{i, j=1}^{2n} \frac{\partial^2 H(z + \theta \Delta z, v + \Delta v, x, t)}{\partial z_i \partial z_j} \Delta z_i \Delta z_j\, dx\, dt -$$
$$- \iint\limits_G H(z, v + \Delta v, x, t) - H(z, v, x, t)]\, dx dt = 0$$

Приводя подобные и применяя формулу Тейлора к функции $\partial H / \partial z_i$, получим

$$\Delta S = - \iint\limits_G [H(z; v + \Delta v, x, t) - H(z, v, x, t)]\, dx dt + \eta \qquad (\eta = \eta_1 + \eta_2) \tag{16}$$

$$\eta_1 = \frac{1}{2} \iint\limits_G \sum_{i=1}^{2n} \left[\frac{\partial H(z, v + \Delta v, x, t)}{\partial z_i} - \frac{\partial H(z, v, x, t)}{\partial z_i} \right] \Delta z_i\, dx\, dt$$

$$\eta_2 = \frac{1}{2} \iint\limits_G \sum_{i, j=1}^{2n} \left[\frac{\partial^2 H(z + \theta \Delta z, v + \Delta v, x, t)}{\partial z_i \partial z_j} - \right. \qquad (0 \leqslant \theta_1 \leqslant 1)$$
$$\left. - \frac{\partial^2 H(z + \theta_1 \Delta z, v + \Delta v, x, t)}{\partial z_i \partial z_j} \right] \Delta z_i \Delta z_j\, dx\, dt$$

Формула (16) определяет приращение функционала S при переходе от управления $v(x, t)$ к управлению $v + \Delta v$. Для получения оценок остаточного члена η рассмотрим первые n уравнений из (7) и введем вспомогательные переменные ω_i, положив

$$\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x} + c_i \Delta u_i = \omega_i$$

Тогда эти уравнения можно представить в виде

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + b_i \omega_i = r_i \Delta u_i + \Delta \frac{\partial H}{\partial w_i} \qquad \left(r_i = b_i c_i + \frac{\partial c_i}{\partial t}\right)$$

В силу условий (8) отсюда следует, что

$$\Delta u_i(x, t) = \int_0^x \omega_i(\xi, t) \exp\left(\int_x^\xi c_i(\xi, t)\, d\xi\right) d\xi \tag{17}$$

$$\omega_i(x, t) = \int_0^t \left[r_i(x, \tau)\, \Delta u_i(x, \tau) + \Delta \frac{\partial H}{\partial w_i}\right] \exp\left(\int_t^\tau b_i(x, \tau)\, d\tau\right) d\tau \tag{18}$$

Поскольку в области G функции b_i и r_i ограничены, а функции $\partial H/\partial w_i$ удовлетворяют условию Липшица относительно аргументов u_k и v_j, то из (18) получим

$$|\omega_i(x, t)| \leqslant \int_0^t \left[N_1 \sum_{j=1}^n |\Delta u_j(x, \tau)| + N_2 \sum_{k=1}^r |\Delta v_k(x, \tau)|\right] d\tau \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

где N_1 и N_2 — определенные положительные постоянные. Используя эту оценку, из равенства (17) находим

$$|\Delta u_i(x, t)| \leqslant P \int_0^l \int_0^t \left[N_1 \sum_{j=1}^n |\Delta u_i(x, \tau)| + N_2 \sum_{k=1}^r |\Delta v_k(x, \tau)|\right] d\tau\, dx \tag{19}$$

где P — определенная положительная постоянная. Интегрируя это неравенство по x в пределах от 0 до l и суммируя по всем i, получим

$$U(t) \leqslant A + B \int_0^t U(\tau)\, d\tau \qquad (B = nlPN_1)$$

$$U(t) = \sum_{i=1}^n \int_0^l |\Delta u_i(x, t)|\, dt, \quad A = nlN_2 \iint_G \sum_{k=1}^r |\Delta v_k(x, t)|\, dx\, dt$$

Применим лемму 1 из [11], стр. 19, согласно которой функция $U(t)$ будет удовлетворять неравенству

$$U(t) \leqslant A e^{Bt}$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{j=1} \int_0^l |\Delta u_j(x, t)|\, dx dt \leqslant nlPN_2 e^{BT} \iint_G \sum_{k=1}^r |\Delta v_k(x, t)|\, dx\, dt$$

Поэтому из неравенства (19) получаем

$$|\Delta u_i(x, t)| \leqslant R_1 \iint_G \sum_{k=1}^r |\Delta v_k(x, t)|\, dx\, dt$$

где R_1 — определенная положительная постоянная.

Аналогичную оценку можно получить для $|\Delta w_i(x, t)|$. Следовательно

$$|\Delta z_i(x, t)| \leqslant R \iint_G \sum_{k=1}^r |\Delta v_k(x, t)|\, dx\, dt \qquad (i = 1, \ldots, 2n) \tag{20}$$

где R — положительное число, причем $R_1 \leqslant R$.

Формула (16) приращения функционала S вместе с неравенствами (20) аналогичны соответствующим соотношениям в работе [5]. Поэтому почти дословным повторением доказательства теоремы 1 из этой работы легко устанавливается справедливость сформулированного принципа максимума.

Доказанная теорема, хотя и не дает достаточных условий существования оптимальных управлений, но позволяет из всех решений краевой задачи (1) — (2) выделить отдельные изолированные решения, удовлетворяющие условию максимума. В самом деле, решение поставленной задачи согласно принципу максимума приводит к необходимости определить $2n+1$ неизвестных u_i, w_i и v из $2n+1$ уравнений (1), (3) и (H). Следовательно, имеем «полную» систему соотношений для определения u_i, w_i и v. Первые $2n$ соотношений являются дифференциальными уравнениями второго порядка. Поэтому при их решении появятся произвольные функции, которые можно исключить при помощи дополнительных условий (2) и (6). Тем самым определится множество изолированных решений краевой задачи (1) — (2), удовлетворяющих условиям принципа максимума. Если таких решений оказывается конечное число, а из физических соображений, приведших к постановке задачи, ясно, что оптимальные управления существуют, то следует ожидать, что некоторые из этих решений будут оптимальными.

В случае, когда система уравнений (1) является линейной

$$L_i[u_i] = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x, t)\, u_k + \varphi_i(v) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{21}$$

справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Для того чтобы управление $v(x, t)$ в системе уравнений (21) было min-оптимальным (max-оптимальным) по S в локальном смысле, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло условию максимума (минимума).

Доказательство этой теоремы почти дословно совпадает с доказательством соответствующей теоремы в работе [5].

Пример 1. Пусть управляемый процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = -2u + v, \qquad 0 < x \leqslant 2, \qquad 0 < t \leqslant T \tag{22}$$

где v — управляющий параметр, причем $|v| \leqslant 1$. Требуется найти управление $v(x, t)$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant t \leqslant T$, чтобы соответствующее ему решение уравнения (22), удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = u(0, t) = 0 \tag{23}$$

реализовало бы минимум функционала

$$S = \int_0\!\!\int_0 (x - 1)\, u(x, t)\, dx\, dt$$

Функцию $w(x, t)$ определяем при помощи уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t} - 2\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial t} = -2w - (x - 1)$$

и дополнительных условий $w(x, T) = w(2, t) = 0$. Она имеет вид

$$w(x, t) = \frac{1}{2}(2e^{x-2} - x)(1 - e^{2(t-T)})$$

Составляем функцию

$$H = w(-2u + v)$$

Согласно условию максимума, оптимальное управление определится по формуле

$$v(x, t) = \operatorname{sign} \frac{1}{2}(2e^{x-2} - x)(1 - e^{2(t-T)}) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$$

или

$$v(x, t) = \operatorname{sign}(2e^{x-2} - x)$$

Здесь выражение в скобках равно нулю только в одной точке y интервала $(0, 2)$, причем $y < 1$ и $2e^{x-2} - x > 0$ при $x < y$ и $2e^{x-2} - x < 0$ при $x > y$. Поэтому

$$v(x, t) = \begin{cases} 1 & (0 \leqslant x < y, \quad 0 \leqslant t \leqslant T) \\ -1 & (y < x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant t \leqslant T) \end{cases} \tag{24}$$

и, следовательно, решение задачи (22) при $v = v(x, t)$ имеет вид

$$u(x, t) = \begin{cases} {}^1/_2 (1 - e^{-x})(1 - e^{-2t}) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant y, \ 0 \leqslant t \leqslant T \\ {}^1/_2 (1 - e^{-2t})(2e^{-(x-y)} - e^{-x} - 1) & \text{при } y \leqslant x \leqslant 2, \ 0 \leqslant t \leqslant T \end{cases}$$

На этом решении

$$S = {}^1/_4 \, [2T + e^{-2T} - 1] \, [y^2 - 4e^{y-2} + 2e^{-2}] \tag{25}$$

или, если учесть, что

$$y = 2e^{y-2} \tag{26}$$

то получаем

$$S = {}^1/_4 \, [2T + e^{-2T} - 1] \, [y^2 - 2y + 2e^{-2}]$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что если в формуле (25) величину S рассматривать как функцию переменной y, изменяющейся на отрезке $[0, 2]$, то S достигает своего минимума в точке y, в которой выполнено равенство (26). Это значит, что среди управлений вида (24) наименьшее значение функционалу дает управление $v(x, t)$, для которого в точке y выполнено условие (26). Если же воспользоваться теоремой 2, то получим, что это управление является min-оптимальным.

Пример 2. Пусть управляемый процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial t} = v, \qquad |v| \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1 \tag{27}$$

с дополнительными условиями

$$u(x, 0) = u(0, t) = 0 \tag{28}$$

Требуется определить допустимое управление, реализующее минимум функционала

$$S = \int_0^1 u(x, 1)\, dx - \int_0^1 u(1, t)\, dt$$

и найти минимальное значение S.

Для определения функции $w(x, t)$ имеем уравнение $\partial^2 w / \partial x \partial t = 0$ с дополнительными условиями $w(x, 1) = x - 1$, $w(1, t) = 1 - t$.

Следовательно, $w(x, t) = x - t$, а из условия максимума находим, что

$$v(x, t) = -1 \ (t > x), \qquad v(x, t) = 1 \ (t < x)$$

Таким образом, для определения функции $u(x, t)$ получаем два уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial t} = 1 \quad (t - x < 0), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial t} = -1 \quad (t - x > 0) \tag{29}$$

с дополнительными условиями (28). Отсюда находим, что

$$u(x, t) = \begin{cases} -xt + \varphi(x) & (0 \leqslant x \leqslant t \leqslant 1) \\ xt - 2t^2 + \varphi(t) & (0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1) \end{cases}$$

где $\varphi(x)$ — произвольная дифференцируемая функция, причем $\varphi(0) = 0$. Соответствующее значение функционала S равно $-{}^1/_3$.

Таким образом, в рассмотренном примере оптимальному управлению соответствует решение $u(x, t)$, зависящее от произвольной функции φ, а величина функционала S не зависит от φ. Поэтому, не изменяя значения S на $u(x, t)$, можно наложить дополнительное условие. Например, можно потребовать, чтобы на линии переключения $x = t$ функция $u(x, t)$ имела непрерывные производные $\partial u/\partial x$ и $\partial u/\partial t$.

Тогда

$$u(x, t) = \begin{cases} x(x - t) & (0 \leqslant x \leqslant t \leqslant 1) \\ t(x - t) & (0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1) \end{cases}$$

В рассмотренном примере функционал S не зависит от произвольной функции φ, входящей в решение $u(x, t)$, которое соответствует регулярному оптимальному управлению $v(x, t)$. В общем же случае он может зависеть от произвольных функций. Поэтому, чтобы применить доказанный принцип максимума, следует регулярным управлениям ставить в соответствие только непрерывно дифференцируемые решения задачи Гурса с наперед заданными условиями непрерывности производных. Изложенный метод исследования можно применить к изучению оптимальных процессов, описываемых уравнениями гиперболического типа с дополнительными начальными условиями и некоторыми видами граничных условий.

Пример 3. Пусть управляемый процесс описывается уравнением

$$L[u] \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t, u, v)$$

где a^2 — положительная постоянная, v — управляющий параметр, а функция f непрерывна по x и t и дважды непрерывно дифференцируема по u и v. Пусть, функция u, определяемая этим уравнением, удовлетворяет дополнительным условиям

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \qquad u_t'(x, 0) = \varphi_1(x), \qquad u(0, t) = \psi_0(t), \qquad u_x'(l, t) = \psi_1(t)$$

где $\varphi_i(x)$ и $\psi_i(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям сопряжения. Класс допустимых управлений определяется так же, как и в рассмотренной выше задаче. Функционал S определим формулой

$$S = \int_0^l \alpha(x)\, u(x, T)\, dx + \int_0^T \beta(t)\, u(l, t)\, dt + \iint_G \gamma(x, t)\, u(x, t)\, dx\, dt$$

В роли системы (3) в этом случае будет уравнение

$$L[w] = w\, \partial f / \partial u - \gamma(x, t)$$

а дополнительные условия для функции $w(x, t)$ нужно брать в виде

$$w(x, T) = 0, \qquad \partial w(x, T) / \partial t = \alpha(x), \qquad w(0, t) = 0, \qquad w(l, t) = \beta(t)$$

Функция H имеет вид

$$H(w, u, v, x, t) = wf(x, t, u, v)$$

Теми же рассуждениями, которые использовались при исследовании задачи Гурса, легко устанавливается справедливость теорем 1 и 2.

Поступила 23 IV 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутковский А. Г., Лернер А. Я. Об оптимальном управлении системами с распределенными параметрами. Автоматика и телемеханика, 1960, т. XXI.
2. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.
3. Бутковский А. Г. Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами. Автоматика и телемеханика, 1961, т. XXII, № 1.
4. Бутковский А. Г. Принцип максимума для оптимальных систем с распределенными параметрами. Автоматика и телемеханика, 1961, т. XXII, № 10.
5. Розоноэр Л. И. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем, 1—3. 1959, т. XX, № 10—12.
6. Соболев С. Л. Уравнение математической физики. Гостехиздат, 1954.
7. Привалов И. И. Интегральные уравнения. М.— Л., 1935.
8. Тихонов А. Н., Жуковский А. А. и Забежинский Я. Л. Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала. Ж. физ. химии, 1946, т. 20, вып. 10.
9. Тихонов А. Н. и Самарский А. А. Уравнения математической физики. Гостехиздат, 1953.
10. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. Изд-во иностр. лит., 1957.
11. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1949.