О РАБОТЕ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НА НЕЕ МАЛОГО ШУМА

Р. З. Хасьминский (Москва)

Рассматривается работа автоколебательной системы

$$X'' + \omega^2 X' - \varepsilon f(X, X') = \mu\xi'(t) \tag{0.1}$$

при малых ε и μ, где $\xi'(t)$ — процесс «белого шума». Исследуется поведение плотности вероятностей перехода (§ 2) и стационарного распределения (§ 3) марковского процесса $(X(t), X'(t))$, определяемого уравнением (0.1), при различных предположениях о порядке величины $\mu / \sqrt{\varepsilon}$. В частности, показано, что при $\mu/\sqrt{\varepsilon} \ll 1$ «белым шумом» можно пренебречь при расчете стационарного режима автоколебаний. Основное внимание уделено случаю $\mu / \sqrt{\varepsilon} \sim 1$. Показано, что в этом случае стационарное распределение вероятностей имеет предел при $\varepsilon \to 0$. Этот предел найден. Вычислена (§ 4) эффективная частота колебаний с точностью до $o(\varepsilon)$. Результаты применены к случаю Ван-дер-Поля (§ 5). В этом частном случае стационарное распределение оказывается гауссовским.

§ 1. Как известно, система $F(x'', x', x, \varepsilon) = 0$, консервативная при $\varepsilon = 0$, при некоторых предположениях относительно F имеет устойчивый предельный цикл при любом сколь угодно малом ε. Хорошо разработаны методы вычисления расположения этого предельного цикла при малых ε. Эти методы, восходящие к Ван-дер-Полю, в более общем виде были обоснованы в работах Н. Н. Боголюбова и Н. М. Крылова (принцип усреднения).

Может, однако, случиться, что при $\varepsilon \to 0$ рассматриваемая система становится чувствительной по отношению к малым случайным возмущениям, которые «размазывают» предельный режим ее работы. Ниже показано, что для анализа работы такой системы может быть применена доказанная автором теорема, распространяющая принцип усреднения на системы со случайными помехами.

Уравнение (0.1) более корректно записывать в виде системы стохастических дифференциальных уравнений (см. [1], стр. 248)

$$dX(t) = Y(t)\,dt,$$
$$dY(t) = [-\omega^2 X(t) + \varepsilon f(X(t), Y(t))]\,dt + \sqrt{\varepsilon}\,\sigma d\xi(t) \qquad \left(\sigma = \frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \tag{1.1}$$

Здесь $\xi(t)$ — винеровский случайный процесс (т. е. процесс с независимыми приращениями и гауссовским распределением вероятностей; при этом[1] $\langle \xi(t) \rangle = 0$ $\langle \xi^2(t) \rangle = t$). Решением системы (1.1) является, как известно [1], однородный по времени марковский процесс $(X(t), Y(t))$ в фазовом пространстве системы. Обозначим $p_\varepsilon(x, y, t, x_0, y_0)$ плотность вероятности перехода из точки (x, y) в точку (x_0, y_0) за время t траекторией этого процесса. Эта плотность, как функция x, y, t, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial t} = y\frac{\partial p}{\partial x} - \omega^2 x \frac{\partial p}{\partial y} + \varepsilon\left[\sigma^2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + f(x, y)\frac{\partial p}{\partial y}\right] \tag{1.2}$$

и начальному условию $p_\varepsilon(x, y, 0, x_0, y_0) = \delta(x - x_0, y - y_0)$.

Плотность стационарного распределения этого процесса $P_\varepsilon(x_0, y_0)$, определенная соотношениями

$$P_\varepsilon(x_0, y_0) = \int P_\varepsilon(x, y)\, p_\varepsilon(x, y, t, x_0, y_0)\, dxdy \tag{1.3}$$

$$\int P_\varepsilon(x_0, y_0)\, dx_0 dy_0 = 1 \tag{1.4}$$

удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon\left[\sigma^2 \frac{\partial^2 P_\varepsilon}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y}(f(x, y) P_\varepsilon)\right] - y\frac{\partial P_\varepsilon}{\partial x} + \omega^2 x \frac{\partial P_\varepsilon}{\partial y} = 0 \tag{1.5}$$

---

[1] Здесь и далее угловыми скобками обозначается вероятностное усреднение.

Разумеется, стационарный режим работы системы (1.1), а значит, и функция P_ε, удовлетворяющая условиям (1.3), (1.4), существует не при любой функции $f(x, y)$. Во всем дальнейшем будет предполагаться, что функция f удовлетворяет условиям, при которых $P_\varepsilon(x, y)$, являющаяся решением задачи (1.5), (1.4), существует, причем при фиксированном σ функция $P_\varepsilon(x, y)$ «не расползается» для $\varepsilon \to 0$, т. е. выполнено условие: для любого $\delta > 0$ найдется $R > 0$ такое, что при всех $\varepsilon > 0$

$$\int\limits_{r<R} P_\varepsilon(x, y)\, dx\, dy \geqslant 1 - \delta \qquad (r = \sqrt{x^2 + y^2}) \tag{1.6}$$

§ 2. Переходя в уравнении (1.2) к новым координатам, нетрудно получить уравнение для функции

$$q_\varepsilon(r, \varphi, t, r_1, \varphi_1) \equiv p_\varepsilon([r/\omega]\sin\varphi,\ r\cos\varphi,\ t,\ [r_1/\omega]\sin\varphi_1,\ r_1\cos\varphi_1)$$

Вводя далее новую неизвестную функцию

$$u_\varepsilon(r, \varphi, t, r_1, \varphi_1) = q_\varepsilon(r, \varphi - \omega t, t, r_1, \varphi_1) \tag{2.1}$$

что эквивалентно переходу к вращающейся системе координат $x = (r/\omega)\sin(\varphi - \omega t)$ $y = r\cos(\varphi - \omega t)$), получим уравнение

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = \varepsilon\left\{\sigma^2\left[\cos^2(\varphi - \omega t)\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial r^2} - \frac{\sin 2(\varphi - \omega t)}{r}\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial r\partial\varphi} + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{\sin^2(\varphi - \omega t)}{r^2}\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial\varphi^2} + \frac{\sin 2(\varphi - \omega t)}{r^2}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\varphi} + \frac{\sin^2(\varphi - \omega t)}{r}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r}\right] +$$
$$\left. + f\left(\frac{r}{\omega}\sin(\varphi - \omega t), r\cos(\varphi - \omega t)\right)\left[\cos(\varphi - \omega t)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r} + \frac{\sin(\varphi - \omega t)}{r}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\varphi}\right]\right\} \tag{2.2}$$

Пусть x — точка n-мерного эвклидова пространства. Для дифференциального уравнения вида $\partial u / \partial t = \varepsilon L(x, t) u$, где L — дифференциальный оператор второго порядка эллиптического или параболического типа, в работах [2,3] при некоторых предположениях установлен принцип усреднения, согласно которому решение задачи Коши для этого уравнения при $\varepsilon \to 0$ можно приблизить равномерно на отрезке времени длины $O(1/\varepsilon)$ решением уравнения $\partial v / \partial t = \varepsilon L^\circ(x) v$, где $L^\circ(x)$ — оператор, коэффициенты которого получены из коэффициентов оператора $L(x, t)$ усреднением по времени, т. е.

$$L^\circ(x) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T L(x, t)\, dt$$

Применяя к (2.2) этот принцип усреднения и учитывая (2.1), получим следующий результат. Пусть $p_0(r, \varphi, t, r_1, \varphi_1)$ — плотность вероятности перехода случайного процесса на плоскости, описываемого в полярных координатах уравнением

$$\frac{\partial p_0}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{\partial^2 p_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p_0}{\partial\varphi^2}\right] + \Phi(r)\frac{\partial p_0}{\partial r} + \frac{\Psi(r)}{r}\frac{\partial p_0}{\partial\varphi} \tag{2.3}$$

где

$$\Phi(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{r}{\omega}\cos t, r\sin t\right)\sin t\, dt, \quad \Psi(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{r}{\omega}\cos t, r\sin t\right)\cos t\, dt \tag{2.4}$$

Тогда при любых $R > 0$ и $T > 0$

$$q_\varepsilon(r, \varphi - \omega t, t, r_1, \varphi_1) - p_0(r, \varphi, t\varepsilon, r_1, \varphi_1) \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0 \tag{2.5}$$

равномерно по r, φ, r_1, φ_1 в области $r < R$, $r_1 < R$ и по t в области $0 \leqslant t \leqslant T / \varepsilon$.

Соотношение (2.5) можно переписать также в форме

$$q_\varepsilon(r, \varphi, t, r_1, \varphi_1) - p_0(r, \varphi + \omega t, t\varepsilon, r_1, \varphi_1) \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0 \tag{2.6}$$

удобной для дальнейшего.

§ 3. Если у процесса, описываемого уравнением (2.3), существует стационарная плотность $p(r, \varphi)$, то, она, очевидно, не зависит от φ и будет решением задачи

$$\frac{\sigma^2}{2}[(pr)'' - p'] - (\Phi(r)p)' = 0, \qquad \int_0^\infty p(r)\, rdr = 1$$

Отсюда получим

$$p(r) = \left[\int_0^\infty \exp\left\{\frac{2}{\sigma^2}\int_0^r \Phi(s)\,ds\right\} rdr\right]^{-1} \exp\left\{\frac{2}{\sigma^2}\int_0^r \Phi(s)\,ds\right\} \tag{3.1}$$

Предполагается, что функция $\Phi(r)$ удовлетворяет условиям, обеспечивающим сходимость интеграла в (3.1); сходимость этого интеграла, как известно, необходима и достаточна для существования стационарного режима у процесса, описываемого уравнением (2.3). Введем обозначение

$$Q_\varepsilon(r, \varphi) = P_\varepsilon(r\omega^{-1}\sin\varphi,\ r\cos\varphi).$$

Докажем, что для любой ограниченной функции $f(r, \varphi)$

$$\iint f(r, \varphi) Q_\varepsilon(r, \varphi)\, r\,dr\,d\varphi \to \iint f(r, \varphi)\, p(r)\, r\,dr\,d\varphi \quad \text{при } \varepsilon \to 0 \tag{3.2}$$

Из известных предельных теорем о марковских процессах, обладающих инвариантной мерой [4, 5], следует, что для любых $\delta > 0$ и $R > 0$ найдется T_0 такое, что

$$\left|\iint f(r_1, \varphi_1)\,[p_0(r, \varphi, T_0, r_1, \varphi_1) - p(r_1)]\, r_1 dr_1 d\varphi_1\right| < \delta \quad \text{при } r < R \tag{3.3}$$

Из (2.6), (1.6) и (3.3) вытекает неравенство (3.4)

$$\left|\iint f(r_1, \varphi_1)\left[q_\varepsilon\left(r, \varphi, \frac{T_0}{\varepsilon}, r_1, \varphi_1\right) - p(r_1)\right] r_1\,dr_1\,d\varphi_1\right| < 2\delta \quad \text{при } \varepsilon \leqslant \varepsilon_0(\delta, T_0), \quad r < R$$

Из (3.4), учитывая тождество

$$\iint f(r, \varphi) Q_\varepsilon(r, \varphi)\, r\,dr\,d\varphi = \iint Q_\varepsilon(r, \varphi)\, r\,dr\,d\varphi \iint q_\varepsilon\left(r, \varphi, \frac{T_0}{\varepsilon}, r_1, \varphi_1\right) f(r_1, \varphi_1)\, r_1\,dr_1\,d\varphi_1$$

получим при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$

$$\left|\iint fQ_\varepsilon\, r\,dr\,d\varphi - \iint fpr\,dr\,d\varphi\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\iint_{r<R} + \iint_{r\geqslant R}\right) Q_\varepsilon(r, \varphi)\, r\,dr\,d\varphi \left|\iint\left[q_\varepsilon\left(r, \varphi, \frac{T_0}{\varepsilon}, r_1, \varphi_1\right) - p(r_1)\right] f(r_1, \varphi_1)\, r_1 dr_1 \varphi_1\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\delta + M\iint_{r\geqslant R} Q_\varepsilon(r, \varphi)\, r\,dr\,d\varphi \qquad (M = \sup|f|)$$

Так как $\delta > 0$ и $R > 0$ произвольны, то, учитывая (1.6), получаем (3.2).

Соотношение (3.2) позволяет исследовать поведение стационарной меры процесса (1.1) при $\varepsilon \to 0$ и разных порядках величины $\sigma = \mu / \sqrt{\varepsilon}$, так как для этого достаточно исследовать поведение функции $p(r)$, определенной соотношением (3.1.) Очевидно, плотность распределения $rp(r)$ по мере $drd\varphi$ имеет экстремумы в точках, где

$$\Phi(r) = -\sigma^2 / 2r \tag{3.5}$$

В предельном случае $\sigma \to 0$ соотношение (3.5) переходит в известное уравнение для точек равновесия колебательной системы, близкой к гармоническому осциллятору (см. [6], стр. 658)

$$\Phi(r) = 0 \tag{3.6}$$

Этот результат показывает, что в случае, когда мощность шума $\mu^2 \ll \varepsilon$, белый шум можно не принимать в расчет при исследовании колебаний.

В другом предельном случае $\sigma \to \infty$ стационарное распределение «расплывается» Это значит. что при $\mu^2 \gg \varepsilon$ никакой устойчивый режим колебаний невозможен.

Величина

$$E_\varepsilon(t) = {}^1/_2\,\{\omega^2\,[X_\varepsilon(t)]^2 + [Y_\varepsilon(t)]^2\}$$

имеет физический смысл энергии колебаний в момент времени t. Из эргодических теорем следует, что средняя энергия колебаний за время T при $T \to \infty$ имеет для почти всех траекторий предел

$$\langle E_\varepsilon \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T E_\varepsilon(t)\, dt = \frac{1}{2} \int r^2 P_\varepsilon(r, \varphi)\, r dr d\varphi$$

Предположим, что выполнено условие (несколько более ограничительное, чем (1.6)): для всех $\varepsilon > 0$ и при фиксированном σ

$$\iint_{r>R} P_\varepsilon(r, \varphi)\, r^3 dr d\varphi < \delta \qquad \text{при } R \geqslant R_0(\delta)$$

Тогда из (3.2) получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \langle E_\varepsilon \rangle = \langle E_0 \rangle = \frac{1}{2} \int_0^\infty r^3 p(r)\, dr \tag{3.7}$$

§ 4. Пусть $\zeta(t)$ — случайная величина, равная числу пересечений нуля слева направо компонентой $X_\varepsilon(t)$ процесса $(X_\varepsilon(t), Y_\varepsilon(t))$. Как известно, случайная величина $(1/t)\,\zeta(t)$ имеет с вероятностью единица предел $\lim\ [(1/t)\langle\zeta(t)\rangle]$, при $t \to \infty$, где усреднение берется при любом начальном распределении. Этот предел, умноженный на 2π, называется эффективной частотой колебаний процесса $\langle\omega_\varepsilon\rangle$.

Ясно, что при $\varepsilon = 0$, $\sigma = 0$ величина $\langle\omega_\varepsilon\rangle$ совпадает с ω. Наличие нелинейности и случайных возмущений приводит к поправке в частоте. Известно, что при отсутствии шума $(\sigma = 0, \varepsilon \neq 0)$ справедлива формула

$$\omega_\varepsilon = \omega + \varepsilon \frac{\Psi(r_0)}{r_0} + o(\varepsilon) \qquad (\varepsilon \to 0) \tag{4.1}$$

где $\Psi(r)$ определено соотношением (2.4), а постоянная r_0 определяется из уравнения (3.6). Цель настоящего параграфа — получить аналог формулы (4.1) при любом σ.

Для подсчета $\langle\omega_\varepsilon\rangle$ удобно рассматривать случайный процесс $(X_\varepsilon(t), Y_\varepsilon(t))$ в другом фазовом пространстве так, чтобы число обходов нуля траекторией процесса «запоминалось» ею.

Отображение, обратное к $x = r\omega^{-1} \sin\varphi$, $y = r\cos\varphi$ переводит марковский процесс $X_1 = (X_\varepsilon(t), Y_\varepsilon(t))$ на плоскости xy в марковский процесс $X_2 = (r(t), \varphi(t))$ на множестве $K = \{0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ r > 0\}$ ((r, φ) и $(r, \varphi + 2\pi)$ представляет одну и ту же точку).

Каждую траекторию $(r(t), \varphi(t))$ процесса X_2 отобразим на траекторию нового процесса $X_3 = (\rho(s), \theta(s))$ на полуплоскости $K_1\ (-\infty < \theta < \infty,\ \rho > 0)$ по формулам

$$\rho(s) = r(s), \qquad \theta(s) = \varphi(s) + 2\pi\zeta(s)$$

и потребуем, чтобы это отображение сохраняло вероятностную меру на множестве траекторий. Легко проверить, что построенный таким образом процесс X_3 тоже марковский. При этом его плотность вероятности перехода $q_\varepsilon^*(\rho, \theta, t, \rho_1, \theta_1)$ (относительно меры $\rho_1 d\rho_1 d\theta_1$) удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению по переменным ρ, θ, t, что и функция $q_\varepsilon(r, \varphi, t, r_1, \varphi_1)$ по переменным r, φ, t. Однако в отличие от функции q_ε, которая является функцией Грина этого уравнения на множестве $(K, t > 0)$, q_ε^* — функция Грина на $(K_1, t > 0)$.

Применяя метод § 2 (возможность применения в этой ситуации теорем из [2,3] нуждается в обосновании), можно снова получить соотношение (2.6) с заменой q_ε на q_ε^*, а p_0 — на p_0^*, где функция p_0^* является функцией Грина уравнения (2.3) на множестве $(K_1, t > 0)$ (а не на $(K, t > 0)$ как p_0). Далее, аналогично тому, как в § 3 из (2.6) было получено соотношение (3.2), можно отсюда получить для

$$\langle\omega_\varepsilon\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{\rho=0}^{\infty} \int_{\theta=-\infty}^{\infty} q_\varepsilon^*(\rho, \theta, T, \rho_1, \theta_1)(\theta_1 - \theta)\, \rho_1 d\rho_1 d\theta_1$$

соотношение

$$\langle \omega_\varepsilon \rangle = \omega + \varepsilon V(1) + o(\varepsilon) \qquad (\varepsilon \to 0) \tag{4.2}$$

Здесь

$$V(t) = \int_{r=0}^{\infty} p(r)\, r dr \int_{r_1=0}^{\infty} \int_{\theta_1=-\infty}^{\infty} p_0^*(r,\theta,t,r_1,\theta_1)(\theta_1-\theta)\, r_1 dr_1 d\theta_1$$

Умножая (2.3) на $\theta_1 d\theta_1 r_1 dr_1$ и интегрируя, получим, что функция

$$u_0(r,\theta,t) = \iint_{K_1} p_0^*(r,\theta,t,r_1,\theta_1)\,\theta_1 r_1 dr_1 d\theta_1$$

тоже удовлетворяет уравнению (2.3) в (K_1, $t > 0$) и начальному условию $u_0(r,\theta,0)=\theta$.

Отсюда следует, что $v_0(r,\theta,t) = u_0(r,\theta,t) - \theta$ будет решением задачи

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_0}{\partial r}\right] + \Phi(r)\frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{\Psi(r)}{r}, \qquad v_0(r,0) = 0$$

Умножая последнее уравнение на $rp(r)\,dr$ и интегрируя, получим

$$\frac{dV}{dt} = \int \Psi(r)\, p(r)\, dr, \qquad V(0) = 0$$

и, следовательно,

$$V(t) = t\int \Psi(r)\, p(r)\, dr$$

Подставляя это значание $V(t)$ в (4.2), получим окончательно

$$\langle \omega_\varepsilon \rangle = \omega + \varepsilon \int_0^\infty \Psi(r)\, p(r)\, dr + o(\varepsilon) \qquad (\varepsilon \to 0) \tag{4.3}$$

§ 5. Рассмотрим пример, когда

$$\omega = 1, \qquad f(x,y) = y(1-x^2) \tag{5.1}$$

В отсутствие шума (при $\mu = 0$) получаем уравнение Ван-дер-Поля, для которого, как известно,

$$\Phi(r) = {}^1/_2 r - {}^1/_8 r^3, \qquad \Psi(r) = 0 \tag{5.2}$$

Применяя выводы §§ 2—4, получим из (5.2), (3.1) и (4.3)

$$p(r) = \left[2\sqrt{\pi}\,\sigma \exp\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) F\left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\right)\right]^{-1} \exp\left[\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{16}\right)\right]$$

$$\left(F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy\right)$$

$$\langle \omega_\varepsilon \rangle = \omega + o(\varepsilon) \qquad (\varepsilon \to 0)$$

Заметим, что применимость выводов § 2—4 в данном случае нуждается в дополнительном обосновании, так как в [2,3] предполагалось, что коэффициенты уравнения растут на бесконечности не быстрее, чем линейные функции, а $f(x,y) = y(1-x^2)$ не удовлетворяет этому условию.

Из (3.5) видно, что в данном случае функция $rp(r)$ имеет единственный максимум в точке $r_0 = (2 + 2\sqrt{1+\sigma^2})^{1/2}$.

При $\sigma \to 0$ отсюда получается известное приближенное значение для радиуса предельного цикла при отсутствии шума $r_0 = 2$. Средняя энергия колебаний в этом примере при $\varepsilon \to 0$ стремится к пределу (см. 3.7))

$$\langle E_0 \rangle = 2 + (1/\sqrt{\pi})\,\sigma \exp(-1/\sigma^2)\,[F(\sqrt{2}/\sigma)]^{-1}$$

Отметим в заключение, что влияние случайных помех на работу автоколебательной системы рассмотренного здесь типа изучалось в работах [7-9]. Однако во всех этих работах предполагалось, что мощность шума много меньше параметра, характеризующего нелинейность (т. е. $\sigma \ll 1$ в терминологии настоящей заметки). Легко видеть, что полученные результаты при $\sigma \ll 1$ согласуются с результатами [7-8]

Заметим что метод, примененный здесь, пригоден для исследования воздействия случайного шума на более общие как одномерные, так и многомерные системы, содержащие малый параметр ε, которые при $\varepsilon = 0$ становятся консервативными.

Поступила 25 I 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Дуб Дж. Вероятностные процессы. ИЛ, 1959.
2. Хасьминский Р. З. Об одной оценке решения параболического уравнения и некоторых ее применениях. Докл. АН СССР, 1962, т. 143, в. 5, стр. 1060—1063.
3. Хасьминский Р. З. О методе усреднения для параболических и эллиптических дифференциальных уравнений и случайных процессов диффузионного типа. Теория вероятн. и ее примен., 1963, т. 8, вып. 1, стр. 3—25.
4. Яглом А. М. О статистической обратимости брауновского движения. Матем. сб., 1949, т. 24 (66), вып. 3, стр. 457—492.
5. Maruyama G., Tanaka T. Ergodic property of N-dimensional recurrent Markov processes. Mem. Fac. Sci., Kyushu Univ., 1959, vol. A-XIII, 2, p. 157—172.
6. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. Физматгиз, 1959.
7. Берштейн И. Л. Флуктуации в автоколебательной системе и определение естественной размытости частоты лампового генератора. Ж. техн. физ., 1941, т. 11, вып. 4, стр. 305—316.
8. Берштейн И. Л. Флуктуации амплитуды и фазы лампового генератора. Изв. АН СССР, сер. физ., 1950, т. 14, № 2, стр. 145—173.
9. Рытов С. М. Флуктуации в автоколебательных системах томсоновского типа. I, II. Ж. экспр. и теор. физ., 1955, т. 29, вып. 3, стр. 304—314, 315—328.

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ПРОЦЕССАМИ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ОБЪЕКТАХ

А. И. Егоров (Фрунзе)

Ряд практических задач приводит к необходимости изучать управляемые процессы в системах с распределенными параметрами. А. Г. Бутковский и А. Я. Лернер [1] сформулировали в наиболее общей форме задачу об оптимальном управлении процессами в таких системах и показали, что в некоторых случаях эта задача может быть решена при помощи принципа максимума Л. С. Понтрягина [2]. Позже А. Г. Бутковский [3] и [4] нашел условия оптимальности для случая, когда управляемый процесс описывается нелинейным интегральным уравнением

$$Q(P) = \int\limits_D K(P, S, Q(S), u(S))\, dS$$

где $Q(P)$ — вектор-функция, характеризующая состояние управляемой системы, m — вектор-функция, вообще говоря, нелинейная относительно Q и u, $u(S)$ — допустимое управление, а D — область m-мерного эвклидова пространства.

В предлагаемой заметке дана постановка одного типа задач оптимального управления процессами, которые описываются системами квазилинейных уравнений с частными производными. Методом Л. И. Розоноэра [5] получены необходимые условия оптимальности. Указаны также достаточные в локальном смысле условия оптимальности, когда процесс описывается системой линейных уравнений.

Пусть управляемый процесс описывается уравнениями

$$L_i[u_i] \equiv \frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial t} + b_i(x, t)\frac{\partial u_i}{\partial x} + c_i(x, t)\frac{\partial u_i}{\partial t} = f_i(x, t, u_1, \ldots, u_n, v) \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad (1)$$

где функции b_i и c_i имеют непрерывные производные по x и t второго порядка в области G $(0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$, v — управляющий параметр, принимающий значения из выпуклой области V (открытой или замкнутой) некоторого r-мерного эвклидова пространства. Функции f_i предполагаются непрерывными по x и t и дважды непрерывно дифференцируемыми по $u_1, \ldots, u_n$ и v.