Прикладная математика и механика. Том XXVII, 1963

О КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. Х. Харасахал

(Алма-Ата)

Квазипериодическая функция, в отличие от периодической, имеет несколько периодов [1]. Поэтому при исследовании квазипериодичности естественно перейти в пространство нескольких измерений.

При исследовании решений обыкновенных дифференциальных уравнений автор от заданной системы уравнений переходит к специальной системе в частных производных [2-4]. Это позволяет задачу о квазипериодических колебаниях свести к задаче о колебаниях периодических. Тем самым квазипериодичность удается охарактеризовать при помощи граничных условий.

В первой части работы этим методом исследуются линейные системы с квазипериодическими коэффициентами и устанавливается структура решений таких систем, а во второй части рассматриваются системы нелинейные.

Приношу благодарность С. Л. Соболеву, в семинаре которого были доложены и обсуждены предварительные результаты этой работы.

§ 1. Линейные системы уравнений. 1. Пусть дано уравнение

$$\frac{dx}{dt} = P(t)\,x, \qquad P(t) = \| p_{sk}(t) \|_1^n \tag{1.1}$$

Здесь $P(t)$ — квазипериодическая матрица с частотным базисом $\beta\,\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$, а $x\,(x_1, \ldots, x_n)$ — вектор. Известно [1], что квазипериодическая функция $p_{sk}(t)$ является диагональной от периодической функции $F_{sk}(u_1, \ldots, u_m)$ с периодами $\omega_k = 2\pi / \beta_k$ по переменным u_k, т. е. $p_{sk}(t) = F_{sk}(t, \ldots, t)$.

Пусть D — оператор, действующий на функцию $x\,(u_1, \ldots, u_m)$ следующим образом

$$Dx = \frac{\partial x}{\partial u_1} + \frac{\partial x}{\partial u_2} + \ldots + \frac{\partial x}{\partial u_m}$$

Составим уравнение

$$Dx = F(u_1, \ldots, u_m)\,x \tag{1.2}$$

$$(F(u_1, \ldots, u_m) = \| F_{sk}(u_1, \ldots, u_m) \|_1^n, \; F(t, \ldots, t) = P(t))$$

Уравнение (1.2) эквивалентно уравнению

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial z}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial z}{\partial x_j} = 0 \qquad (b_j = F_{j1}x_1 + \ldots + F_{jn}x_n)$$

где z — скалярная искомая функция. Таким образом, решения уравнения (1.2) существуют, если существуют первые интегралы системы

$$du_1 = du_2 = \ldots = du_m = \frac{dx_1}{b_1} = \ldots = \frac{dx_n}{b_n}$$

Если уравнение (1.2) рассматривать вдоль диагонали $u_1 = u_2 = \ldots = u_m = t$, то получим уравнение (1.1), поэтому если $x(u_1, \ldots, u_m)$ — некоторое решение уравнения (1.2), то $x(t, \ldots, t)$ — решение уравнения (1.1). Легко видеть также [4], что через каждую кривую, не лежащую на $n+1$-мерной плоскости $u_1 = u_2 = \ldots = u_m$, в $m+n$-мерного пространства проходит, и притом единственное, решение уравнения (1.2), существующее для всех значений $u_1, \ldots, u_m$, а через кривую, являющуюся решением уравнения (1.1), проходит бесконечное множество решений уравнения (1.2).

2. Пусть $F(u_1, \ldots, u_m)$ в уравнении (1.2) некоторая переменная матрица (не обязательно периодическая). Для уравнения (1.2) можно построить теорию, аналогичную соответствующей теории для уравнения (1.1). Пусть векторы

$$\psi_1(x_{11}, \ldots, x_{n1}), \ldots, \psi_n(x_{1n}, \ldots, x_{nn}) \qquad (x_{sk} = x_{sk}(u_1, \ldots, u_m)) \quad (1.3)$$

представляют собой n частных решений уравнения (1.2).

Определение. Систему решений (1.3) будем называть фундаментальной, если она удовлетворяет следующему условию: пусть $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ $(x_k = x_k(u_1, \ldots, u_m))$ — любое наперед заданное решение уравнения (1.2); тогда существуют такие дифференцируемые функции $A_k(u_2 - u_1, \ldots, u_m - u_1)$ $(k = 1, \ldots, n)$, что

$$\psi = A_1\psi_1 + \ldots + A_n\psi_n$$

Пусть $x(u_1, \ldots, u_m)$ — матрица, составленная из функций (1.3), и $|x(u_1, \ldots, u_m)|$ — ее определитель.

Теорема 1.1. Если $|x(u_1, \ldots, u_m)|$ отличен от нуля для всех значений u_k, то система (1.3) — фундаментальная.

В дальнейшем функцию $f(u_2 - u_1, \ldots, u_m - u_1)$, зависящую от разностей $u_k - u_1$, будем называть функцией постоянной на диагонали. Аналогично матрицу будем называть постоянной на диагонали, если ее элементы — постоянные на диагонали функции.

Если матрица F в уравнении (1.2) — постоянная на диагонали или постоянная всюду, то матрица

$$x = \exp\left[\frac{\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m} F\right] \quad (\alpha_j = \mathrm{const})$$

будет фундаментальной матрицей решений уравнения (1.2). Тем самым структура решений уравнения (1.2) с постоянной на диагонали или постоянной всюду матрицей F полностью устанавливается.

3. Если уравнение (1.2) подвергнуть преобразованию

$$x = B(u_1, \ldots, u_m) Y \tag{1.4}$$

где B — неособая матрица, то получим уравнение

$$DY = [B^{-1}FB - B^{-1}DB]\, Y \tag{1.5}$$

Пусть неособая матрица B вместе с матрицей DB ограничены для всех положительных значений $u_1, \ldots, u_m$, лежащих на диагонали. Матрицу B, обладающую этим свойством, будем называть матрицей Ляпунова.

Если $B(u_1, \ldots, u_m)$ в преобразовании (1.4) постоянная на диагонали или постоянная всюду матрица, то уравнение (1.5) принимает наиболее простой вид $DY = B^{-1}FBY$.

Определение. Уравнение (1.2) будем называть приводимым, если оно при помощи преобразования (1.4) с матрицей Ляпунова B переходит в уравнение с постоянной на диагонали или постоянной всюду матрицей.

Легко получить теорему Н. П. Еругина [5].

Теорема 1.2. Для того чтобы уравнение (1.2) было приводимым, необходимо и достаточно чтобы фундаментальную систему решений этого уравнения можно было представить в форме

$$x(u_1, \ldots, u_m) = B(u_1, \ldots, u_m) \exp\left[\frac{\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m} A\right]$$

где B — матрица Ляпунова, $\alpha_k = \mathrm{const}$ и A — постоянная на диагонали или постоянная всюду матрица.

Теорема 1.3. Если коэффициенты F_{sk} в уравнении (1.2) — периодические функции с одним и тем же вещественным периодом ω по всем переменным u_k, то уравнение (1.2) приводимо с помощью периодической матрицы.

Доказательства этих теорем не приводятся,— они легко получаются из известных доказательств для систем обыкновенных уравнений.

Если уравнение (1.2) рассматривать на диагонали $u_k = t$, то теорема 1.3 дает известную теорему Ляпунова о приводимости уравнения (1.1) с периодическими (с общим периодом) коэффициентами.

Заметим, что если $x_1(u_1, \ldots, u_m)$ — фундаментальная матрица решений уравнения (1.2), то матрица

$$x(u_1, \ldots, u_m) = x_1(u_1, \ldots, u_m) B \tag{1.6}$$

где B — неособая постоянная на диагонали матрица, также будет фундаментальной матрицей решений, и все фундаментальные матрицы решений уравнения (1.2) содержатся в формуле (1.6).

4. Пусть в уравнении (1.2) $F(u_1 + \omega_1, \ldots, u_m + \omega_m) = F(u_1, \ldots, u_m)$. Тогда вдоль диагонали уравнение (1.2) дает, как уже отмечалось, уравнение (1.1) с квазипериодической матрицей $P(t) = F(t, \ldots, t)$.

Пусть $x(u_1, \ldots, u_m)$ — фундаментальная матрица решений уравнения (1.2). Тогда $x(u_1 + \omega_1, \ldots, u_m + \omega_m)$, в силу периодичности матрицы F, также решение уравнения (1.2), и на основании предыдущего

$$x(u_1 + \omega_1, \ldots, u_m + \omega_m) = x(u_1, \ldots, u_m) C \tag{1.7}$$

где C — постоянная на диагонали или постоянная всюду матрица.

Таким образом, приходим к соотношению, аналогичному тому, которое позволило Флоке [5] установить структуру решений систем обыкновенных уравнений с периодическими коэффициентами.

Теорема 1.4. Если уравнение (1.2) таково, что матрица C в соотношении (1.7) всюду постоянная, то это уравнение приводимо к уравнению с всюду постоянной матрицей при помощи периодической матрицы.

Действительно, пусть всюду постоянная матрица B такова, что

$$C = \exp\left[\frac{\alpha_1\omega_1 + \ldots + \alpha_m\omega_m}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m} B\right] \qquad (\alpha_j = \text{const})$$

Рассмотрим матрицу

$$K(u_1, \ldots, u_m) = \exp\left[\frac{\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m} B\right] x^{-1}(u_1, \ldots, u_m).$$

Тогда $K(u_1 + \omega_1, \ldots, u_m + \omega_m) = K(u_1, \ldots, u_m)$, т. е. матрица K — периодическая. Положим

$$Y = Kx = \exp\left[\frac{\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m} B\right]$$

Тогда $DY = BY$. Имеет место и обратное предложение.

Теорема 1.5. Если уравнение (1.2) приводимо к уравнению с всюду постоянной матрицей при помощи периодической матрицы, то матрица C в соотношении (1.7) всюду постоянная.

Действительно, пусть при помощи преобразования $x = BY$, где B — периодическая матрица, уравнение (1.2) привелось к виду $DY = AY$, где A — всюду постоянная матрица. Тогда последовательно имеем:

$$Y = \exp\left[\frac{\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m} A\right], \qquad x = B\exp\left[\frac{\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m} A\right]$$

и, следовательно, всюду матрица

$$C = \exp\left[\frac{\alpha_1\omega_1 + \ldots + \alpha_m\omega_m}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m} A\right] = \text{const}$$

Применяя полученное к уравнению (1.1), получаем теорему.

Теорема 1.6. Для того чтобы уравнение (1.1) было приводимым при помощи квазипериодической матрицы, необходимо и достаточно, чтобы в соотношении

$$x(t + \omega_1, \ldots, t + \omega_m) = x(t, \ldots, t)\, M$$

постоянная матрица M не зависела от периодов ω_k.

Если изучить структуру решений уравнения (1.2) с периодической матрицей $F(u_1, \ldots, u_m)$, то тем самым будет выяснена структура решений уравнения (1.1) с квазипериодической матрицей $P(t) = F(t, \ldots, t)$. Но структура решений уравнения (1.2) полностью определяется матрицей C в соотношении (1.7).

Укажем одно вспомогательное предложение. Для того чтобы дифференцируемая функция $\Phi_1(u_1, \ldots, u_m)$ удовлетворяла условию

$$\Phi_1(u_1 + \omega_1, \ldots, u_m + \omega_m) = \Phi_1(u_1, \ldots, u_m) + p(u_2 - u_1, \ldots, u_m - u_1) \quad (1.8)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$D\Phi_1(u_1, \ldots, u_m) = K(u_1, \ldots, u_m) \quad (1.9)$$

где K — периодическая функция по переменным u_j с периодами ω_j. В частности, если $K = 0$, то Φ_1 — постоянная на диагонали функция.

Действительно, пусть (1.9) имеет место. Тогда

$$D\left[\Phi_1(u_1 + \omega_1, \ldots, u_m + \omega_m) - \Phi_1(u_1, \ldots, u_m)\right] = 0$$

Так как решением уравнения $DZ = 0$ является произвольная дифференцируемая функция вида $p = p(u_2 - u_1, \ldots, u_m - u_1)$, то достаточность доказана.

Пусть имеет место (1.8). Тогда $D\Phi_1(u_1+\omega_1, \ldots, u_m+\omega_m) = D\Phi_1(u_1, \ldots, u_m)$, и необходимость доказана.

Аналогично, для того чтобы функция $\Phi_2(u_1, \ldots, u_m)$ удовлетворяла условию

$$\Phi_2(u_1+\omega_1, \ldots, u_m+\omega_m) =$$
$$= \Phi_2(u_1, \ldots, u_m) + p(u_2-u_1, \ldots, u_m-u_1)\,\Phi_1(u_1, \ldots, u_m) \tag{1.10}$$

где Φ_1 удовлетворяет (1.8), необходимо и достаточно, чтобы

$$D\,[K_1 D\Phi_2] = K_2 \tag{1.11}$$

где $K_1 \neq 0$ и K_2 — периодические функции. Из (1.11) следует, что для того чтобы функция Φ_2 удовлетворяла условию (1.10), необходимо и достаточно, чтобы $D\Phi_2 = KN_1$, где K — периодическая, а N_1 — типа Φ_1 функции. В частности, если $K_2 = 0$, то функция N_1 — постоянная на диагонали. Продолжая так дальше, получаем: для того чтобы функция $\Phi_s(u_1, \ldots, u_m)$ удовлетворяла условию

$$\Phi_s(u_1+\omega_1, \ldots, u_m+\omega_m) =$$
$$= \Phi_s(u_1, \ldots, u_m) + p(u_2-u_1, \ldots, u_m-u_1)\,\Phi_{s-1}(u_1, \ldots, u_m)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$D\Phi_s = KN_{s-1}(u_1, \ldots, u_m)$$

где K — периодическая, а N_{s-1} — типа Φ_{s-1} функции.

Рассмотрим возможные случаи структуры матрицы C в соотношении (1.7).

1°. Матрица C — всюду постоянная. Тогда из теоремы 1.4 следует

$$x(u_1, \ldots, u_m) = B(u_1, \ldots, u_m)\exp\left[\frac{\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m} A\right] \qquad (\alpha_j = \mathrm{const})$$

где B — периодическая и A — всюду постоянная матрица. Для (1.1) это дает

$$x(t) = \Phi(t)\exp(tA) \tag{1.12}$$

где $\Phi(t) = B(t, \ldots, t)$ — квазипериодическая матрица.

Таким образом, получается результат, подобный результатам Флоке для уравнения (1.1) с периодической матрицей $P(t)$. Этот случай подробно исследован в работе [4].

2°. Матрица $C = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$, где λ_k — постоянные на диагонали функции. В этом случае получаются соотношения

$$x_{jk}(u_1+\omega_1, \ldots, u_m+\omega_m) = \lambda_k\, x_{jk}(u_1, \ldots, u_m)$$

которым, как это следует из вспомогательного предложения, удовлетворяют функции вида $\Phi_{jk}(u_1, \ldots, u_m)\exp[R_k(u_1, \ldots, u_m)]$, где Φ_{jk} — периодические по переменным u_i с периодами ω_i, а R_k — функции, удовлетворяющие условию (1.9). В частности

$$R_k = \int_0^{u_1} M_k(\tau, u_2-u_1+\tau, \ldots, u_m-u_1+\tau)\,d\tau$$

где M_k — периодические функции. Для уравнения (1.1) это дает

$$x_{jk}(t) = \varphi_{jk}(t)\exp[m_k(t)] \qquad \text{или} \qquad x_{jk}(t) = \varphi_{jk}(t)\exp\left[\int_0^t l_k(\tau)\,d\tau\right]$$
$$(\varphi_{jk}(t) = \Phi_{jk}(t, \ldots, t), \qquad l_k(t) = M_k(t, \ldots, t)$$

где $m_k'(t)$ — квазипериодические функции. Если

$$\int_0^t l_k(\tau)\,d\tau = at + \psi_k(t)$$

где $\psi_k(t)$ — квазипериодические функции, то опять получаем вид (1.12), а если $\psi_k(t)$ не являются квазипериодическими, то получается вид решений уравнения (1.1), уже не совпадающий с теорией Флоке. В этом последнем случае уравнение (1.1) неприводимо, но если характеристичные числа (Ляпунова) этого уравнения и уравнения, присоединенного к нему, обозначить соответственно через α_k и β_k, то $\alpha_k + \beta_k = 0$, т. е. уравнение (1.1) правильное [5].

3°. Матрица

$$C = [I_{q_1}(\lambda_1), \ldots, I_{q_p}(\lambda_p)], \qquad I_{q_k}(\lambda_k) = \begin{Vmatrix} \lambda_k & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots \lambda_k \end{Vmatrix}$$

где λ_k — постоянные на диагонали функции. Соотношение (1.7), при этом имеет вид

$$x(u_1 + \omega_1, \ldots, u_m + \omega_m) = x(u_1, \ldots, u_m)\,[I_{q_1}(\lambda_1), \ldots, I_{q_p}(\lambda_p)]$$

т. е. будет состоять из нескольких групп. Например, группа, отвечающая λ_k, будет

$$x_{sj}(u_1 + \omega_1, \ldots, u_m + \omega_m) = x_{sj-1}(u_1, \ldots, u_m) + \lambda_k x_{sj}(u_1, \ldots, u_m)$$
$$(s = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, q_k)$$

Тем самым, как это следует из вспомогательного предложения

$$x_{s1}(u_1, \ldots, u_m) = \Phi_{s1}(u_1, \ldots, u_m) \exp [R_k] \qquad (s = 1, \ldots, n)$$
$$x_{s2}(u_1, \ldots, u_m) = (\Phi_{s2} + M_{s1}\Phi_{s1}) \exp [R_k]$$
$$x_{s3}(u_1, \ldots, u_m) = (\Phi_{s3} + M_{s1}\Phi_{s2} + M_{s2}\Phi_{s1}) \exp [R_k]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{sq_k}(u_1, \ldots, u_m) = (\Phi_{sq_k} + M_{s1}\Phi_{sq_k-1} + \ldots + M_{sq_k-1}\Phi_{s1}) \exp [R_k]$$

где $\Phi_{si}(u_1, \ldots, u_m)$ — периодические функции по переменным u_k с периодами ω_k, а функции $M_{s1}, \ldots, M_{sq_k-1}$ удовлетворяют условиям

$$DM_{s1} = \alpha_1, \quad DM_{s2} = \alpha_2 N_{s1}, \ldots, DM_{sq_k-1} = \alpha_{q_k-1} N_{sq_k-2}$$

где α_i — периодические функции, а N_{si} — функции типа M_{si}.

Функция R_k удовлетворяет условию (1.9). Для уравнения (1.1) это дает

$$x_{s1}(t) = \varphi_{s1}(t) \exp [r_k(t)]$$
$$x_{s2}(t) = (\varphi_{s2}(t) + h_{s1}(t)\varphi_{s1}(t)) \exp [r_k(t)]$$
$$x_{s3}(t) = (\varphi_{s3}(t) + h_{s1}(t)\varphi_{s2}(t) + h_{s2}(t)\varphi_{s1}(t)) \exp [r_k(t)]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{sq_k}(t) = (\varphi_{sq_k} + h_{s1}\varphi_{sq_k-1} + \ldots + h_{sq_k-1}\varphi_{s1}) \exp [r_k(t)]$$

где $\varphi_{si}(t)$ и $r_k'(t)$ — квазипериодические функции, а функции $h_{si}(t)$ удовлетворяют условиям: $h_{s1}'(t)$ — квазипериодическая функция, $h_{s2}'(t)$ — произведение квазипериодической функции на функцию, производная которой — квазипериодическая и т. д.

Уравнение (1.1) опять правильное. Тем самым приведен широкий класс правильных, но, в общем случае, неприводимых уравнений.

§ 2. Нелинейные системы уравнений. 1. Рассмотрим уравнение

$$dx\,/\,dt = f(t, x) + \alpha F(t, x, \alpha) \tag{2.1}$$

где $f(f_1, \ldots, f_n)$, $F(F_1, \ldots, F_n)$ и $x(x_1, \ldots, x_n)$ — векторы. При этом функции $f_s(t, x_1, \ldots, x_n)$ и $F_s(t, x_1, \ldots, x_n, \alpha)$ определены при всех значениях $x_1, \ldots, x_n$, лежащих в некоторой области G пространства этих переменных. Относительно независимого переменного t эти функции квазипериодические с общим частотным базисом $\beta\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$. Величина α — малый параметр. Согласно предлагаемому методу исследования, наряду с уравнением (2.1) нужно рассмотреть уравнение

$$Dx = A(u_1, \ldots, u_m, x) + \alpha B(u_1, \ldots, u_m, x, \alpha) \tag{2.2}$$
$$A(t, \ldots, t, x) = f(t, x), \qquad B(t, \ldots, t, x, \alpha) = F(t, x, \alpha)$$

Функции $A_s(u_1, \ldots, u_m, x)$ и $B(u_1, \ldots, u_m, x, \alpha)$ — периодические по переменным u_k с периодами $\omega_k = 2\pi / \beta_k$. Аналогично предыдущему видим, что если уравнение (2.2) рассматривать на диагонали $u_k = t$, то получим уравнение (2.1), и если $x(x_1, \ldots, x_n)$ $(x_s = x_s(u_1, \ldots, u_m))$ — некоторое решение уравнения (2.2), то на диагонали оно порождает решение $x_s(t, \ldots, t)$ уравнения (2.1).

Обратно, через каждое решение уравнения (2.1) проходят, и притом бесконечное множество, решения уравнения (2.2).

Уравнение (2.2) эквивалентно линейному уравнению, поэтому через каждую кривую, не лежащую в плоскости $u_1 = \ldots = u_m$, проходит единственное решение уравнения (2.2). Отметим что если уравнение (2.2) имеет периодическое решение с периодами ω_k по переменным u_k, то уравнение (2.1) имеет квазипериодическое решение с частотным базисом β.

Рассмотрим уравнение

$$Dx = A(u_1, \ldots, u_m, x) \tag{2.3}$$

которое будем называть порождающим, и допустим, что это уравнение имеет периодическое решение

$$\varphi(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \qquad (\varphi_s = \varphi_s(u_1, \ldots, u_m)) \tag{2.4}$$

с периодами ω_k по переменным u_k и удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi_s\left(u_1, \frac{\omega_2}{\omega_1}u_1, \ldots, \frac{\omega_m}{\omega_1}u_1\right) = \psi_s(u_1) \quad \text{при} \quad \frac{u_1}{\omega_1} = \frac{u_2}{\omega_2} = \ldots = \frac{u_m}{\omega_m}$$

где $\psi_s(u_1)$ — периодические функции с периодом ω_1.

Будем искать условия, при которых система (2.2) допускает периодическое решение, обращающееся в порождающее решение (2.4) при $\alpha = 0$.

Обозначим через

$$x_s(u_1, \ldots, u_m, \eta_1(u_1, \alpha), \ldots, \eta_n(u_1, \alpha), \alpha)$$

решение уравнения (2.2) с начальными условиями

$$x_s\left(u_1, \frac{\omega_2}{\omega_1}u_1, \ldots, \frac{\omega_m}{\omega_1}u_1, \eta_1(u_1, \alpha), \ldots, \eta_n(u_1, \alpha), \alpha\right) = \eta_s(u_1, \alpha) \tag{2.5}$$

При этом, очевидно, имеем

$$x_s(u_1, \ldots, u_m, \psi_1(u_1), \ldots, \psi_n(u_1), 0) \equiv \varphi_s(u_1, \ldots, u_m) \tag{2.6}$$

В работе [6] показано, что для того чтобы это решение было периодическим с периодами $\omega_2, \ldots, \omega_m$ по переменным $u_2, \ldots, u_m$, необходимо и достаточно выполнять условия

$$\begin{gathered}\gamma_s(u_1, \eta_1(u_1, \alpha), \ldots, \eta_n(u_1, \alpha), \alpha) = \\ = x_s\left(u_1, \frac{\omega_2}{\omega_1}u_1 + \omega_2, \ldots, \frac{\omega_m}{\omega_1}u_1 + \omega_m, \eta_1, \ldots \eta_n, \alpha\right) - \\ - x_s\left(u_1, \frac{\omega_2}{\omega_1}u_1, \ldots, \frac{\omega_m}{\omega_1}u_1, \eta_1, \ldots, \eta_n, \alpha\right) = \\ = x_s\left(u_1, \frac{\omega_2}{\omega_1}u_1 + \omega_2, \ldots, \frac{\omega_m}{\omega_1}u_1 + \omega_m, \eta_1, \ldots, \eta_n, \alpha\right) - \eta_s(u_1, \alpha) = 0\end{gathered} \tag{2.7}$$

В силу (2.6) условия (2.7) выполняются при $\alpha = 0$, $\eta_s(u_1, 0) = \psi_s(u_1)$, так как порождающее решение будет периодическим.

Поэтому, если выполняется условие

$$\left\{\frac{\partial(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)}{\partial(\eta_1,\ldots,\eta_n)}\right\}\neq 0 \quad \text{при } \alpha=0, \quad \eta_s=\psi_s(u_1) \tag{2.8}$$

то уравнения (2.7) будут допускать, при достаточно малом α, одно и только одно решение $\eta_s(u_1, \alpha)$, для которого $\eta_s(u_1, 0)=\psi_s(u_1)$.

Подставляя это решение в функции x_s, получим периодическое относительно $u_2, \ldots, u_m$ решение уравнения (2.2), обращающееся при $\alpha=0$ в порождающее. Найдем условие, при котором искомое решение будет периодическим и относительно u_1. Пусть

$$\varphi_s\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}u_2, u_2, \frac{\omega_3}{\omega_2}u_2, \ldots, \frac{\omega_m}{\omega_2}u_2\right)=\theta_s(u_2)$$

где $\theta_s(u_2)$ — периодические функции с периодом ω_2. При этом $\theta_s(u_2)=\psi_s(u_1)$, если $\omega_2 u_1=\omega_1 u_2$. Обозначим решение уравнения (2.2) через

$$x_s(u_1, \ldots, u_m, \xi_1(u_2, \alpha), \ldots, \xi_n(u_2, \alpha), \alpha)$$

с начальными условиями

$$x_s\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}u_2, u_2, \frac{\omega_3}{\omega_2}u_2, \ldots, \frac{\omega_m}{\omega_2}u_2, \xi_1(u_2,\alpha), \ldots, \xi_n(u_2,\alpha), \alpha\right)=\xi_s(u_2, \alpha)$$

При этом

$$x_s(u_1, \ldots, u_m, \theta_1(u_2), \ldots, \theta_n(u_2), 0)\equiv\varphi_s(u_1, \ldots, u_m)$$

Для того чтобы решение x_s было периодическим с периодами $\omega_1, \omega_3, \ldots, \omega_m$ по переменным $u_1, u_3, \ldots, u_m$, так же как и выше, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned}\delta_s(u_2, \xi_1(u_2, \alpha), \ldots, \xi_n(u_2, \alpha), \alpha) &= \\ = x_s\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}u_2+\omega_1, u_2, \frac{\omega_3}{\omega_2}u_2+\omega_3, \ldots, \frac{\omega_m}{\omega_2}u_2+\omega_m, \xi_1, \ldots, \xi_n, \alpha\right) &- \\ -\xi_s(u_2, \alpha) &= 0\end{aligned} \tag{2.9}$$

Условия (2.9) выполняются при $\alpha=0$, $\xi_s(u_2, 0)=\theta_s(u_2)$. Поэтому если

$$\left\{\frac{\partial(\delta_1,\ldots,\delta_n)}{\partial(\xi_1,\ldots,\xi_n)}\right\}\neq 0 \quad \text{при } \alpha=0, \quad \xi_s=\theta_s(u_2) \tag{2.10}$$

то уравнения (2.9) будут допускать при достаточно малом α одно и только одно решение $\xi_s(u_2, \alpha)$, для которого $\xi_s(u_2, 0)=\theta_s(u_2)$. Подставляя это решение в функции x_s, получим периодическое относительно $u_1, u_3, \ldots, u_m$ решение уравнения (2.2), обращающееся при $\alpha=0$ в порождающее.

Но решения $x_s(u_1, \ldots, u_m, \eta_1, \ldots, \eta_n, \alpha)$ и $x_s(u_1, \ldots, u_m, \xi_1, \ldots, \xi_n, \alpha)$ уравнения (2.2), совпадающие при $u_1/\omega_1=u_2/\omega_2=\ldots=u_m/\omega_m$, совпадают в силу единственности и при других значениях $u_1, \ldots, u_m$. Тем самым, при одновременном выполнении условий (2.8) и (2.10) решение $x_s(u_1, \ldots, u_m, \eta_1, \ldots, \eta_n, \alpha)$ уравнения (2.2) будет периодическим по всем переменным $u_1, \ldots, u_m$ и функции $\eta_s(u_1, \alpha)$ периодические по u_1 при $\alpha=0$ будут периодическими и при достаточно малых α, т. е. справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. Если выполняются условия (2.8) и (2.10), то уравнение (2.2) при достаточно малом значении α имеет одно и только одно периодическое решение, обращающееся в порождающее при $\alpha = 0$.

Вдоль диагонали $u_k = t$ функции (2.4), т. е. $\varphi_s(t, \ldots, t)$ представляют решение уравнения

$$dx / dt = f(t, x) \qquad (2.11)$$

Тем самым приходим к следующему результату:

Теорема 2.2. Если уравнение (2.11) имеет квазипериодическое решение $x_s = \varphi_s(t, \ldots, t)$ и при этом определители

$$\left\{\frac{\partial(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)}{\partial(\eta_1, \ldots, \eta_n)}\right\}_{\alpha=0,\ \eta_s=\psi_s(t)}, \qquad \left\{\frac{\partial(\delta_1, \ldots, \delta_n)}{\partial(\xi_1, \ldots, \xi_n)}\right\}_{\alpha=0,\ \xi_s=\theta_s(t)}$$

отличны от нуля, то уравнение (2.1) имеет квазипериодическое решение, обращающееся в порождающее при $\alpha = 0$.

2. Допустим, что порождающее уравнение (2.3) допускает семейство периодических решений

$$\varphi_s(u_1, \ldots, u_m, h(u_2 - u_1, \ldots, u_m - u_1)) \qquad (s = 1, \ldots, n) \qquad (2.12)$$

зависящих от произвольной периодической, с периодами $\omega_k - \omega_1$ функции h, и что рассматриваемое порождающее решение принадлежит к этому семейству и соответствует функции $h = h^*$. Обозначим, как и выше, через $x_s(u_1, \ldots, u_m, \eta_1(u_1, \alpha), \ldots, \eta_n(u_1, \alpha), \alpha)$ решение уравнения (2.2) с начальными условиями (2.5). Тогда, так же как и раньше, условия периодичности этого решения относительно $u_2, \ldots, u_m$ будут иметь вид (2.7). Эти условия будут удовлетворяться для порождающего решения, т. е. при

$$\alpha = 0, \qquad \eta_s(u_1, 0) = \varphi_s\left(u_1, \frac{\omega_2}{\omega_1}u_1, \ldots, \frac{\omega_m}{\omega_1}u_1, \mu^*\right)$$

$$\left(\mu^* = h^*\left[\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)u_1, \ldots, \left(\frac{\omega_m}{\omega_1} - 1\right)u_1\right]\right)$$

Но в отличие от предыдущего случая условия (2.7) будут также удовлетворяться и при

$$\alpha = 0, \qquad \eta_s(u_1, 0) = \varphi_s\left(u_1, \frac{\omega_2}{\omega_1}u_1, \ldots, \frac{\omega_m}{\omega_1}u_1, \mu\right)$$

$$\left(\mu = h\left[\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)u_1, \ldots, \left(\frac{\omega_m}{\omega_1} - 1\right)u_1\right]\right)$$

так как все решения (2.12) порождающего уравнения (2.3) являются периодическими. Другими словами, уравнения (2.7) имеют при $\alpha = 0$ не одно решение, как это было раньше, а семейство решений

$$\eta_s(u_1, 0) = \varphi_s\left(u_1, \frac{\omega_2}{\omega_1}u_1, \ldots, \frac{\omega_m}{\omega_1}u_1, \mu\right)$$

зависящее от произвольной функции $\mu(u_1)$. Вследствие этого функциональный определитель

$$\left\{\frac{\partial(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)}{\partial(\eta_1, \ldots, \eta_n)}\right\} \quad \text{при } \alpha = 0,\ \eta_s = \varphi_s\left(u_1, \frac{\omega_2}{\omega_1}u_1, \ldots, \frac{\omega_m}{\omega_1}u_1, \mu^*\right)$$

необходимо обращается в нуль.

Поэтому периодическое решение (2.4) уравнения (2.3) будем называть изолированным, если определитель (2.8) отличен от нуля.

Соответствующее квазипериодическое решение $\varphi_s(t, \ldots, t)$ уравнения (2.11) также будем в этом случае называть изолированным.

Таким образом, теорема 2.2 приобретает следующую формулировку:

Для всякого изолированного порождающего квазипериодического решения система (2.1) при достаточно малом α допускает одно и только одно квазипериодическое решение, обращающееся в это порождающее при $\alpha = 0$.

Следовательно, в случае изолированного порождающего решения существует полное соответствие между системой (2.1) и упрощенной (2.11).

Чтобы выяснить вопрос о существовании периодического решения уравнения (2.2), в случае семейства периодических решений (2.12) исключим из уравнений (2.7) какие-нибудь $n-1$ величин $\eta_1, \ldots, \eta_n$. Это всегда можно сделать, когда хотя бы один из миноров $n-1$-го порядка определителя (2.8) отличен от нуля, что и будем предполагать.

Допустим для определенности, что

$$\left\{\frac{\partial(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1})}{\partial(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})}\right\} \neq 0 \quad \text{при } \alpha = 0,\ \eta_s = \varphi_s\left(u_1, \frac{\omega_2}{\omega_1}u_1, \ldots, \frac{\omega_m}{\omega_1}u_1, \mu^*\right)$$

При этом условии первые $n-1$ уравнений (2.7) имеют решение для $\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$, в котором эти величины являются функциями от u_1, α и η_n, обращающимися в

$$\varphi_1\left(u_1, \frac{\omega_2}{\omega_1}u_1, \ldots, \frac{\omega_m}{\omega_1}u_1, \mu^*\right), \ldots, \varphi_{n-1}\left(u_1, \frac{\omega_2}{\omega_1}u_1, \ldots, \frac{\omega_m}{\omega_1}u_1, \mu^*\right)$$

при

$$\alpha = 0, \quad \eta_n = \varphi_n\left(u_1, \frac{\omega_2}{\omega_1}u_1, \ldots, \frac{\omega_m}{\omega_1}u_1, \mu^*\right)$$

Подставляя эти величины в последнее уравнение (2.7), получим для определения $\eta_n(u_1, \alpha)$ одно уравнение, которое можно представить в виде

$$\Phi = M(\eta_n) + \alpha N(\eta_n, \alpha) = 0 \tag{2.13}$$

Так как система (2.7) имеет при $\alpha = 0$ решение

$$\eta_s(u_1, 0) = \varphi_s\left(u_1, \frac{\omega_2}{\omega_1}u_1, \ldots, \frac{\omega_m}{\omega_1}u_1, \mu\right) \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

зависящее от произвольной функции $\mu(u_1)$, то и уравнение (2.13) должно при том же условии иметь решение для η_n, зависящее от произвольной функции $\mu(u_1)$, что возможно лишь только в том случае, когда функция M обращается тождественно в нуль. Таким образом, уравнение (2.13) по сокращении на α принимает вид

$$N(\eta_n, \alpha) = 0 \tag{2.14}$$

Для существования искомого периодического решения необходимо и достаточно, чтобы уравнение (2.14) допускало решение относительно η_n, в котором эта величина обращалась бы в

$$\varphi_n\left(u_1, \frac{\omega_2}{\omega_1}u_1, \ldots, \frac{\omega_m}{\omega_1}u_1, \mu^*\right) \text{ при } \alpha = 0$$

Для этого необходимо, прежде всего, чтобы выполнялось соотношение

$$P(\mu^*) = N\left(\varphi_n\left(u_1, \frac{\omega_2}{\omega_1}u_1, \ldots, \frac{\omega_m}{\omega_1}u_1, \mu^*\right), 0\right) = 0 \qquad (2.15)$$

Таким образом, получено необходимое условие, которому должна удовлетворять функция $\mu^*(u_1)$ порождающего решения, чтобы ему соответствовало периодическое решение полной системы (2.2). Если при выполнении условия (2.15) будет также выполняться и условие

$$\left\{\frac{\partial N}{\partial \eta_n}\right\} \neq 0 \quad \text{при } \alpha = 0, \qquad \eta_n = \varphi_n\left(u_1, \frac{\omega_2}{\omega_1}u_1, \ldots, \frac{\omega_m}{\omega_1}u_1, \mu^*\right)$$

то уравнение (2.15) будет действительно допускать решение, единственное для η_n нужного вида, и тогда, как указано выше, будет существовать и искомое периодическое решение уравнения (2.2).

Заметим, что если известна функция $\mu^*(u_1)$, то функция $h^*(u_2 - u_1, \ldots, u_m - u_1)$ определяется единственным образом, так как $Dh^* = 0$. Вдоль диагонали $u_k = t$ функции (2.12), т. е.

$$\varphi_s(t, \ldots, t, l) \qquad (2.16)$$

представляют семейство квазипериодических решений уравнения (2.11), зависящих от произвольного параметра l. Тем самым получаем:

Теорема 2.3. Из бесчисленного множества порождающих квазипериодических решений семейства (2.16) уравнения (2.11) только тем могут действительно отвечать квазипериодические решения основной системы (2.1), для которых параметр l^* принимает определенные численные значения.

Метод, примененный при исследовании уравнения (2.1), может быть использован и при исследовании автономных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \alpha F(x, \alpha)$$

Применение этого метода исследования показывает, что теория малого параметра Пуанкаре для периодических решений [7] без существенных изменений переносится и на квазипериодический случай.

Поступила 8 IX 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Левитан Б. М. Почти-периодические функции. Гостехиздат, 1953.
2. Харасахал В. Х. Об одном методе исследования линейных систем дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами. ДАН СССР, 1961, т. 139, № 2.
3. Харасахал В. Х. О структуре решений и правильности линейных систем дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами. ДАН СССР, 1962, т. 146, № 6.
4. Харасахал В. Х. О почти-периодических решениях дифференциальных уравнений. Тр. Казахск. ун-та, Механ.-матем. фак., 1960, т. 1, II.
5. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехтеоретиздат, 1949.
6. Умбетжанов Д. У., Харасахал В. Х. О применении метода малого параметра в квазипериодических колебаниях нелинейных систем. Тр. Казахск. ун-та, Механ.-матем. фак., 1960, т. I, II.
7. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1956.