

**ТЕОРЕМА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА
С РАЗРЫВНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ**

Е. А. Барбашин, В. А. Табуева

(Свердловск)

Изучаются вопросы устойчивости решений некоторого дифференциального уравнения третьего порядка, имеющего разрывную характеристику. В общем случае исследуемое уравнение описывает определенный класс нелинейных следящих систем регулирования. Устойчивость решений достигается путем увеличения параметра K (передаточного коэффициента). Показано, что при достаточно большом значении K всякий режим такой системы переходит с некоторого момента времени в скользящий. При этом динамическая ошибка системы становится меньше заданного числа. В линейном случае данная задача решена в работах [1,2].

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + F(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) + Kx \operatorname{sign} [x(\ddot{x} - \varphi(x, \dot{x}))] = 0 \quad (1.1)$$

где K — положительная постоянная величина, функция $F(x, \dot{x}, \ddot{x}, t)$ непрерывна по всем своим аргументам в области

$$|x| < \infty, \quad |\dot{x}| < \infty, \quad |\ddot{x}| < \infty, \quad 0 \leq t < \infty$$

ограничена по t при фиксированных значениях x, \dot{x}, \ddot{x} , имеет непрерывные частные производные первого порядка по аргументам x, \dot{x}, \ddot{x}, t ; функция $\varphi(x, \dot{x})$ непрерывна и имеет кусочно-непрерывные частные производные первого и второго порядка по \dot{x}, x в области

$$|x| < \infty, \quad |\dot{x}| < \infty$$

Уравнение (1.1) эквивалентно системе дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = -F(x, y, z, t) - Kx \operatorname{sign} [x(z - \varphi(x, y))] \quad (1.2)$$

Наложим следующие ограничения на функции $\varphi(x, y)$ и $F(x, y, z, t)$:

$$(a) \quad |\rho^2 F(x, y/\rho, z/\rho^2, t\rho)| < A(x, y, z), \quad |\rho\varphi(x, y/\rho)| < B(x, y)$$

для достаточно малых значений параметра ρ ; здесь $A(x, y, z)$ и $B(x, y)$ предполагаются непрерывными функциями своих аргументов

$$(b) \quad \begin{aligned} \varphi(0, 0) = 0, \quad \varphi(x, 0) x < 0 \quad \text{при } x \neq 0, \\ [\varphi(x, y) - \varphi(x, 0)] y < 0 \quad \text{при } y \neq 0, \end{aligned} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, 0) dx = \infty$$

Заметим, что условие (a) удовлетворяется в случае, когда функция $F(x, y, z, t)$ линейна относительно x, y, z и ограничена по t для $0 \leq t < \infty$. Любая линейная функция $\varphi(x, y) = cx + dy$, где c и d — постоянные, также удовлетворяет условию (a); кроме того, она будет удовлетворять и условию (b), если положить $c < 0$ и $d < 0$.

В общем случае уравнение (1.1) описывает систему регулирования нелинейного объекта, обрабатывающего входное воздействие произвольного вида. Для линейного случая это уравнение рассматривалось в работах [1, 2], где изучалась система регулирования третьего порядка с переменной структурой. Теория подобных систем развита также в работах [3, 4]. Сформулируем основной результат работы.

Теорема. Пусть выполнены условия (а) и (б) и пусть задано положительное число ε . Тогда для заданной ограниченной области G фазового пространства можно указать такое положительное число K_0 , что при $K \geq K_0$ любое решение системы (1.2), определяемое начальными данными из области G , будет удовлетворять с некоторого момента времени условиям

$$|x(t)| < \varepsilon, \quad |y(t)| < \varepsilon, \quad |z(t)| < \varepsilon$$

Примечание 1. К системам типа (1.2) приводят некоторые задачи об отыскании оптимального управления. В самом деле, рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = -F(x, y, z, t) - Ku(t)x \quad (1.3)$$

и попытаемся найти функцию $u(t)$ таким образом, чтобы при $|u(t)| \leq 1$ некоторая функция $v(x, y, z)$ имела бы в силу системы (1.3) наибольшую скорость убывания [5]. Нетрудно видеть, что функция $u(t)$ должна в этом случае иметь вид $u(t) = \text{sign}(x \partial v / \partial z)$, а это и приводит при некоторых дополнительных предположениях к системе (1.2). Если искать функцию $u(t)$, исходя из условия минимума некоторого функционала, то, пользуясь принципом максимума Л. С. Понтрягина, снова приходим к системе типа (1.2).

Примечание 2. В общем случае система (1.2) является системой дифференциальных уравнений, у которой правая часть третьего уравнения терпит разрыв на поверхности $z = \varphi(x, y)$. Теория систем с разрывными правыми частями в настоящее время хорошо разработана [6-8].

Плоскость $x = 0$ является плоскостью «переключения» в том смысле, что величина $n = \text{sign}[x(z - \varphi(x, y))]$, входящая в уравнение системы (1.2), меняет на ней знак. Однако эта плоскость, как легко видеть, не будет плоскостью разрыва, траектории системы (1.2) «прошивают» плоскость $x = 0$. Другая картина имеет место на поверхности (S) , заданной уравнением $z = \varphi(x, y)$.

Введем обозначение $R = z - \varphi(x, y)$. Тогда можем найти в каждой точке $M(x, y, \varphi(x, y))$ поверхности (S) для фиксированного момента времени величины

$$N_1 = \lim_{R \rightarrow +0} dR / dt, \quad N_2 = \lim_{R \rightarrow -0} dR / dt$$

где dR / dt вычисляется в силу системы (1.2). Если при этом будем иметь $N_1 N_2 > 0$, то данная точка поверхности (S) окажется точкой «прошивания», т. е. траектория системы (1.2) пересечет поверхность (S) в точке M и перейдет из одной части фазового пространства по отношению к поверхности (S) в другую его часть. Если же $N_1 < 0$ и $N_2 > 0$, то будем иметь более интересный случай расположения траекторий системы (1.2) — случай «скольжения». В этом случае векторы систем, действующих по обе стороны поверхности (S) , направлены к самой поверхности. Следовательно, точка фазового пространства, попав на поверхность (S) , должна оставаться на ней до тех пор, пока выполняются указанные выше неравенства относительно N_1 и N_2 . Чтобы найти вектор скорости скольжения точки по поверхности (S) , обычно пользуются следующим правилом [6]. Из данной точки поверхности выводят векторы скорости, определяемые системами, действующими как с одной, так и с другой стороны поверхности. Концы построенных векторов соединяют прямой линией. Точка пересечения этой прямой линии с касательной плоскостью, проведенной к поверхности в данной точке, принимается за

конец вектора скольжения точки по поверхности (S). Исходя из этого правила и приписывая точке $(x, y, \varphi(x, y))$ поверхности (S) координаты (x, y) , легко получим в областях скольжения этой поверхности систему уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \varphi(x, y) \quad (1.4)$$

описывающую режим скольжения.

Заметим, что режим скольжения, описываемый системой (1.4), не зависит от вида функции $F(x, y, z, t)$. Это соображение является существенным, если принять во внимание, что, увеличивая значение K , любую точку поверхности (S) с отличной от нуля абсциссой можно сделать точкой скольжения системы (1.2).

Если каким-либо образом возможно добиться, чтобы точки фазового пространства системы попадали на поверхность (S), а затем, находясь в режиме скольжения, двигались бы в окрестность нулевой точки, то получим в некотором смысле свойство устойчивости решений изучаемой системы (1.2); причем это свойство явится грубым по отношению к изменению функции $F(x, y, z, t)$, ненарушающему существование режима скольжения.

2. Доказательство теоремы. Покажем сначала, что любая точка из области G — области возможных начальных положений, двигаясь в силу уравнений системы (1.2), попадает в некоторый момент времени на поверхность (S). Для этого в системе проведем замену переменных

$$t = \rho\tau, \quad X = x, \quad Y = \rho y, \quad Z = \rho^2 z \quad (\rho = K^{-1/3}) \quad (2.1)$$

Новая система запишется в виде

$$\frac{dX}{d\tau} = Y, \quad \frac{dY}{d\tau} = Z, \quad \frac{dZ}{d\tau} = -nX - \rho^3 F(X, Y/\rho, Z/\rho^2, \rho\tau) \quad (2.2)$$

$$n = \text{sign} [X(Z - \rho^2 \varphi(X, Y/\rho))]$$

Величина ρ играет роль малого параметра.

Наряду с системой (2.2), эквивалентной системе дифференциальных уравнений (1.2), рассмотрим упрощенную систему

$$\frac{dX}{d\tau} = Y, \quad \frac{dY}{d\tau} = Z, \quad \frac{dZ}{d\tau} = -nX \quad (2.3)$$

Покажем сначала, что точка $M(t)$, двигаясь по траектории этой системы, попадает на поверхность (S). Обозначим через G_ρ образ области G при преобразовании (2.1).

Введем обозначение $Q = Z - \rho^2 \varphi(X, Y/\rho)$ и разобьем область G_ρ на четыре подобласти G_1, G_2, G_3, G_4 , определяя их следующими неравенствами:

$$\begin{array}{llll} Q > 0, & X > 0 & (G_1), & Q < 0, & X < 0 & (G_3) \\ Q > 0, & X < 0 & (G_2), & Q < 0, & X > 0 & (G_4) \end{array}$$

Предположим, что начальная точка $M_0(X_0, Y_0, Z_0)$ траектории лежит в области G_2 . Легко видеть, что решение системы (2.3) в области G_2 можно записать в виде

$$X = ce^\tau + \varphi_1(\tau), \quad Y = ce^\tau + \varphi_2(\tau), \quad Z = ce^\tau + \varphi_3(\tau)$$

$$c = 1/3 (X_0 + Y_0 + Z_0)$$

Функции $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$ и $\varphi_3(\tau)$ стремятся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. Если координаты точки M_0 удовлетворяют условию $X_0 + Y_0 + Z_0 > 0$, то с ростом τ отрицательная абсцисса точки $M(\tau)$ неизбежно сменит свой знак. Следовательно, если точка $M(\tau)$ не попадет на поверхность (S), то обязательно попадает на плоскость $X = 0$, причем в этом случае для нее будем иметь $Y > 0$. Если же $X_0 + Y_0 + Z_0 < 0$, то для траектории, выходящей из точки M_0 , имеем

$$Q(\tau) = 1/3 (X_0 + Y_0 + Z_0) e^\tau + \varphi_3(\tau) - \rho^2 \varphi(X(\tau), Y(\tau)/\rho)$$

Пусть точка $M(\tau)$ при этом не выходит из области G_2 . Тогда ее абсцисса удовлетворяет неравенству $X(\tau) < 0$ для всех τ , а также с ростом τ будем иметь $Y(\tau) < 0$

Но из условия (б) следует в этом случае справедливость неравенства $\varphi(X(\tau), Y(\tau)/\rho) > 0$, а это означает, что положительная в области G_2 величина $Q(\tau)$ с ростом τ должна стать нулем, т. е. изображающая точка системы (2.3) должна попасть с ростом τ на поверхность (S). Если же допустить, что при выполнении неравенства $X_0 + Y_0 + Z_0 < 0$ для начальной точки M_0 траектории изображающая точка $M(\tau)$ покидает область G_2 , то сразу видно, что точка $M(\tau)$ может попасть на плоскость $X = 0$ только между линиями $Y + Z = 0$ и $Z = \varphi(0, Y/\rho)$. Из условия (б) следует, что линия $Z = \varphi(0, Y/\rho)$ при $Z > 0$ расположена в области $Y < 0$.

Поэтому, если точка $M(\tau)$ выходит из области G_2 , то при попадании ее на плоскость $X = 0$ будем иметь $Y < 0$. Это и приводит к противоречию, так как из неравенства $dX/d\tau = Y < 0$ следует невозможность возрастания X в момент пересечения точкой $M(\tau)$ плоскости $X = 0$ при переходе из области G_2 , где $X < 0$, в область G_1 , где $X > 0$.

Итак, если начальная точка M_0 траектории расположена в области G_2 , то при значении ρ достаточно малом изображающая точка $M(\tau)$ системы (2.3) с ростом τ либо попадает на поверхность (S), либо выходит в область G_1 , пересекая при этом плоскость $X = 0$ в той ее части, где $Y > 0$.

Пусть теперь начальная точка M_0 лежит в области G_1 . До тех пор, пока изображающая точка $M(\tau)$ системы (2.3) не выйдет из области G_1 , имеем

$$X(\tau) = c_1 e^{-\tau} + e^{1/2 \tau} [c_2 \cos(1/2 \sqrt{3} \tau) + c_3 \sin(1/2 \sqrt{3} \tau)] \quad (2.4)$$

Здесь c_1, c_2, c_3 — некоторые постоянные, причем $c_1 = 1/3 (X_0 - Y_0 + Z_0)$.

Представляется две возможности: либо точка $M(\tau)$ попадает в конечный момент времени τ на поверхность (S), либо при движении точки ее абсцисса $X(\tau)$ изменит свой знак, т. е. точка $M(\tau)$ попадет на плоскость $X = 0$. Исключение составляют лишь точки, лежащие на интегральной прямой $X = -Y = Z$, они с ростом τ приближаются к началу координат асимптотически.

Точки, вышедшие из области G_1 в область G_2 через плоскость $X = 0$, либо попадут там на поверхность (S), либо снова вернуться в область G_1 через полуплоскость $X = 0, Y > 0$. Покажем, что после возвращения в область G_1 точка $M(\tau)$ попадет на поверхность (S), не покидая G_1 . Для этого рассмотрим одну из таких точек с координатами $X_0 = 0, Y_0 > 0, Z_0 \geq 0$ и допустим, что функция $X(\tau)$, заданная соотношением (2.4), обращается первый раз в нуль при $\tau = \tau_1$. По теореме Ролля функция $Y = dX/d\tau$ обратится в нуль на интервале $(0, \tau_1)$ по крайней мере один раз; пусть первое такое обращение в нуль произойдет при $\tau = \tau_2 \leq \tau_1$. Так как $Z(0) = Z_0 \geq 0$, то в точке $\tau = 0$ функция $Y(\tau)$ растет и поэтому к ней снова можно применить теорему Ролля, в силу которой найдется число τ_3 такое, что $0 < \tau_3 \leq \tau_2$ и $Z(\tau_3) = 0$; но это означает, что на интервале $(0, \tau_1)$ имеются точки, в которых функция $Z(\tau)$ принимает отрицательное значение. Следовательно, величина $Q = Z - \rho^2 \varphi(X, Y/\rho)$ при достаточно малом значении ρ должна обратиться в нуль по крайней мере один раз, ранее, чем точка $M(\tau)$ попадет вновь на плоскость $X = 0$.

Рассмотрим, наконец, начальную точку M_0 из области G_1 , координаты которой удовлетворяют условиям $X_0 = 0, Y_0 > 0, Z_0 < 0$. Легко видеть, что такая точка расположена между интегральной плоскостью $X - Y + Z = 0$ системы (2.3) при $n = 1$ и поверхностью (S). Так как эти поверхности пересекают плоскость $X = 0$ по линиям $Z = Y$ и $Z = \rho^2 \varphi(0, Y/\rho)$, то, очевидно, точка $M(\tau)$ не сможет попасть в область $X = 0, Y < 0$, не понав предварительно на поверхность (S).

Итак, если начальная точка M_0 принадлежит области G_1 , то при значении ρ достаточно малом изображающая точка $M(\tau)$ системы (2.3) с ростом τ или сразу попадает на поверхность (S), или уходит в область G_2 и там попадает на поверхность (S), или же уходит в область G_2 и из нее вновь возвращается в область G_1 и попадает здесь на поверхность (S).

Совершенно аналогичные рассуждения могут быть проведены для начальных точек, лежащих в областях G_3 и G_4 .

Таким образом, доказано, что при значении ρ достаточно малом точка $M(\tau)$, лежащая в области G_ρ , двигаясь в силу уравнений упрощенной системы (2.3), либо попадает на поверхность (S) в конечный момент времени τ , либо асимптотически приближается к началу координат в случае, когда точка $M(\tau)$ принадлежит прямой $X = -Y = Z$. В силу теоремы о непрерывной зависимости решений от параметра аналогичный вывод делаем для системы (2.2), а значит и для изучаемой системы (1.2). Иначе говоря доказано, что при значении K достаточно большом точка $M(t)$, лежащая в области G возможных начальных условий, двигаясь под действием уравнений системы (1.2), попадает на поверхность переключения (S) с ростом t .

Далее перейдем ко второй части доказательства теоремы — изучим поведение изображающей точки $M(t)$, попавшей под действием уравнений системы (1.2) на поверхность переключения (S) . Для этого перейдем к новой системе координат, где x и y остаются прежними и вводится координата $R = z - \varphi(x, y)$. Тогда система (1.2) преобразуется в эквивалентную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, & \dot{y} &= R + \varphi(x, y), & \dot{R} &= -\varphi_y'(x, y)R - \\ & & & & & - F(x, y, R + \varphi(x, y), t) - Knx - \varphi_x'(x, y)y - \varphi_y'(x, y)\varphi(x, y) \\ & & & & & (n = \text{sign } xR) \end{aligned} \quad (2.5)$$

При таком преобразовании координат поверхность переключения $z = \varphi(x, y)$ переходит в плоскость переключения $R = 0$. Поэтому, исследовав судьбу изображающей точки, попавшей под действием уравнений (2.5) на плоскость $R = 0$, сможем сделать соответствующие выводы о поведении изображающей точки системы (1.2) на поверхности (S) .

На плоскости $R = 0$ величина \dot{R} запишется в виде

$$\dot{R} = -Knx - \Phi(x, y, t) \quad (2.6)$$

где введено обозначение

$$\Phi(x, y, t) = F[x, y, \varphi(x, y), t] + \varphi_x'(x, y)y + \varphi_y'(x, y)\varphi(x, y) \quad (2.7)$$

Обозначим через D область плоскости $R = 0$, порожденную концами дуг траекторий, выходящих из области G . Из предыдущей части доказательства следует, что область D является при $K \rightarrow \infty$ равномерно ограниченной областью. В самом деле, преобразование (2.1) переводит область G в область G_ρ , причем легко видеть, что при $\rho_1 > \rho_2$ будем иметь $G_{\rho_1} > G_{\rho_2}$. Точки областей G_{ρ_1} и G_{ρ_2} , двигаясь по траекториям системы (2.3), перейдут в точки областей D_{ρ_1} и D_{ρ_2} , лежащие на плоскости $R = 0$, причем $D_{\rho_1} \supset D_{\rho_2}$. В силу теоремы о непрерывной зависимости решений от параметра, можем сделать вывод об ограниченности области, состоящей из точек поверхности (S) , пришедших из области G_ρ по траекториям системы (2.2). Возвращаясь к старым координатам, получаем ограниченность области D при $\rho \rightarrow 0$.

В силу сформулированных выше предположений относительно функций $F(x, y, z, t)$ и $\varphi(x, y)$ будем иметь в области D соотношение

$$|\Phi(x, y, t)| < m \quad (2.8)$$

Из равенства (2.6) легко видеть, что прямые $x = \Delta x$ и $x = -\Delta x$, где $\Delta x = m/K$, выделяют на плоскости $R = 0$ полосу $|x| \leq \Delta x$, вне которой знак производной \dot{R} для системы (2.5) определен соотношением $\text{sign } \dot{R} = -n \text{sign } x$. Анализ этой формулы показывает, что точки плоскости $R = 0$, расположенные вне указанной полосы, являются точками скольжения системы (2.5). Движение изображающей точки на этой части плоскости $R = 0$ (вне полосы $|x| \leq \Delta x$) определяется предельным дифференциальным уравнением $\dot{x} = \varphi(x, x)$, которое эквивалентно системе уравнений (1.4).

Внутри полосы $|x| \leq \Delta x$ плоскости $R = 0$ знак производной \dot{R} не определен. Полоса содержит области «прошиваемости», ограниченные кривыми

$$\Phi(x, y, t) + Knx = 0 \quad (2.9)$$

где траектории системы (2.5) с ростом времени пересекают плоскость $R = 0$.

Таким образом, изображающая точка $M(t)$ системы (2.5), попав на плоскость $R = 0$, движется по ней в силу уравнений системы (1.4) до тех пор, пока не попадает в момент времени $t = t_0 > 0$ на границу области «прошиваемости», т. е. на одну из кривых (2.9), в некоторой точке $M_0(x_0, y_0)$. Сам факт попадания обуславливается устойчивостью в целом нулевого решения системы (1.4). Эта устойчивость вытекает из выполнения условий (б) для функции $\varphi(x, y)$ [9].

Затем с ростом t изображающая точка $M(t)$ сойдет с плоскости $R = 0$ и начнет двигаться под действием уравнений системы (2.5) либо в полупространстве $R > 0$ (при $n = -1$), либо в полупространстве $R < 0$ (при $n = 1$). Покажем, что при достаточно большом значении K точка $M(t)$ системы (2.5), побывав некоторое достаточно малое время вне плоскости $R = 0$, вновь вернется на нее в точке, расположенной достаточно близко к оси y .

Пусть для определенности точка M_0 расположена во втором квадранте плоскости $R = 0$, т. е. для ее координат выполняются соотношения $-\Delta x \leq x_0 < 0$, $y_0 > 0$ (см. фигуру). Кроме того, предположим, что выполняется также соотношение

$$y_0 \gg \Delta x \tag{2.10}$$

Пользуясь уравнениями

$$y \, dy / dx = R + \varphi(x, y)$$

$$y \, dR / dx = -\varphi'_y R - F(x, y, R + \varphi(x, y), t) - Knx - \varphi'_x y - \varphi'_y \varphi \tag{2.11}$$

полученными из дифференциальных уравнений системы (2.5), найдем приближенное решение $y(x)$ и $R(x)$ системы (2.11), соответствующее траектории изображающей точки $M(t)$ с начальной точкой $M_0(x_0, y_0) = M(t_0)$. Так как для точки M_0 по предположению имеем $y_0 > 0$, то с ростом времени $t > t_0$ изображающая точка, сойдя с плоскости $R = 0$, движется в сторону возрастания x , т. е. по направлению к плоскости $x = 0$. С другой стороны, поскольку $|x_0| \leq \Delta x$, а величина $\Delta x = m / K$ может быть сделана за счет увеличения значения K сколь угодно малой, то искомое решение будем рассматривать на интервале $[x_0, 0]$, а для нахождения соответствующего решения ограничимся его первым приближением

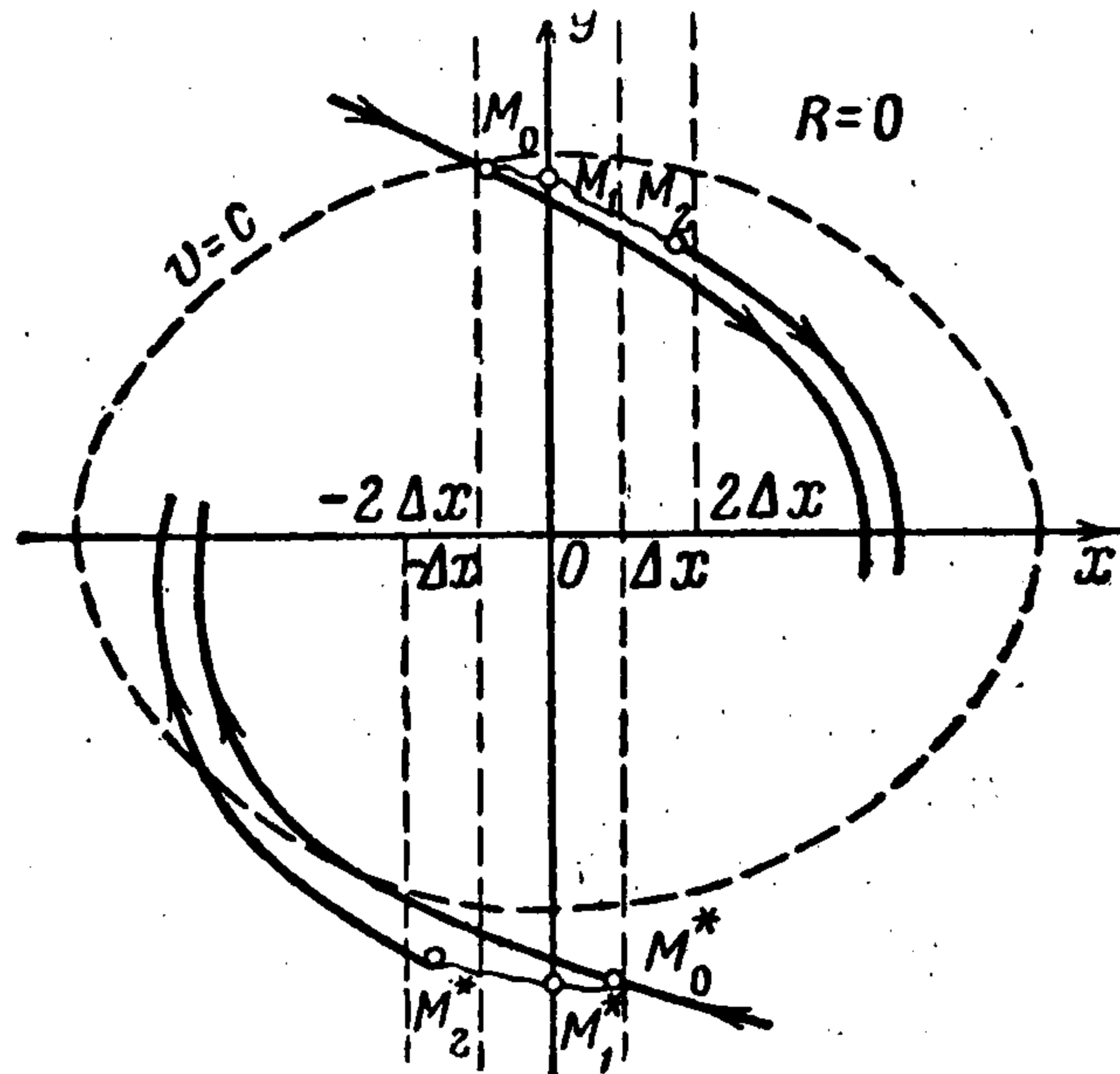
$$y(x) = y_0 + \varphi(x_0, y_0) / y_0 (x - x_0), \quad R(x) = -Kn x_0 - \Phi(x_0, y_0, t_0) / y_0 (x - x_0)$$

Полученные формулы позволяют найти приближенное значение координат точки $M_1(x_1, y_1, R_1)$ — точки, в которой траектория пересекает при некотором значении $t = t_1 > t_0$ плоскость $x = 0$; а именно, получим равенства

$$x_1 = 0, \quad y_1 = y_0 - \varphi(x_0, y_0) x_0 / y_0 \approx y_0, \quad R_1 \approx 0$$

справедливые при достаточно больших значениях K , когда можно пренебречь слагаемыми одного порядка малости с величиной Δx .

Из точки M_1 изображающая точка $M(t)$ движется с ростом времени $t > t_1$ в полупространстве $x > 0$ до тех пор, пока ордината точки остается положительной. Так как ордината точки M_1 вследствие выполнения соотношения (2.10) снова положительна, то с ростом времени t изображающая точка $M(t)$ из точки M_1 движется в сторону возрастания $x(t)$ по крайней мере для значений x положительных, достаточно малых, сравнимых по величине с числом Δx . Найдем решение $R(x)$ системы (2.11), соответствующее выходящей из точки M_1 траектории, в виде степенного ряда по степеням x , пренебрегая степенями x , начиная с x^3 .



При этом примем во внимание ограниченность функций $F(x, y, z, t)$, $\varphi(x, y)$ и их производных, а также считаем значение K достаточно большим.

Тогда будем иметь

$$R(x) = -\Phi(0, y_0, t_1) x / y_0 - Kn x^2 / 2y_0 \quad (2.12)$$

откуда найдем значение x , при котором функция $R(x)$ обращается в нуль. Тем самым найдем значение абсциссы точки $M_2 = M(t_2)$ — точки возвращения при $t = t_2 > t_1$ изображающей точки на плоскость $R = 0$. Очевидно, для абсциссы точки M_2 получим

$$x_2 = -2\Phi(0, y_0, t_1) / Kn$$

Принимая во внимание условие (2.8), получим соотношение $|x_2| \leq 2\Delta x$. Причем для рассматриваемой траектории, очевидно, $x_2 > 0$, так как значение ординаты точки M_2 отличается от значения ординаты начальной точки M_0 траектории на величину одного порядка малости с величиной Δx , т. е. на интервале $[-\Delta x, 2\Delta x]$ знак ординаты точки $M(t)$ в нашем случае остается положительным.

Таким образом, показано, что при достаточно большом значении K изображающая точка $M(t)$ системы (2.5), сойдя с плоскости $R = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, для координат которой справедливы соотношения $|x_0| \leq \Delta x$, $y_0 \gg \Delta x$, вновь возвращается на плоскость $R = 0$ в точке $M_2(x_2, y_2)$, ордината которой по-прежнему положительна и сравнима по величине с числом y_0 , а абсцисса не превосходит числа $2\Delta x$ (фиг. 1). Разность абсцисс точек M_0 и M_2 не больше $3\Delta x$, поэтому время перехода изображающей точки из точки M_0 в точку M_2 при достаточно большом значении K будет малым.

Аналогичные рассуждения могут быть проведены для траектории системы (2.5), сходящей с плоскости $R = 0$ в некоторой точке $M_0^*(x_0^*, y_0^*)$, где $y_0^* < 0$ и $0 < x_0^* \leq \Delta x$, если только выполняется соотношение $|y_0^*| \gg \Delta x$. Иначе говоря, в этом случае может быть показано, что изображающая точка $M(t)$, покинув плоскость $R = 0$ в точке M_0^* , пересечет плоскость $x = 0$, затем, побыв некоторое малое время вне этой плоскости, вновь вернется на нее в области скольжения в точке $M_2^*(x_2^*, y_2^*)$, для координат которой (фиг. 1) имеют место соотношения $x_2^* < 0$, $|x_2^*| \leq 2\Delta x$. Итак, наличие полосы $|x| \leq \Delta x$, содержащей внутри себя области «прошиваемости» системы (2.5), вызывает отклонение рассмотренных траекторий системы от плоскости $R = 0$. Это отклонение происходит на полосе, не выходящей из полосы $|x| \leq 2\Delta x$. Так как $\Delta x = m / K$, где m — постоянная из соотношения (2.8), K — параметр системы (2.5), то всегда можно выбрать значение K настолько большим, что значение Δx сделается сколь угодно малым. Одновременно с Δx сделаются сколь угодно малыми как максимальное отклонение функции $R(x)$ от нуля, так и время нахождения изображающей точки рассматриваемых траекторий вне плоскости $R = 0$.

В первой части доказательства теоремы доказано, что из любой точки фазового пространства изображающая точка системы (1.2) попадает с ростом времени на поверхность (S) , где $R = 0$. Дальнейшее поведение изображающей точки определяется ее движением на самой поверхности и отклонением от поверхности, определяемым существованием областей «прошиваемости» системы.

Рассмотрим теперь на плоскости $R = 0$ наряду с системой (1.4) систему

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \varphi(x, y) + R(t) \quad (2.13)$$

образованную двумя первыми уравнениями системы (2.5). Здесь через $R(t)$ обозначено значение величины R в процессе изучаемого выше движения точки $M(t)$. Поэтому $R(t) = 0$, если точка $M(t)$ скользит по плоскости $R = 0$; $R(t) \neq 0$, если точка $M(t)$ сходит с этой плоскости. Следовательно, система (2.13) описывает движение проекции точки $M(t)$ на плоскости $R = 0$.

Выше показано, что при достаточно большом значении K функция $R(t)$ может быть сделана как угодно малой по абсолютной величине. Кроме того, вследствие выполнения условий (б) нулевое положение равновесия является для системы (1.4) асимптотически

устойчивым при любых начальных возмущениях [9]. Рассмотрим теперь функцию

$$v = y^2 - 2 \int_0^x \varphi(x, 0) dx$$

Производная этой функции, взятая в силу системы (2.13), имеет вид

$$\dot{v} = 2y [\varphi(x, y) - \varphi(x, 0)] - 2R(t)y = 2y\varphi(0, y) + \\ + 2y [\varphi(x, y) - \varphi(0, y)] - 2y\varphi(x, 0) - 2yR(t)$$

Но из (2.12) легко следует, что $|yR(t)| < m^2/2K$, где m — положительная постоянная. С другой стороны, если y_0 — произвольно малое число, то, учитывая, что из условий (б) следует неравенство $y\varphi(0, y) < 0$, а также что для лежащей в области D точки величина ее ординаты y является ограниченной, будем иметь при $|y| > y_0$ строгое неравенство $y\varphi(0, y) < -r_0$, где r_0 — некоторая положительная постоянная.

Далее, выбирая значение K достаточно большим, можем добиться в силу непрерывности функции $\varphi(x, y)$ для точек полосы $|x| \leq 2\Delta x$ (в пределах области D) выполнения неравенств

$$|y [\varphi(x, y) - \varphi(0, y)]| < 1/4 r_0, \quad |y\varphi(x, 0)| < 1/4 r_0$$

Наконец, при $K > 2m^2 / r_0$ будем иметь также соотношение $|yR(t)| < 1/4 r_0$. Таким образом, в полосе $|x| \leq 2\Delta x$ при $|y| > y_0$ будем иметь для производной \dot{v} неравенство $\dot{v} < -1/2 r_0 < 0$. Кроме того, $\dot{v} < 0$ всюду в области D вне полосы $|x| \leq 2\Delta x$. Отсюда следует, что, выбирая значение K достаточно большим, мы можем добиться того, что производная \dot{v} станет отрицательной всюду в области D , за исключением как угодно малой окрестности начала координат. Но из проведенных рассуждений очевидным образом вытекает справедливость нашей теоремы.

Поступила 18 III 1963

Свердловское отделение
Математического ин-та АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Барбашин Е. А., Табуева В. А. Об одном способе стабилизации системы регулирования третьего порядка с большим коэффициентом усиления I. Автоматика и телемеханика, 1962, т. 28, № 10.
2. Барбашин Е. А., Табуева В. А. Об одном способе стабилизации системы регулирования третьего порядка с большим коэффициентом усиления II. Автоматика и телемеханика, 1963 т. 24, № 5.
3. Емельянов С. В., Бермант М. А. К вопросу о построении высококачественных систем автоматического управления объектами с изменяющимися параметрами. Докл. АН СССР, 1962, т. 145, № 4. стр. 748—751.
4. Емельянов С. В. Применение нелинейных корректирующих устройств типа «Ключ» для улучшения качества систем автоматического регулирования второго порядка. Автоматика и телемеханика, 1959, т. 20, № 7, стр. 867—883.
5. Красовский Н. Н. Второй метод Ляпунова в теории устойчивости движения. Тр. Всес. съезда по теоретической и прикладной механике. Изд-во АН СССР, 1962, стр. 36—47.
6. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Некоторые вопросы теории нелинейных систем автоматического регулирования с разрывными характеристиками. Тр. I Международн. конгресса по автоматическому управлению, Изд-во АН СССР, т. I, 1961, стр. 679—690.
7. Андре Дж., Зейберт П. Движение после конечной точки и анализ его устойчивости для общего случая разрывных систем регулирования. Тр. I Международн. конгресса по автоматическому управлению, Изд-во АН СССР, т. I, 1961, стр. 691—698.
8. Филиппов А. Ф. Приложение теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью к нелинейным задачам автоматического регулирования. Тр. I Международн. конгресса по автоматическому управлению, Изд-во АН СССР, т. I, 1961, 699—708.
9. Красовский Н. Н. Об устойчивости движения в целом при постоянно действующих возмущениях. ПММ, 1954, т. 18, вып. 1, стр. 95—102.