Прикладная математика и механика. Т. XXVII, 1963

О СТАБИЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВЫХ ДВИЖЕНИЙ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ СИЛАМИ ПРИ НЕПОЛНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Н. Н. Красовский

(Свердловск)

Рассматривается задача о построении управляющих воздействий, стабилизирующих собственно неустойчивое движение управляемого объекта. Задача осложнена ограничением потока информации в канале обратной связи. Решение опирается на теорию устойчивости движения [1,2], теорию аналитического конструирования регуляторов [3] и на теорию управляемости и наблюдаемости линейных систем [4]. Приведем численный пример.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим управляемый объект, состояния которого описываются его фазовыми координатами $z_i(t)$ $(t \geqslant 0, i = 1, \ldots, n)$. Пусть объект подвержен управляющим воздействиям u_j $(j = 1, \ldots, r)$, связанным с координатами z_i векторным дифференциальным уравнением

$$dz/dt = f[t, z, u] \tag{1.1}$$

Здесь f — заданная n-вектор-функция, z — n-вектор координат $\{z_i\}$, u — r-вектор управляющих сил $\{u_j\}$.

Предположим, что рассматривается движение $z = z^\circ(t)$, которое следует из (1.1) при $u(t) \equiv 0$ и при некоторых заданных начальных условиях $z^\circ(0) = z_0$, т. е. задано движение $z = z^\circ(t)$, которое может совершать объект (1.1) при отсутствии управления u, но может быть — под действием других (программирующих) сил, включенных неявно в функцию f. Пусть движение $z = z^\circ(t)$, описываемое уравнением (1.1) при $u \equiv 0$, неустойчиво в смысле Ляпунова [1] (стр. 20).

Задача состоит в определении сил u_j, которые стабилизируют движение $z^\circ(t)$. При этом требуется, чтобы система работала по принципу обратной связи, т. е. величины u_j в каждый момент процесса должны определяться текущим состоянием объекта. Рассматриваемая задача является, следовательно, проблемой об аналитическом конструировании регулятора [3]. Предположим, однако, что задача осложнена следующим обстоятельством. Пусть в процессе регулирования возможно лишь измерение величин $w_1, \ldots, w_l$, связанных с $z_1, \ldots, z_n$ векторным соотношением

$$w = \varphi[t, z] \qquad (\varphi = \{\varphi_k\},\ w = \{w_k\},\ z = \{z_i\},\ k = 1, \ldots, l;\ i = 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

не разрешимым однозначно относительно z. Поэтому искомый закон регулирования должен связывать величины u_j и w_k.

Уточним постановку задачи. Составим уравнения возмущенного движения [1] (стр. 21) в окрестности движения $z^\circ(t)$.

Пусть $x = z - z^\circ(t)$. Тогда (1.3)

$$\frac{dx}{dt} = p\,[t, x(t), u(t)], \qquad p\,[t, x, u] = f\,[t, x + z^\circ(t), u] - f\,[t, z^\circ(t), 0]$$

Условие (1.2) в переменных x и $y = w - \varphi\,[t, z^\circ(t)]$ принимает вид

$$y = q\,[t, x], \qquad q\,[t, x] = \varphi\,[t, x + z^\circ(t)] - \varphi\,[t, z^\circ(t)] \tag{1.4}$$

Если бы значения всех координат $x_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ в процессе регулирования могли измеряться и подаваться в регулятор, то задача о стабилизации движения $x = 0$ (т. е. движения $z^\circ(t)$) формулировалась бы, например, так: найти уравнение

$$s\,[u^{(m)}(t), \ldots, u(t), t, x(t)] = 0 \tag{1.5}$$

такое, чтобы движение $x = 0$, $u^{(m-1)} = \ldots = u = 0$ было асимптотически устойчивым [1] (стр. 20, 85) в силу уравнений возмущенного движения (1.3), (1.5).

Порядок $m \geqslant 0$ уравнения (1.5) может быть задан или он может определяться дополнительными условиями задачи.

В рассматриваемом в этой статье случае указанная постановка задачи не подходит вследствие невозможности непосредственного измерения вектора $x(t)$. Поэтому будем искать возможность стабилизации движения $x = 0$ среди регуляторов с последействием. Ограничимся здесь случаями, когда регулятор описывается уравнением первого порядка $(m = 1)$. Сформулируем задачу.

Задача 1.1. Найти дифференциальное уравнение с последействием

$$du / dt = U\,[t, y(t + \vartheta),\ u(t + \vartheta)] \quad (-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0,\ \tau = \text{const} > 0) \tag{1.6}$$

такое, чтобы движение $x = 0$, $u = 0$ было асимптотически устойчивым [5] (стр. 156) в силу уравнений возмущенного движения (1.3), (1.4), (1.6).

В уравнении (1.6) координаты r-вектора U, функционалы $U_j\,[t, y(\vartheta), u(\vartheta)]$ определены на непрерывных функциях $y_k(\vartheta)$ и $u_j(\vartheta)$ $(-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0$, $j = 1, \ldots, r;\ k = 1, \ldots, l)$. Постоянная $\tau > 0$ может быть задана или она может определяться при решении задачи.

Примечания. 1.1. Поскольку функционалы U_j зависят от вектора $u(t + \vartheta)$, предполагается возможность измерения вырабатываемых регулятором сил $u(t)$. Предполагается также возможность запоминания величин $y(t)$ и $u(t)$ в течение интервала времени продолжительностью τ.

1.2. Целесообразность введения последействия в закон регулирования (1.6) обосновывается также тем, что только в частных случаях возможна стабилизация неустойчивого движения $x = 0$ системы (1.3) за счет выбора закона регулирования в форме

$$du / dt = S\,[t, y(t), u(t)] \tag{1.7}$$

где вектор y определен соотношением (1.4), не разрешимым однозначно относительно x (см. пример в конце статьи, стр. 662).

1.3. Задача 1.1 может содержать дополнительное требование о минимизации какого-нибудь функционала на возмущенных движениях $x(t)$, $u(t)$ системы (1.3), (1.4), (1.6). Тогда может возникнуть, например, следующая модификация задачи 1.1.

Задача 1.2. Найти дифференциальное уравнение с последействием(1.6), такое, чтобы движение $x = 0$, $u = 0$ было асимптотически устойчивым в силу уравнений возмущенного движения (1.3), (1.4), (1.6) и чтобы при этом на движениях $x(t)$, $u(t)$ системы (1.3), (1.4), (1.6) минимизировался функционал

$$J[t_0, x_0, u_0; u] = \int_{t_0}^{\infty} \omega\,[t, x(t), u(t), u^{(1)}(t)]\,dt \tag{1.8}$$

для всех достаточно малых возмущений $x(t_0) = x_0$, $u(t_0) = u_0$ при каждом $t_0 \geqslant \tau$. Здесь $\omega\,[t, x, u, u^{(1)}]$ — заданная аналитическая (при каждом $t \geqslant \tau$) функция от x, u, $u^{(1)}$, определенно положительная по x, u, $u^{(1)}$ в смысле [1] (стр. 80), предполагается также, что процесс регулирования по уравнениям (1.3), (1.4), (1.6) начинается при $t = 0$ ($u^{(1)} = du/dt$).

В настоящей статье обсуждаются пути решения задач 1.1. и 1.2, причем в известной мере подытоживаются некоторые результаты, относящиеся к теории аналитического конструирования регуляторов и к смежным с ней проблемам стабилизируемости, управляемости и наблюдаемости регулируемых систем (см., например, [3,4 6–9]).

§ 2. Постановка задачи в линейном приближении. Пусть вектор-функции $p\,[t, x, u]$ и $q\,[t, x]$ в уравнениях (1.3) и (1.4) дифференцируемы по x и u. Тогда

$$dx/dt = P(t)\,x + B(t)\,u + \gamma\,[t, x, u], \qquad y = Q(t)\,x + \nu\,[t, x] \tag{2.1}$$

Здесь $P(t)$ — $n \times n$-матрица $\{p_{ij}(t)\}$, $B(t)$ — $n \times r$-матрица $\{b_{ij}(t)\}$, $Q(t)$ — $l \times n$-матрица $\{q_{ij}(t)\}$; вектор-функции $\gamma\,[t, x, u]$ и $\nu\,[t, x]$ при каждом $t \in [0, \infty)$ имеют в точке $x = 0$, $u = 0$ порядок малости более высокий, чем величина

$$\rho = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{j=1}^{r} u_j^2\right]^{1/2} \to 0 \tag{2.2}$$

Будем предполагать, что при всех $t \geqslant 0$ матрицы $P(t)$, $B(t)$ и $Q(t)$ непрерывны и равномерно ограничены, а также примем, что равномерно выполняется условие

$$|\gamma_i\,[t, x, u]| \leqslant \varepsilon\rho^2, \qquad |\nu_j\,[t, x]| \leqslant \varepsilon\rho^2$$
$$(\varepsilon > 0,\ \rho < \delta,\ \delta > 0,\ i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, l) \tag{2.3}$$

Линейное приближение для уравнений (1.3), (1.4) имеет вид

$$dx/dt = P(t)\,x + B(t)\,u \tag{2.4}$$

$$y = Q(t)\,x \tag{2.5}$$

Поэтому задача 1.1 в линейном приближении формулируется так.

Задача 2.1. Найти линейное дифференциальное уравнение с последействием

$$du/dt = W\,[t, y(t + \vartheta), u(t + \vartheta)] \quad (-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0) \tag{2.6}$$

такое, чтобы движение $x = 0$, $u = 0$ было асимптотически устойчивым в силу уравнений возмущенного движения (2.4)—(2.6).

Здесь $W\,[t, y(\vartheta), u(\vartheta)]$ — r-вектор, координаты которого $W_j\,[t, y(\vartheta), u(\vartheta)]$ — линейные функционалы [10] (стр. 165), определенные на непрерывных функциях $y(\vartheta)$, $u(\vartheta)$ $(-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0)$ и зависящие непрерывно от t при $0 \leqslant t < \infty$.

Задача 1.2 в первом приближении трансформируется в следующую задачу. Пусть функция $\omega\,[t, x, u, u^{(1)}]$ имеет разложение

$$\omega\,[t, x, u, u^{(1)}] = \omega_{(1)} + \varkappa = \tag{2.7}$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(t)\, x_i x_j + \sum_{i,j=1}^{r} d_{ij}(t)\, u_i u_j + \sum_{i,j=1}^{r} d_{ij}(t)\, u_i^{(1)} u_j^{(1)} + \varkappa\,[t, x, u, u^{(1)}]\quad \omega_{(1)} + \varkappa$$

причем выполнено условие

$$|\varkappa\,[t, x, u, u^{(1)}]| \leqslant \varepsilon \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{j=1}^{r} u_j^2 + \sum_{j=1}^{r} [u_j^{(1)}]^2\Big)^{1+\alpha} \qquad (t \geqslant 0,\ \alpha > 0) \tag{2.8}$$

при

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{j=1}^{r} u_j^2 + \sum_{j=1}^{r} (u_j^{(1)})^2 \leqslant \delta^2 \qquad (\delta > 0)$$

Кроме того, естественно предполагать, что формы

$$\sum c_{ij} x_i x_j, \qquad \sum d_{ij} u_i u_j, \qquad \sum e_{ij} u_i^{(1)} u_j^{(1)}$$

определенно положительны.

Тогда будем иметь задачу.

Задача 2.2. Найти дифференциальное уравнение (2.6), такое, чтобы движение $x = 0$, $u = 0$ было асимптотически устойчивым в силу уравнений (2.4),(2.5) и (2.6) и чтобы при этом на движениях $x(t)$, $u(t)$ системы (2.4)—(2.6) минимизировался функционал

$$J_2\,[t_0, x_0, u_0; u] = \tag{2.9}$$
$$= \int_{t_0}^{\infty} \Big[\sum_{i,j=1}^{n} [c_{ij}(t)\, x_i(t)\, x_j(t)] + \sum_{i,j=1}^{r} [d_{ij}(t) u_i(t)\, u_j(t) + e_{ij}(t)\, u_i^{(1)}(t)\, u_j^{(1)}(t)]\Big]\, dt$$

для всех $x(t_0) = x_0$, $u(t_0) = u_0$ и $t_0 \geqslant \tau$.

Примечание 2.1. Предположение о линейности уравнения (2.6), сделанное наперед, не сужает существенно возможности решения задачи 2.2, так как известно [3], что подобные задачи о минимуме квадратичного функционала имеют в качестве решения линейный закон регулирования.

§ 3. Вспомогательные определения и обозначения. Пусть C — некоторая матрица. Символами C^*, $C_{[i]}$, $C^{[i]}$, c_{ij}, C^{-1} будем обозначать, соответственно, транспонированную матрицу C, i-ю строку C, i-й столбец C, (i,j)-й элемент C и матрицу, обратную к C, если последняя существует. Символом $X\,[t_0, t]$ обозначим фундаментальную матрицу решений для уравнения

$$dx\,/\,dt = P(t)\, x \tag{3.1}$$

При этом $X\,[t_0, t_0] = E$ — единичная матрица. Известно [11] (стр. 171), что справедливо уравнение

$$\frac{d\,(X^{-1})^*}{dt} = -P^*\,(X^{-1})^* \tag{3.2}$$

Решение уравнения (2.4) определяется формулой Коши [11] (стр. 172)

$$x(t) = X[t_0, t]\, x(t_0) + \int_{t_0}^{t} X[t_0, t]\, X^{-1}[t_0, \vartheta]\, B(\vartheta)\, u(\vartheta)\, d\vartheta \tag{3.3}$$

Пусть τ — некоторое положительное число. Обозначим символом $H[t, \tau, \vartheta]$ — следующую $n \times r$-матрицу:

$$H[t, \tau, \vartheta] = X[t, t+\tau]\, X^{-1}[t, t+\vartheta]\, B(t+\vartheta) \quad (t \geqslant 0,\ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \tau) \tag{3.4}$$

Будем обозначать символом $\| c \|_\tau$ норму вектор-функции $\{c_i(\vartheta)\}$ $(i = 1, \ldots, k,\ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \tau)$

$$\| c \|_\tau = \left(\int_0^\tau \left[\sum_{i=1}^{k} c_i^2(\vartheta) \right] d\vartheta \right)^{1/2} \tag{3.5}$$

Определение 3.1. Уравнение (2.4) удовлетворяет условию (3.1, τ), если квадратичная форма переменных $\lambda_i\, (i = 1, \ldots, n)$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i H_{[i]}[t, \tau, \vartheta] \right\|_\tau^2 \tag{3.6}$$

определенно положительна (равномерно по t).

Условие (3.1, τ) играет существенную роль в теории управляемости линейных систем [4]. Это условие означает, что строки $H_{[i]}$ матрицы $H[t, \tau, \vartheta]$ при каждом t являются линейно независимыми вектор-функциями от ϑ $(-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0)$ и эта линейная независимость в известном смысле равномерна по t. Усиленным условием (3.1, τ) будем называть условие, включающее помимо требования определения (3.1) также требование того, чтобы при каждом j и $t \geqslant 0$ выполнялось неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_{ij}[t, \tau, \vartheta] \neq 0 \quad \text{при} \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \neq 0 \quad \text{почти всюду для } 0 \leqslant \vartheta \leqslant \tau \tag{3.7}$$

Последнее условие встречалось в задачах об управлении, например, в работах [12–15].

Рассмотрим вспомогательную систему уравнений

$$dx / dt = P(t)\, x + B(t)\, u, \qquad du / dt = \zeta \tag{3.8}$$

Пусть $Z[t_0, t]$ — фундаментальная матрица решений системы

$$dx / dt = P(t)\, x + B(t)\, u, \qquad du / dt = 0 \tag{3.9}$$

Составим для системы (3.8) матрицу $F[t, \tau, \vartheta]$, аналогичную матрице H, т. е. пусть

$$F[t, \tau, \vartheta] = Z[t, t+\tau]\, Z^{-1}[t, t+\vartheta] \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_r \end{Vmatrix} \tag{3.10}$$

где E_r — единичная $r \times r$-матрица.

---

1 Kalman R. E., Ho Y. C., Narendra K. S. Controllability of Linear Dinamical System. Contributions to differential equations, v. 1, № 2, Interscience Publ. 1963.

Справедливо следующее утверждение, которое приведем без доказательства.

Лемма 3.1. Пусть элементы $b_{ij}(t)$ матрицы $B(t)$ имеют непрерывные и равномерно ограниченные при $t \geqslant 0$ производные $b_{ij}^{(1)}(t)$. Тогда из выполнения условия (3.1, τ) для уравнения (2.4) следует выполнение этого условия и для системы (3.8). Иначе говоря, тогда из определенной положительности формы (3.6) следует определенная положительность формы

$$\left\| \sum_{i=1}^{n+r} \lambda_i F_{[i]}[t, \tau, \vartheta] \right\|_\tau^2 \qquad (3.11)$$

равномерно по $t \geqslant 0$.

Примечание 3.1. Если требование равномерной ограниченности производных $b_{ij}^{(1)}(t)$ не выполнено, то из выполнения (3.1, τ) для (2.4) может не следовать выполнение (3.1, τ) для (3.8). Например, скалярное уравнение

$$dx / dt = b(t) u, \qquad b(t) = \sin kt \qquad \text{при } 2(k-1)\pi \leqslant t \leqslant 2k\pi \qquad (3.12)$$

удовлетворяет при $\tau = 2\pi$ условию (3.1, τ). Однако система

$$dx / dt = b(t) u, \qquad du / dt = \zeta$$

условию (3.1, τ) при $\tau = 2\pi$ не удовлетворяет.

Приведем достаточные условия, обеспечивающие выполнение условия (3.1, τ). Пусть функции $p_{ij}(t)$ и $b_{ij}(t)$ имеют непрерывные и равномерно ограниченные производные до n-го порядка включительно. Рассмотрим последовательность матриц $L_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$, определенных рекуррентными соотношениями

$$L_1(t) = B(t), \qquad L_i(t) = \frac{dL_{i-1}}{dt} - P(t) L_{i-1}(t) \qquad (3.13)$$

Обозначим символом $l[j, t]$ — n-вектор, являющийся j-м столбцом матрицы

$$L(t) = (L_1(t), \ldots, L_n(t)) \qquad (3.14)$$

и рассмотрим квадратичную форму

$$\sum_{i, k=1}^{n} (l[j_k, t] \cdot l[j_i, t]) \lambda_j \lambda_k \qquad (3.15)$$

где символ $(l[j_k, t] \cdot l[j_i, t])$ обозначает скалярное произведение соответствующих векторов.

Определение 3.2. Уравнение (2.4) удовлетворяет условию (3.2, τ), если на каждом интервале $t_0 < t < t_0 + \tau$ $(t_0 \geqslant 0)$ можно указать по крайней мере одну точку $t = t^*$, для которой существует набор чисел j_k $(k = 1, \ldots, n)$, $(1 \leqslant j_k \leqslant n \times r)$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{i, k=1}^{n} (l[j_k, t^*] \cdot l[j_i, t^*]) \lambda_i \lambda_k \geqslant \mu \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \qquad (3.16)$$

причем число $\mu > 0$ не зависит от t_0 и t^*.

Справедливо следующее утверждение, вытекающее по сути дела из известных результатов теории управляемости линейных систем [4].

Лемма 3.2. Выполнение (3.2, τ) для уравнения (2.4) является достаточным условием для выполнения (3.1, τ) для этого же уравнения.

Примечание 3.2. Набор чисел j_k может зависеть от t_0 и t^*. Если неравенство (3.16) выполнено усиленно, т. е. при всех $t^* \geqslant 0$ и для каждого набора чисел j_{i+rk} ($k = 0, \ldots, n-1$; $i = 1, \ldots, r$), то (3.1, τ) выполняется для уравнения (2.4) в усиленном смысле (см. стр. 645). Условие типа условия (3.2, τ) было введено в работе [12] в стационарном случае в форме независимости векторов $B^{[j]}, \ldots, P^{n-1}B^{[j]}$, как условие «общего положения» при изучении задачи об оптимальном быстродействии.

В работе [4] условия общего положения рассматривались, как условия управляемости линейных систем. В работе [16] условия, подобные (3.2, τ), использовались при исследовании локальной управляемости нелинейных систем. В работе [17] усиленное условие (3.2, τ) было использовано как достаточное условие управляемости и непрерывной зависимости от параметров оптимального по быстродействию управления в линейных нестационарных системах. Условия типа (3.2, τ) и усиленные условия типа (3.2, τ) играют существенную роль в теории оптимального управления (см. [13] и другие работы по оптимальному управлению).

Упомянем еще работы [8,9,18–22], где усиленные условия (3.2, τ) использовались при решении задач об аналитическом конструировании регуляторов по первому приближению, задач о стабилизируемости стохастических систем, при исследовании задач об управляемости и о быстродействии нелинейных систем по линейному приближению, при выяснении релейного характера управления для оптимального быстродействия в нелинейных системах, в задаче о стохастическом преследовании.

Приведем еще некоторые определения и обозначения, которые понадобятся ниже при использовании задачи о наблюдении управляемого объекта (см. стр. 652).

Пусть τ — положительная постоянная. Рассмотрим $l \times n$-матрицу $G[t, \tau, \vartheta]$, выражаемую следующим образом через матрицу $Q(t)$ (2.5) и через фундаментальную матрицу $X[t_0, t]$ уравнения (3.1)

$$G[t, \tau, \vartheta] = Q[t+\vartheta]\, X[t, t+\vartheta] \qquad (t \geqslant \tau, \quad -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0) \tag{3.17}$$

Будем обозначать символом $\|c\|_{-\tau}$ норму вектор-функции $\{c_i(\vartheta)\}$ ($i = 1, \ldots, k$) $(-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0)$

$$\|c\|_{-\tau} = \left(\int_{-\tau}^{0} \left[\sum_{i=1}^{k} c_i^2(\vartheta)\right] d\vartheta\right)^{1/2} \tag{3.18}$$

Определение 3.3. Уравнения (3.1), (2.5) удовлетворяют условию (3.3, τ), если квадратичная форма переменных λ_i ($i = 1, \ldots, n$)

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i G^{[i]}[t, \tau, \vartheta] \right\|_{-\tau}^{2} \tag{3.19}$$

определенно положительна (равномерно по t).

Условие (3.3, τ) играет существенную роль в теории наблюдаемости линейных систем [4] (см. также [1]). Условие (3.3, τ) согласно этой теории является двойственным к условию управляемости (3.1, τ) (см. стр. 645).

Усиленным условием (3.3, τ) будем называть условие, включающее помимо требования определения 3.3, также требование того, чтобы при каждом j и $t \geqslant \tau$ выполнялось неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_{ji}[t, \tau, \vartheta] \neq 0 \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \neq 0 \tag{3.20}$$

почти всюду для $-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0$.

Приведем достаточные условия, обеспечивающие выполнение условия (3.3, τ).

[1] Kalman R. E. New metods and Results in Linear Prediction and Filtering Theory. RJAS. Technical Report, 1961—1.

Пусть функции $p_{ij}(t)$ и $q_{ij}(t)$ имеют непрерывные и равномерно ограниченные производные до n-го порядка включительно. Рассмотрим последовательность матриц $R_i(t)$ $(i=1,\ldots,n)$, определенных рекуррентными соотношениями

$$R_1(t) = Q(t), \qquad R_i(t) = \frac{dR_{i-1}}{dt} + R_{i-1}(t)P(t) \tag{3.21}$$

Пусть $r[j, t]$ означает n-вектор, представляющий j-строку матрицы

$$R(t) = \left\| \begin{matrix} R_1(t) \\ \vdots \\ R_n(t) \end{matrix} \right\| \tag{3.22}$$

и рассмотрим квадратичную форму

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} (r[j_k, t]\cdot r[j_i, t])\,\lambda_i\lambda_k \tag{3.23}$$

Определение 3.4. Уравнения (3.1), (2.5) удовлетворяют условию (3.4, τ), если на каждом интервале $t_0 - \tau < t < t_0$ $(t_0 \geqslant \tau)$ можно указать по крайней мере одну точку $t = t^*$, для которой существует набор чисел j_k $(k=1,\ldots,n)$ $1 \leqslant j_k \leqslant n\times l$, удовлетворяющий условию

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} (r[j_k, t^*]\cdot r[j_i, t^*])\,\lambda_i\lambda_k \geqslant \mu \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \qquad (\mu > 0) \tag{3.24}$$

Справедливо следующее утверждение, вытекающее из результатов теории наблюдаемости линейных систем [4] и являющееся двойственным к лемме 3.2.

Лемма 3.3. Условие (3.4, τ), выполненное для уравнений (3.1), (2.5), является достаточным условием для выполнения (3.3, τ) для этих уравнений.

Примечание 3.3. В этом параграфе приведены ссылки на некоторые работы, относящиеся к теории управляемости и наблюдаемости регулируемых систем и имеющие прямое отношение к задачам, рассматриваемым в этой статье. Проблемы управляемости и наблюдаемости имеют, однако, весьма большую библиографию, которая осталась в стороне в приведенном выше кратком обзоре. Упомянем в этой связи, например, работы [23,24], где описаны эффективные методы решения задач об управлении и наблюдении систем, а также работу [25], где рассмотрена задача о стабилизации механических систем диссипативными силами. Характер данной статьи не предполагает, однако, достаточно полного обзора соответствующей литературы.

§ 4. Решение задач в линейном приближении. Рассмотрим задачи 2.1 и 2.2. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1. Если для уравнений (2.4), (2.5) и (3.1) выполнены условия (3.2, τ) и (3.4, τ), то задачи 2.1 и 2.2 имеют решение. Искомый закон регулирования (2.6) имеет вид

$$\frac{du}{dt} = A(t)\,u(t) + \int_{-\tau}^{0} [N(t,\vartheta)\,y(t+\vartheta) + M(t,\vartheta)\,u(t+\vartheta)]\,d\vartheta \tag{4.1}$$

где матрицы-функции A, N и M непрерывны по своим аргументам и ограничены равномерно по t. При этом движении $x=0$, $u=0$ будет асимптотически устойчивым в силу уравнений возмущенного движения (2.4), (2.5), (4.1) равномерно по моменту t_0 начального возмущения и по начальным отклонениям $x^\circ(t_0+\vartheta)$, $u^\circ(t_0+\vartheta)$ $(-\tau\leqslant\vartheta\leqslant 0)$ в смысле [5] (стр. 174, 191), т. е. будет выполняться неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t)+\sum_{j=1}^{r} u_j^2(t)\leqslant\beta e^{-\alpha(t-t_0)}\sup_\vartheta\Big[\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t_0+\vartheta)+\sum_{j=1}^{r} u_j^2(t_0+\vartheta)\Big] \quad (4.2)$$
$$(t\geqslant t_0,\ \alpha>0,\ \beta=\mathrm{const}>0)$$

Вычисление элементов $a_{ij}(t)$, $n_{ij}(t,\vartheta)$ и $m_{ij}(t,\vartheta)$ матриц A, N и M с нужной точностью сводится к определению фундаментальной матрицы $X[t_0, t]$ уравнения (3.1), решению систем линейных алгебраических уравнений и к решению задачи Коши для некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений при известных начальных условиях.

Примечание 4.1. По условиям задач 2.1 и 2.2 можно ограничиться определением уравнения (4.1) лишь при $t\geqslant\tau$. Так и будем решать эти задачи, предполагая, что в задаче 2.2 при $0\leqslant t\leqslant t_0=\tau$ фактически работало управление $u(t)$, входящее в уравнение (4.1), в задаче 2.1 функции $u(t_0+\vartheta)$, $x(t_0+\vartheta)$ можно считать заданными произвольно и независимо $(t_0\geqslant\tau,\ -\tau\leqslant\vartheta\leqslant 0)$. В случае необходимости можно предполагать, что найденное для $t\geqslant\tau$ уравнение (4.1) продолжено до $t=0$ непрерывно любым возможным образом, и считать начальные возмущения $x(\vartheta)$, $u(\vartheta)$ заданными независимо $(-\tau\leqslant\vartheta\leqslant 0)$. Задача 2.1 имеет множество решений, решение в виде уравнения (4.1) получается для задачи 2.1 из решения задачи 2.2 и приводит при его отыскании, по-видимому, к наименьшим вычислительным трудностям.

Приведем рассуждения, доказывающие справедливость теоремы 4.1 и указывающие метод вычисления элементов a_{ij}, n_{ij} и m_{ij} уравнения (4.1). В соответствии с примечанием 4.1 начнем с решения задачи 2.2.

Рассмотрим вспомогательную задачу об аналитическом конструировании оптимального регулятора [3].

Задача 4.1. Найти закон регулирования $\zeta=\zeta^\circ[t,x,u]$, обеспечивающий асимптотическую устойчивость движения $x=0$, $u=0$ в силу уравнений возмущенного движения

$$dx/dt=P(t)\,x(t)+B(t)\,u(t),\qquad du/dt=\zeta \quad (4.3)$$

и такой, что управление $\zeta=\zeta^\circ[t,x,u]$ обеспечивает наименьшее значение функцонала

$$J_2[t_0,x_0,u_0;\zeta]= \quad (4.4)$$
$$=\int_{t_0}^{\infty}\Big[\sum_{i,j=1}^{n}[c_{ij}(t)x_i(t)\,x_j(t)]+\sum_{i,j=1}^{r}[d_{ij}(t)\,u_i(t)\,u_j(t)+e_{ij}(t)\,\zeta_i(t)\,\zeta_j(t)]\Big]dt$$

при всех начальных условиях $t_0\geqslant 0$, $x(t_0)=x_0$, $u(t_0)=u_0$, в классе Ξ непрерывных, допустимых управлений $\zeta=\zeta[t,x,u]$.

Для решения задачи 4.1 достаточно [3, 6, 8, 26] найти функции $v^\circ(t,x,u)$ и $\zeta^\circ(t,x,u)$, удовлетворяющие условиям:

1) Функция $v^\circ(t,x,u)$ определенно положительна по x и u, допускает высший предел и равномерно неограниченно возрастает [5] (стр. 36) при $(x,u)\to\infty$.

2) Производная $(dv^\circ/dt;\ (4.3),\ \zeta)$ функции v° вдоль движений $x(t)$, $u(t)$ системы (4.3) при фиксированном управлении ζ удовлетворяет условию, соответствующему

здесь принципу оптимальности [27] (стр. 177)

$$\left(\frac{dv^\circ}{dt};\ (4.3),\ \zeta^\circ\right)=\sum_{i,\,j=1}^{n} c_{ij}(t)\,x_ix_j+\sum_{i,\,j=1}^{r}[d_{ij}(t)\,u_ju_i+e_{ij}(t)\,\zeta_i^\circ\zeta_j^\circ]= \tag{4.5}$$

$$=\min_\zeta\left\{\left(\frac{dv^\circ}{dt};\ (4.3),\ \zeta\right)+\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(t)\,x_ix_j+\sum_{i,\,j=1}^{r}[d_{ij}(t)\,u_iu_j+e_{ij}(t)\,\zeta_i\zeta_j]\right\}=0$$

(при $\zeta\in\Xi$ для всех $x,\ u,\ t\geqslant 0$).

Тогда ζ° — оптимальное управление и справедливо равенство

$$J_2[t_0,\ x_0,\ u_0;\ \zeta^\circ]=v^\circ(t_0,\ x_0,\ u_0) \tag{4.6}$$

Функцию $v^\circ(t,\ x,\ u)$ следует искать здесь в виде квадратичной формы от переменных $x_i,\ u_k$ $(i=1,\ldots,n;\ k=1,\ldots,r)$

$$v^\circ(t,\ x,\ u)=v_2^\circ(t,\ x,\ u) \tag{4.7}$$

с коэффициентами $\alpha_{js}(t)$ $(j=1,\ldots,n+r;\ s=1,\ldots,n+r)$, зависящими от времени. Из уравнения (4.5) выводятся уравнения [3, 4, 22] для коэффициентов $\alpha_{js}(t)$

$$\frac{d\alpha_{js}(t)}{dt}=\xi_{js}[t,\ \{\alpha_{\mu,\nu}(t)\}] \tag{4.8}$$

где ξ_{js} — многочлены второй степени относительно $\alpha_{\mu\nu}$.

Вследствие условия 1) следует искать ограниченные равномерно при $t\geqslant 0$ решения α_{js} уравнений (4.8) и такие, что форма $v_2^\circ(t,\ x,\ u)$ (4.7) от x и u определенно положительна равномерно по t.

Справедливо утверждение, которое выводится из упомянутых выше (см. § 3) результатов.

Лемма 4.1. Если уравнение (2.4) удовлетворяет условию (3.2, τ), то задача 4.1 имеет решение. При этом оптимальное управление ζ° имеет вид

$$\zeta_k^\circ[t,\ x,\ u]=\sum_{i=1}^{n}\beta_{ki}(t)\,x_i+\sum_{j=1}^{r}\gamma_{kj}(t)\,u_j\qquad(k=1,\ldots,r) \tag{4.9}$$

где функции $\beta_{ki}(t)$ и $\gamma_{kj}(t)$ непрерывны и равномерно ограничены по $t\geqslant 0$.

Наметим доказательство леммы 4.1. Согласно лемме 3.2 из выполнения для уравнения (2.4) условия (3.2, τ) следует выполнение для этого уравнения и условия (3.1, τ). Согласно лемме 3.1 из (3.1, τ) для уравнения (2.4) следует (3.1, τ) и для системы (4.3). Итак, система (4.3) удовлетворяет (3.1, τ). Согласно теореме об управляемости [4] и оценкам [21] это означает, что система (4.3) равномерно управляема воздействиями ζ на каждом отрезке τ, т. е. для любого начального условия

$$t_0\geqslant 0,\qquad x(t_0)=x_0,\qquad u(t_0)=u_0,\qquad \sum_{i=1}^{n}x_{i0}^2+\sum_{j=1}^{r}u_{j0}^2\leqslant 1 \tag{4.10}$$

можно указать управление $\zeta^*(t)$ $(t_0\leqslant t\leqslant t_0+\tau)$, приводящее систему (4.3) в момент $t=t_0+\tau$ к состоянию $x=u=0$. При этом величина

$$J_2^\tau[t_0,\ x_0,\ u_0,\ \zeta^*]= \tag{4.11}$$

$$=\int_{t_0}^{t_0+\tau}\left\{\left[\sum_{i,\,j=1}^{n}c_{ij}(t)\,x_i(t)\,x_j(t)\right]+\sum_{i,\,j=1}^{r}[d_{ij}(t)\,u_i(t)\,u_j(t)+e_{ij}(t)\,\zeta_i^*(t)\,\zeta_j^*(t)]\right\}dt$$

равномерно ограничена по $t_0\geqslant 0$. Отсюда выводится (см. например, [22], стр. 228; [28], стр. 39), что существуют решения $\{\alpha_{js}^T(t)\}$ уравнений (4.8), ограниченные на каждом интервале $0\leqslant t\leqslant T$ и удовлетворяющие начальному условию

$$\alpha_{js}^T(T)=0\qquad(j,\ s=1,\ldots,n+r) \tag{4.12}$$

Вследствие равномерной ограниченности $\alpha_{js}^T(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T,\ T < \infty)$, следующей из ограниченности величины (4.11), устанавливается предельным переходом, что искомое решение $\{\alpha_{js}(t)\}$ уравнений (4.8), обеспечивающее выполнение условия 1) для v_2°, существует и определяется равенством

$$\alpha_{js}(t) = \lim \alpha_{js}^T(t) \quad \text{при } T \to \infty \tag{4.13}$$

Подобные предельные переходы рассмотрены в рамках проблемы устойчивости уравнений Рикатти (4.8) в работе [4] (см также сноски на стр. 000). В стационарном случае предельный переход (4.13) подробно исследован и работе [29], где на этой основе разработан метод решения задач об аналитическом конструировании регуляторов на электронных моделях или на универсальной счетной машине (см. пример в конце статьи).[1]

Итак, при условиях леммы 4.1 можно найти функции $v^\circ = v_2^\circ$ и $\zeta = \zeta^\circ$, удовлетворяющие уравнению (4.5). Функция $\zeta^\circ[t, x, u]$ после определения v_2° определяется из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\left\{\left(\frac{dv_2^0}{dt};\quad (4.3), \zeta\right) + \sum_{i,j=1}^{r} e_{ij}(t)\zeta_i\zeta_j\right\} = 0 \tag{4.14}$$

Из (4.14) по установленным выше свойствам $\alpha_{js}(t)$ следует, что управление ζ° действительно имеет вид (4.9). Наконец, равномерная асимптотическая устойчивость линейной оптимальной системы (4.3)

$$dx / dt = P(t)x + B(t)u, \qquad du / dt = \zeta^\circ[t, x, u] \tag{4.15}$$

т. е. выполнение неравенства

$$\sum_{i=1}^{r} x_i^2(t) + \sum_{j=1}^{r} u_j^2(t) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t_0) + \sum_{j=1}^{r} u_j^2(t_0)\right)\beta e^{-\alpha(t-t_0)} \tag{4.16}$$
$$(\alpha > 0, \beta > 0 - \text{const},\ t \geqslant t_0)$$

следует из того замечания, что система (4.15) допускает [30] (стр. 310) определенно положительную функцию Ляпунова $v = v_2^\circ$, имеющую в силу этой системы определенно отрицательную производную

$$\left(\frac{dv_2^\circ}{dt};\ (4.3), \zeta\right) = -\left[\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(t)x_ix_j + \sum_{i,j=1}^{r} d_{ij}(t)u_iu_j + \sum_{i,j=1}^{r} e_{ij}(t)\zeta^\circ_i\zeta_j^\circ\right]$$

Итак, справедливость леммы 4.1 проверена.

Рассмотрим теперь вспомогательную задачу о наблюдении.

Задача 4.2. Найти линейный оператор $Y_{(1)}[t, y(\vartheta), u(\vartheta)]$, определенный при $t \geqslant \tau$ на непрерывных вектор-функциях $\{y_j(\vartheta)\}$ $(j = 1, \ldots, l)$, $\{u_s(\vartheta)\}$ $(s = 1, \ldots, r)$ и удовлетворяющий на решениях $x(t)$, $u(t)$ уравнений (2,4), условию

$$x(t) = Y_{(1)}[t, y(t + \vartheta), u(t + \vartheta)] \tag{4.17}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.2. Пусть система (3.1), (2.6) удовлетворяет условию (3.4,τ); тогда задача 4.2 имеет решение и оператор $Y_{(1)}$ в (4.17) можно построить в виде

$$Y_{(1)}[t, y(\vartheta), u(\vartheta)] = \int_{-\tau}^{0} \{[Y(t, \vartheta)y(\vartheta) + K(t, \vartheta)u(\vartheta)\}\, d\vartheta \tag{4.18}$$

где, соответственно, $n \times l$ и $n \times r$-матрицы Y, K имеют непрерывные и равномерно ограниченные по $t \geqslant \tau$ элементы $y_{ij}(t, \vartheta)$, $k_{ij}(t, \vartheta)$.

[1]Отметим, что при периодических $P(t)$, $B(t)$ и $\omega_{(1)}$ функции $\alpha_{js}(t)$ (4.13) получаются периодическими.

Справедливость леммы 4.2 выводится из результатов общей теории о наблюдаемости линейных систем [4]. Наметим доказательства леммы. Рассмотрим сначала еще одну вспомогательную задачу.

Задача 4.3. Найти $n \times l$-матрицу $V(t, \vartheta)$, определенную при $t \geqslant \tau$ и удовлетворяющую условию

$$x_0 = \int_{-\tau}^{0} V(t, \vartheta)\, G\, [t, \tau, \vartheta]\, x^0 d\vartheta \tag{4.19}$$

где матрица G определена равенством (3.17), x_0 — произвольный n-вектор.

Задача 4.3 при условиях (3.3, τ) имеет решение [4,], а следовательно, согласно лемме 3.3 эта задача имеет решение и при выполнении условия (3.4, τ). Матрицу $V(t, \vartheta)$ можно искать в виде

$$V_{[i]}(t, \vartheta) = \lambda^*(i)\, G^*[t, \tau, \vartheta] \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.20}$$

где $\lambda^*(i)$—постоянный n-вектор-строка. Из (4.19) и (4.20) следует уравнение для λ^*

$\lambda^*(i)$

$$\delta_{ij} = \lambda^*(i) \int_{-\pi}^{0} (G^*[t, \tau, \vartheta]\, G\, [t, \tau, \vartheta])^{[j]} d\vartheta \tag{4.21}$$

где $\delta_{ii} = 1$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, n$. Определитель $\Delta(t)$ $n \times n$-матрицы

$$\int_{-\tau}^{0} G^* \cdot G\, d\vartheta$$

при условии (3.3, τ) равномерно по $t \geqslant \tau$ удовлетворяет неравенству

$$|\Delta(t)| \geqslant \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0 = \text{const}) \tag{4.22}$$

Следовательно, уравнение (4.24) разрешимо и искомая матрица $V(t, \vartheta)$, определяемая равенством (4.20), будет иметь непрерывные и равномерно ограниченные элементы $v_{ij}(t, \vartheta)$.

Решение $x(t)$ уравнения (2.5) имеет вид (3.3). Из (3.3) выводим равенства

$$\int_{-\tau}^{0} V(t, \vartheta)\, Q\, [t + \vartheta]\, x(t + \vartheta)\, d\vartheta = \int_{-\tau}^{0} V(t, \vartheta)\, Q\, [t + \vartheta]\, X\, [t + \vartheta]\, x(t)\, d\vartheta +$$

$$+ \int_{-\tau}^{0} \{V(t, \vartheta)\, Q\, [t + \vartheta] \int_{0}^{\vartheta} X\, [t, t+\vartheta]\, X^{-1}[t, t + \eta]\, B\, (t + \eta)\, u\, (t + \eta)\, d\eta\}\, d\vartheta$$

или по (2.5) и (4.19)

$$\int_{-\tau}^{0} V(t, \vartheta)\, y\, (t + \vartheta)\, d\vartheta = \tag{4.23}$$

$$= x(t) + \int_{-\tau}^{0} \left\{\int_{0}^{\vartheta} V(t, \vartheta)\, Q\, [t+\vartheta]\, X\, [t, t+\vartheta]\, X^{-1}[t, t+\eta]\, B\, (t+\eta)\, u\, (t+\eta)\, d\eta\right\} d\vartheta$$

Меняя в правой части (4.23) порядок интегрирования и заменяя η на ϑ, получим равенство

$$x(t) = \int_{-\tau}^{0} V(t, \vartheta)\, y\, (t + \vartheta)\, d\vartheta + \int_{-\tau}^{0} \left\{\int_{-\tau}^{\vartheta} V(t, \eta)\, Q\, (t + \eta)\, X\, [t, t + \eta]\, d\eta\right\} \times$$

$$\times X^{-1}[t, t + \vartheta]\, B\, (t + \vartheta)\, u\, (t + \vartheta)\, d\vartheta$$

Если положить

$$\Upsilon(t, \vartheta) = V(t, \vartheta) \tag{4.24}$$

$$K(t, \vartheta) = \left\{\int_{-\tau}^{\vartheta} V(t, \eta)\, Q(t+\eta)\, X[t, t+\eta]\, d\eta\right\} X^{-1}[t, t+\vartheta]\, B(t+\vartheta)$$

то и получим оператор $\Upsilon_{(1)}$ (4.18), удовлетворяющий утверждению леммы 4.2. Тем самым справедливость леммы проверена.

Примечание 4.2. Решение задачи 4.2 не является единственным. Описанное выше решение, вытекающее из [4] и приводящее задачу к решению линейных уравнений (4.21), по-видимому, связано с наименьшими вычислительными трудностями. Однако по условиям задачи может оказаться целесообразным искать матрицу-функцию $V(t, \vartheta)$, определяющую оператор $\Upsilon_{(1)}$ равенствами (4.24), в виде релейной функции, т. е. в виде матрицы с кусочно-постоянными элементами $v_{ij}(t, \vartheta)$, или в виде импульсной матрицы. Это может приводить к более простому синтезу системы. Такие решения можно получить, если при решении задачи 4.3 воспользоваться, например, результатами из работы [21]. Рассмотрим здесь кратко ситуацию при $l = 1$ для упрощения выкладок. Будем сначала искать матрицу $V(t, \vartheta)$, т. е. в данном случае (при $l = 1$) — n-вектор-столбец $V^{[1]}(t, \vartheta) = \{v(t, \vartheta)\}$ в релейной форме. Матрица $G[t, \tau, \vartheta]$ является при $l = 1$ вектором-строкой $G_{[1]}[t, \tau, \vartheta] = \{g_i(t, \vartheta)\}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Согласно задаче 4.3 следует, таким образом, найти вектор $\{v_i(t, \vartheta)\}$, имеющий релейный характер по ϑ при $-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0$ и удовлетворяющий уравнению (4.19), т. е. здесь уравнению

$$\left\| \begin{matrix} x_{10} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{matrix} \right\| = \int_{-\tau}^{0} \left\| \begin{matrix} g_1 v_1 & \cdots & g_n v_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_1 v_n & \cdots & g_n v_n \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x_{10} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{matrix} \right\| d\vartheta \tag{4.25}$$

Из (4.25) выводим n систем линейных уравнений

$$\delta_{ij} = \int_{-\tau}^{0} g_j(t, \vartheta)\, v_i(t, \vartheta)\, d\vartheta \qquad (j = 1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, n) \tag{4.26}$$

Рассмотрим i-ю систему и будем искать решение v_i° уравнений (4.26), удовлетворяющее условию

$$\max\left(|v_i^\circ(t, \vartheta)| \text{ при } -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0\right) = \min \tag{4.27}$$

Решение задачи (4.26), (4.27) при каждом i существует при выполнении условия (3.3, τ) (и притом релейное [14]). Будем предполагать, однако, что матрица $G[t, \tau, \vartheta]$ удовлетворяет условию (3.3, τ) в усиленном смысле (см. стр. 647). Для этого достаточно, чтобы условие (3.23) из определения 3.4 выполнялось при всех $t^* \in [0, \infty]$. Тогда решение $v_i^\circ(t, \vartheta)$ задачи (4.26), (4.27) является единственным и определяется равенством

$$v_i^\circ(t, \vartheta) = \alpha \operatorname{sign}\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_i^\circ g_j(t, \vartheta)\right) \qquad (-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0)$$

где α, λ_j° — решения задачи

$$\frac{1}{\alpha} = \min_\lambda \left\{\int_{-\tau}^{0} \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_j g_j(t, \vartheta)\right| d\vartheta\right\} \quad \text{при} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta_{ij} = \lambda_i = +1$$

Подставляя найденную релейную функцию V в (4.24), найдем выражение для K, которое в ряде случаев может оказаться проще, чем в разобранном раньше случае непрерывной функции V.

Будем теперь искать функцию $V^{[1]}$ в виде матрицы с импульсными элементами

$$v_i(t, \vartheta) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^i(t)\, \delta(\vartheta - \tau_k^i(t))$$

где δ — суть δ-функции. С этой целью будем искать [21] элементы $v_i(t, \vartheta)$, удовлетворяющие уравнениям (4.26) в форме

$$\delta_{ij} = \int_{-\tau}^{0} g_j(t, \vartheta)\, d\eta_i(t, \vartheta) \qquad (d\eta_i(t, \vartheta) = v_i(t, \vartheta)\, d\vartheta) \tag{4.28}$$

где $d\eta_i$ — мера Стильтьеса, причем потребуем

$$\int_{-\tau}^{0} |d\eta_i(t, \vartheta)| = \min \tag{4.29}$$

Решение v_i° задачи (4.28), (4.29) определяется из условия

$$v_i^\circ(t, \vartheta) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^{\,i}(t)\, \delta(\vartheta - \tau_k^{\,i}(t)) \tag{4.30}$$

где $\alpha = \Sigma |\alpha_k^{\,i}|$ есть величина

$$\alpha^{-1} = \min\nolimits_\lambda \Big[\max\nolimits_\vartheta \Big(\Big|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j g_j(t, \vartheta)\Big|\Big), \ -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0\Big)\Big] \tag{4.31}$$

$$\text{при } \Sigma(\lambda_j\ \delta_{ij}) = \lambda_i = +1$$

и $\tau_k^{\,i}$ — точки $\vartheta \in [-\tau, 0]$, где величина

$$\Big|\sum_{j=1} \lambda_j^\circ g_j(t, \vartheta)\Big|$$

достигает максимума (λ_j° — решения задачи (4.31), число m может зависеть от t и i)

Пусть импульсная матрица $V(t, \vartheta)$ найдена согласно описанной процедуре. Тогда первое слагаемое оператора (4.18) принимает вид вектора

$$\Big\{\sum_{k=1}^{m(i)} \alpha_k^{\,i}(t)\, y(t - \tau_k^{\,i}(t))\Big\} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.32}$$

что может оказаться удобным для синтеза системы. Второе слагаемое, определенное по (4.24), также оказывается здесь в ряде случаев более удобным, чем в рассмотренных выше случаях.

Теперь можно выполнить построение уравнения (4.1), а вместе с тем — и проверку справедливости теоремы 4.1. Для этой цели следует подставить сначала в уравнения (4.15) найденное при решении задачи 4.1 оптимальное управление ζ° (4.9). Получим систему вида (4.33)

$$dx\,/\,dt = P(t)x(t) + B(t)\,u(t), \qquad du\,/\,dt = P^{(1)}(t)\,x(t) + B^{(1)}(t)\,u(t)$$

асимптотически устойчивую, удовлетворяющую условиям (4.16) и минимизирующую интеграл J_2 (4.4). Затем следует во второй группе уравнений (4.33) выразить $x(t)$ через $y(t + \vartheta)$ и $u(t + \vartheta)$ $(-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0)$ при помощи оператора $Y_{(1)}$ (4.17), (4.18). Тогда и получим закон регулирования в виде уравнения (4.1), где функции $A(t)$, $N(t, \vartheta)$, $M(t, \vartheta)$ выражаются известным образом через функции $P^{(1)}(t)$, $B^{(1)}(t)$, $Y(t, \vartheta)$, $K(t, \vartheta)$. Свойства функций A, N, M, о которых утверждает теорема 4.1, следуют из свойств $P^{(1)}$, $B^{(1)}$, $Y(t, \vartheta)$, $K(t, \vartheta)$, установленных выше. Теперь для завершения доказательства теоремы 4.1 достаточно заметить, что замкнутая система

$$\frac{dx}{dt} = P(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) \tag{4.34}$$

$$\frac{du}{dt} = A(t)\,u(t) + \int_{-\tau}^{0} \{N(t, \vartheta)\,Q[t+\vartheta]\,x(t+\vartheta) + M(t, \vartheta)\,u(t+\vartheta)\}\,d\vartheta$$

удовлетворяет условию (4.2) и требованию задачи 2.2 о минимальности интеграла J (2.9), так как аналогичными свойствами обладает система (4.33), и как бы ни были заданы начальные условия $x_0(t_0 + \vartheta)$, $u_0(t_0 + \vartheta)$ $(-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0)$ движения системы (4.34), это движение будет совпадать с некоторым движением системы (4.33), начиная с момента $t = t_0 + \tau$. Это следует непосредственно из описанного метода построения уравнения (4.1). Справедливость теоремы 4.1 проверена.

§ 5. Решение задач 1.1 и 1.2. Рассмотрим сначала задачу 1.1 и сформулируем теорему о решении этой задачи на основании решения ее по первому приближению, полученному в § 4.

Теорема 5.1. Если уравнения (2.4), (2.5) и (3.1) линейного приближения для уравнений (1.3) и (1.4) удовлетворяют условиям (3.2, τ) и (3.4, τ), то задача 1.1 имеет решение, получающееся из решения (4.1) этой задачи в линейном приближении 2.1.

В самом деле, согласно теореме 4.1, система (4.34), которая может быть построена при условиях (3.2, τ) и (3.4, τ), удовлетворяет условию (4.2) и имеет равномерно ограниченные коэффициенты. Система

$$\frac{dx}{dt} = p\,[t, x(t), u(t)] \tag{5.1}$$

$$\frac{du}{dt} = A(t)\,u(t) + \int_{-\tau}^{0} \{N(t, \vartheta)\,y(t+\vartheta) + M(t, \vartheta)\,u(t+\vartheta)\}\,d\vartheta \tag{5.2}$$

где вектор $y(t)$ определен равенством (1.4), отличается от системы (4.34) лишь членами, порядок малости которых по $x(t+\vartheta)$ и $u(t+\vartheta)$ равномерно выше первого (см. (2.3)). Согласно лемме 33.1 [5] (стр. 191) система (4.34) допускает функционал $v(t, x(\vartheta), u(\vartheta))$, удовлетворяющий оценкам типа оценок (33.4) — (33.6) (см. [5], стр. 192). Этот функционал сохраняет свои свойства функции Ляпунова в окрестности точки $x = 0$, $u = 0$ и для системы (5.1), (5.2) вследствие условия (2.3). Следовательно, движение $x = 0$, $u = 0$ асимптотически устойчиво в силу уравнений возмущенного движения (5.1), (5.2). Тем самым задача 1.1 решена и теорема 5.1 доказана.

Рассмотрим теперь задачу 1.2. Будем предполагать, что в окрестности точки $x = 0$, $u = 0$ вектор-функции $p\,[t, x, u]$, $q\,[t, x]$ и $\omega\,[t, x, u, \zeta]$ из уравнений (1.3), (1.4) и из функционала (1.8) разлагаются в степенные ряды с равномерно ограниченными по времени t непрерывными коэффициентами.

Тогда при условии разрешимости задачи 4.1 в форме уравнений (4.15), (4.9), обеспечивающих выполнение условия (4.16), существует и может быть построено в виде сходящегося степенного ряда по x и u уравнение

$$\frac{du}{dt} = A\,[t, x(t), u(t)] = P^{(1)}(t)\,x(t) + B^{(1)}(t)\,u(t) + \\ + \sum p_k^j(t)\,x_1^{j_1}(t)\ldots x_n^{j_n}(t)\,u_1^{k_1}(t)\ldots u_r^{k_r}(t) \tag{5.3}$$

$(k + j = 2, \ldots;\ j_1 + \ldots + j_n = j;\ k_1 + \ldots + k_r = k;\ p_k^j(t)$ — r-вектор-функция)

обеспечивающее асимптотическую устойчивость движения $x = 0$, $u = 0$ и минимум функционала (1.8) в силу системы уравнений (1.3), (5.3) возмущенного движения.

Этот результат об оптимальной нелинейной стабилизации, который будет здесь использован, был установлен впервые в работе [8] для стационарного случая и распространен затем [9] на общий нестационарный случай. Задача была решена методом функций Ляпунова с использованием идей динамического программирования. В И. Зубов сообщил автору, что аналогичный результат для нестационарного случая, был им выведен на основе классического вариационного исчисления.

Для решения задачи 1.2 потребуется еще один результат, относящийся к задаче о наблюдении нелинейной системы. Подробный разбор последней задачи выходит за рамки настоящей статьи и послужит материалом отдельной работы. Приведем здесь лишь необходимый для дальнейшего результат.

Рассмотрим нелинейную задачу, аналогичную задаче 4.2 о линейном наблюдении.

Задача 5.1. Найти оператор $Y\,[t, y(\vartheta), u(\vartheta)]$, определенный при $t \geqslant \tau$ на непрерывных вектор-функциях $\{y_j(\vartheta)\}$ $(j = 1, \ldots, l)$, $\{u_s(\vartheta)\}$ $(s = 1, \ldots, r)$, лежащих в достаточно малой окрестности точки $x = 0$ $u = 0$, и удовлетворяющий на решениях $x(t)$, $u(t)$ уравнения (1.3) (лежащих в этой окрестности) условию

$$x(t) = Y\,[t, y(t + \vartheta), u(t + \vartheta)] \tag{5.4}$$

где вектор $y(t)$ связан с $x(t)$ уравнением (1.4).

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 5.1. Пусть система (3.1), (2.5) первого приближения для уравнений (1.3), (1.4) удовлетворяет условию (3.4, τ). Тогда задача 5.1 имеет решение. Искомый оператор Y можно построить в виде ряда

$$Y\,[t, y(\vartheta), u(\vartheta)] = \sum_{k=1}^{\infty} Y_{(k)}[t, y(\vartheta), u(\vartheta)] \tag{5.5}$$

Первый член ряда (5.5) можно выбрать совпадающим с оператором $Y_{(1)}$, который строится по лемме 4.2 для задачи 4.2. Остальные члены ряда (5.5) будут определяться тогда из последовательного решения систем линейных алгебраических уравнений, причем k-й член ряда будет иметь в окрестности точки $x = 0$, $u = 0$ k-й порядок по x и u.

Из приведенных результатов следует утверждение.

Теорема 5.2. Пусть уравнения (2.4), (2.5) и (3.1) линейного приближения для уравнений (1.3) и (1.4) удовлетворяют условиям (3.2, τ) и (3.4, τ). Тогда задача 1.2 имеет решение в виде уравнения

$$du\,/\,dt = U\,[t, x(t + \vartheta), u(t + \vartheta)] \tag{5.6}$$

правая часть которого строится в виде ряда, сходящегося в достаточно малой окрестности точки $x = 0$, $u = 0$. Линейное приближение для уравнения (5.6) может быть выбрано в виде уравнения (4.1), разрешающего задачу 1.2 в первом приближении.

Для того чтобы убедиться в справедливости теоремы 5.2, достаточно выбрать в качестве уравнения (5.6) уравнение

$$du \,/\, dt = A\ [t, Y\ [t, y\ (t + \vartheta), u\ (t + \vartheta)], u\ (t)] \tag{5.7}$$

где вектор-функция A определена правой частью уравнения (5.3), оператор Y определен условием (5.4) и вектор $y\ (t)$ связан с вектором $x\ (t)$ уравнением (1.4).

На этом завершим здесь обсуждение возможности решения в нестационарном случае задач 1.1 и 1.2 на основании их первого приближения.

§ 6. Решение задачи 1.1 в стационарном случае. Решения задач 1.1 и 1.2 в стационарном случае, т. е. в случае, когда функции p, q и ω в (1.3), (1.4) и (1.8) или — только их первые приближения P, B, Q, $\omega_{(1)}$ — не зависят явно от времени t, получаются естественно как следствия из теорем 5.1 и 5.2, сформулированных в § 5 в общем случае. Однако здесь в стационарном случае можно указать и более общие достаточные условия разрешимости задач, чем те, что следуют непосредственно из 5.1 и 5.2. Приведем сначала прямые следствия из теорем 5.1, 5.2.

Пусть матрицы P, B, Q и квадратичная форма $\omega_{(1)}$ имеют постоянные коэффициенты p_{ij}, b_{ij}, q_{ij}, c_{ij}, d_{ij}, e_{ij}.

Определение 6.1. Уравнение (2.4) удовлетворяет условию (6.1, 0), если существует набор чисел j_k ($k = 1, \ldots, n$; $1 \leqslant j_k \leqslant n \times r$), для которого векторы $l\ [j_k]$ линейно независимы.

Здесь векторы $l\ [j]$ — столбцы матрицы (3.14), причем матрицы L_i в стационарном случае имеют вид

$$L_i = P^{i-1}B \tag{6.1}$$

Определение 6.2. Уравнения (3.1) и (2.5) удовлетворяют условию (6.2, 0), если существует набор чисел j_k ($k = 1, \ldots, n$; $1 \leqslant j_k \leqslant n \times l$), для которого векторы $r\ [j_k]$ линейно независимы.

Здесь векторы $r\ [j]$ — строки матрицы (3.22), причем матрицы R_i в стационарном случае имеют вид

$$R_i = QP^{i-1} \tag{6.2}$$

Следствие 6.1. Если стационарные уравнения (2.4) (2.5) и (3.1) линейного приближения для уравнений (1.3) и (1.4) удовлетворяют условиям (6.1, 0) и (6.2, 0), то задача 1.1 имеет решение. Уравнение (4.1), определяющее закон регулирования в линейном приближении, может быть выбрано стационарным. Если функции p и q в уравнениях (1.3), (1.4) не зависят явно от времени, то и нелинейный закон регулирования (5.2) может быть выбран стационарным.

Следствие 6.2. Пусть стационарные уравнения (2.4), (2.5), (3.1) удовлетворяют условиям (6.1, 0) и (6.2, 0). Тогда задача 1.2 имеет решение. Если функция $\omega_{(1)}$ также не зависит явно от времени, то линейное приближение (4.1) для оптимального закона регулирования является стационарным. Если функции p, q и ω в (1.3), (1.4) и (1.8) не зависят явно от времени, то и нелинейный закон регулирования (5.6) является стационарным.

Рассмотрим теперь задачу 1.1 в стационарном случае и сформулируем критерий ее разрешимости, учитывающий известную в стационарном случае структуру решений уравнения (3.1), подобно тому, как это сделано для задачи об аналитическом конструировании регулятора в статье [6].

Обозначим символом $L\ [j_1, \ldots, j_m]$ $(m \leqslant r)$ линейное подпространство n-мерного векторного пространства, порожденное векторами $l\ [j_k + s]$ $(k=1, \ldots, m;\ 1 \leqslant j_k \leqslant r;\ s = 0, r, 2r, \ldots, (n-1)\, r)$. Символом $R\ [1, \ldots, n]$ обозначим линейное подпространство, порожденное векторами $r\ [j]$ $(j = 1, \ldots, n \times l)$, т. е. $R\ [1, \ldots, n]$ — подпространство, порожденное всеми векторами-строками $r\ [j]$ матрицы R (3.22). Символом K_{+0} обозначим некоторое прямое дополнение до n-мерного векторного пространства $\{x\}$ к корневому подпространству K_- матрицы P, порожденному собственными числами ее с отрицательной действительной частью.

В случае простой структуры P подпространство K_{+0} является некоторым прямым дополнением к подпространству K_-, порожденному собственными векторами матрицы P, отвечающими корням ρ_i ее характеристического уравнения

$$|P - \rho E|_1^n = 0 \tag{6.3}$$

с отрицательными действительными частями.

В общем случае K_{+0} — некоторое прямое дополнение к подпространству K_- начальных условий x_0, порождающих те траектории $x\ (x_0,\ t)$ уравнения

$$dx\ /\ dt = Px \tag{6.4}$$

которые стремятся к точке $x = 0$ при $t \to \infty$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 6.1. Задача 2.1 разрешима, если можно указать набор чисел $j_1, \ldots, j_m$, для которого справедливо вложение

$$K_{+0} \subset L\ [j_1, \ldots, j_m] \subset R\ [1, \ldots, n] \tag{6.5}$$

Закон регулирования, стабилизирующий объект (2.4), можно выбрать в форме

$$\frac{du}{dt} = Au\,(t) + \int_{-\tau}^{0} \{N\,(\vartheta)\, y\,(t+\vartheta) + M\,(\vartheta)\, u\,(t+\vartheta)\}\, d\vartheta \tag{6.6}$$

где A — постоянная матрица, матрицы N и M непрерывны, τ — любое наперед выбранное положительное число.

Наметим доказательство теоремы. При этом достаточно рассмотреть случай, когда $L\ [j_1, \ldots, j_m]$ не совпадает со всем n-мерным пространством x_i $(i = 1, \ldots, n)$, ибо в противном случае теорема 6.1 вытекает из следствия 6.1. Итак, пусть размерность $L\ [j_1, \ldots, j_m]$ меньше n. Доказательство теоремы 6.1 проводится по тому же плану, что и доказательство теоремы 4.1, лишь с некоторыми особенностями, на которых здесь только кратко и остановимся. Прежде всего здесь следует сначала выполнить неособое линейное преобразование

$$x = Dx_* \tag{6.7}$$

выделяющее координаты $x_*^{[1]}$, управляемые воздействиями u_{j_k} $(k = 1, \ldots, m)$. (Подробный анализ преобразования (6.7) выходит за рамки этой статьи.) Преобразование (6.7) выбирается так, чтобы в новых координатах $x_* = \{x_*^{[1]}, x_*^{[2]}\}$ уравнение (2.4) распадалось на систему

$$\frac{dx_*^{[1]}}{dt} = P_{(1)} x_*^{[1]} + P_{(2)} x_*^{[2]} + B_{(1)} u_*^{[1]}, \qquad \frac{dx_*^{[2]}}{dt} = P_{(3)} x_*^{[2]} \qquad (u_*^{[2]} = 0) \tag{6.8}$$

где $x_*^{[1]}$ — s-вектор, $x_*^{[2]}$ — $(n-s)$-вектор, $u_*^{[1]}$ — m-вектор $\{u_k\}$, матрица $P_{(3)}$ имеет лишь собственные числа с отрицательными действительными частями, уравнение

$$dx_*^{[1]} / dt = P_{(1)} x_*^{[1]} + B_{(1)} u_*^{[1]} \tag{6.9}$$

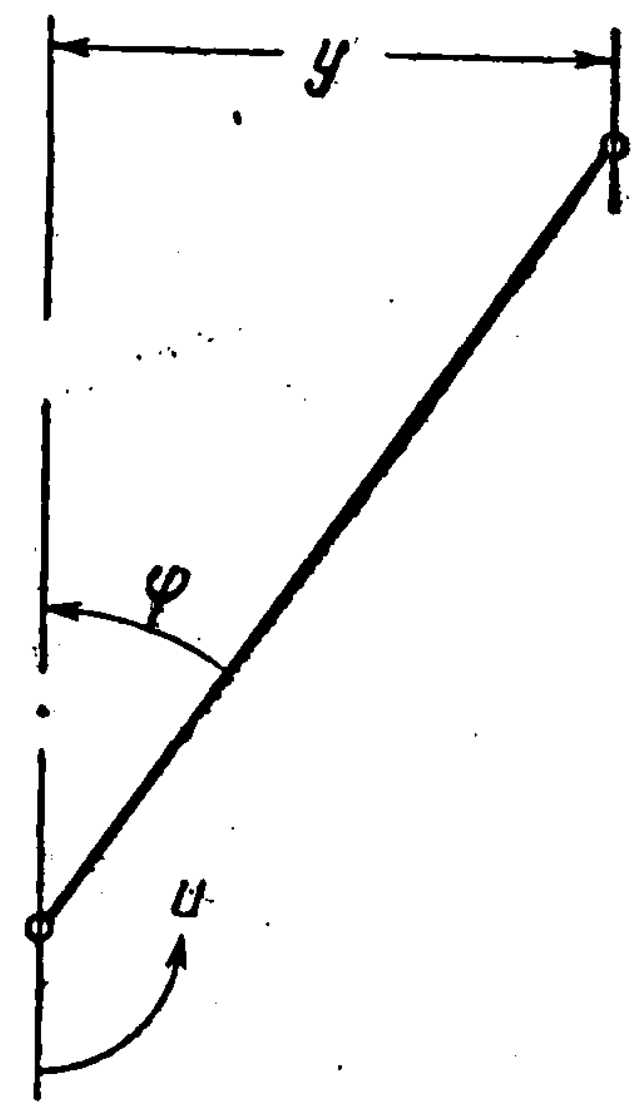
удовлетворяет условию (6.1, 0). Указанное разбиение (2.4) на (6.8) возможно вследствие левого вложения (6.5). Аналогичное преобразование введено в работе [6]. (Заметим, что в статье [6] имеется неточность, указанная В. И. Зубовым: при преобразовании вида (6.7) опущены некоторые члены. Эта неточность доказательства в [6], однако, может быть исправлена.) Система (6.9) вследствие (6.1, 0) может быть стабилизирована управлением

$$du_*^{[1]} / dt = P_{(1)}^{\circ} x_*^{[1]}(t) + B_{(1)}^{\circ} u_*^{[1]}(t) \tag{6.10}$$

решением для нее вспомогательной задачи 4.1. С другой стороны, можно проверить, что правое вложение (6.5) обеспечивает выполнение для уравнений (2.5) и (3.1) условий, при которых возможно отыскание оператора $Y_*\,[y(\vartheta), u(\vartheta)]$, удовлетворяющего условию

$$x_*^{[1]}(t) = Y_*\,[y(t+\vartheta), u(t+\vartheta)] =$$

$$= \int_{-\tau}^{0} \{Y_*(\vartheta)\, y(t+\vartheta) + K_*(\vartheta)\, u(t+\vartheta)\}\, d\vartheta \qquad (t \geqslant \tau)$$



Фиг. 1

где $y(t)$ связано с $x(t)$ соотношением (2.5), $x(t)$, $u(t)$ — движения системы (2.4) τ — любое наперед выбранное положительное число. Теперь можно проверить, что система

$$\frac{dx_*^{[1]}}{dt} = P_{(1)} x_*^{[1]}(t) + P_{(2)} x_*^{[2]}(t) + B_{(1)} u_*^{[1]}(t) + B_{(2)} u_*^{[2]}(t)$$

$$\frac{dx_*^{[2]}}{dt} = P_{(3)} x_*^{[2]}(t) + B_{(3)} u_*^{[2]}(t) \tag{6.11}$$

$$\frac{du_*^{[1]}}{dt} = B_{(1)}^{\circ} u_*^{[1]}(t) + \int_{-\tau}^{0} \{P_{(1)}^{\circ}\, [Y_*(\vartheta)\, y(t+\vartheta) + K_* u(t+\vartheta)]\}\, d\vartheta, \quad \frac{du_*^{[2]}}{dt} = -u_*^{[2]}$$

где $u_*^{[2]}$ — дополнение $u_*^{[1]}$ до вектора u_* удовлетворяет всем условиям теоремы 6.1, чем и завершается доказательство этой теоремы.

Из теоремы 6.1 выводится утверждение.

Теорема 6.2. Если стационарное уравнение первого приближения (2.4), (2.5) удовлетворяет условиям (6.5), то задача 1.1 имеет решение, причем стабилизирующий закон регулирования можно выбрать в форме уравнения (6.6).

§ 7. Пример. Рассмотрим простой иллюстрирующий пример. Пусть требуется стабилизировать маятник в верхнем неустойчивом положении равновесия за счет момента $u(t)$, приложенного на его оси, причем имеется возможность измерять лишь отклонение $y(t)$ маятника от вертикали, но не производную $\dot{y}(t)$ и не угловую скорость $\dot{\varphi}$ колебаний маятника (фиг. 1)

Обозначим $\varphi = x_1$, $\dot{\varphi} = x_2$. Тогда, нормируя, если надо, соответствующим образом масштабы времени, координат и усилий, запишем уравнения возмущенного движения (1.3) рассматриваемого объекта в виде

$$dx_1 / dt = x_2, \qquad dx_2 / dt = \sin x_1 + u \tag{7.1}$$

Уравнение (1.4) для сигнала обратной связи выбираем в виде

$$y(t) = \sin x_1(t) \tag{7.2}$$

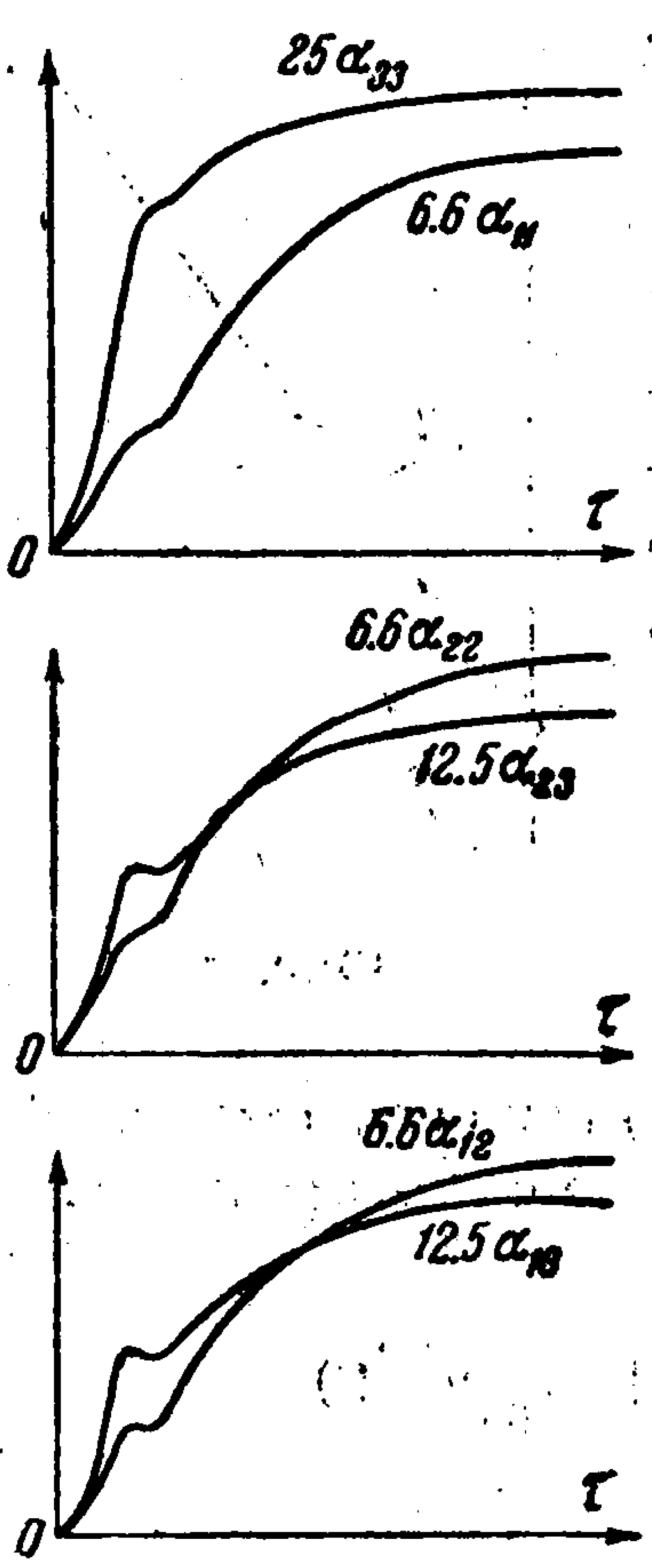
Задача состоит в выборе закона регулирования (5.2)

$$du / dt = au(t) + \int_{-\tau}^{0} (n(\vartheta) y(t+\vartheta) + m(\vartheta) u(t+\vartheta))\, d\vartheta \qquad (7.3)$$

при котором невозмущенное движение $x_1 = x_2 = u = 0$ асимптотически устойчиво в силу уравнений возмущенного движения (7.1), (7.2), (7.3).

Уравнения (2.4), (2,5) первого приближения для (7.1), (7.2) имеют вид

$$dx_1 / dt = x_2, \qquad dx_2 / dt = x_1 + u, \qquad y = x_1 \qquad (7.4)$$



Фиг. 2

Проверим выполнение условий (6.1, 0), (6.2, 0). Векторы l [1] и l [2] имеют вид

$$\left\|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\|, \quad \left\|\begin{matrix}0 & 1\\1 & 0\end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\|$$

и, следовательно, эти векторы линейно независимы. Условие (6.1, 0) выполнено (форма (3.16) имеет здесь вид $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$). Векторы r [1] и r [2] имеют вид

$$(1, 0), \qquad (1, 0) \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} = (0, 1)$$

и также независимы. Условие (6.2, 0) выполнено (форма (3.23) имеет вид $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$). Итак, можно решать задачу 4.1. Выберем форму $\omega_{(1)}$ в виде

$$\omega_{(1)} = x_1^2 + x_2^2 + u^2 + \zeta^2$$

и будем искать управление $\zeta^\circ [x_1, x_2, u]$, минимизирующее интеграл

$$I_2 = \int_0^\infty (x_1^2 + x_2^2 + u^2 + \zeta^2)\, dt$$

на движениях системы (7.4) и

$$du / dt = \zeta$$

Будем искать оптимальную функцию Ляпунова v° (4.5), (4.7) в форме

$$v^\circ = \alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{22}x_2^2 + \alpha_{33}u^2 + 2\alpha_{12}x_1x_2 + 2\alpha_{13}x_1u + 2\alpha_{23}x_2u \qquad (7.5)$$

где $\alpha_{ij} = \mathrm{const}$. Уравнения (4.8) принимают здесь вид (с заменой dt на $-dt$, что удобно для расчетов по методу [29] (см. выше стр. 651))

$$\begin{aligned} d\alpha_{11} / dt &= 2\alpha_{12} - \alpha_{13}^2 + 1, & d\alpha_{12} / dt &= \alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{13}\alpha_{23} \\ d\alpha_{22} / dt &= 2\alpha_{12} - \alpha_{23}^2 + 1, & d\alpha_{13} / dt &= \alpha_{23} + \alpha_{12} - \alpha_{33}\alpha_{13} \\ d\alpha_{33} / dt &= 2\alpha_{23} - \alpha_{33}^2 + 1, & d\alpha_{23} / dt &= \alpha_{13} + \alpha_{22} - \alpha_{33}\alpha_{23} \end{aligned} \qquad (7.6)$$

Следует найти такую неподвижную точку $\{\overset{\circ}{\alpha}_{ij}\}$ уравнений (7.6) (где $d\alpha_{ij} / dt = 0$), для которой форма v° (при $\alpha_{ij} = \overset{\circ}{\alpha}_{ij}$) является определенно положительной. Систему уравнений, которая получается из (7.6), при $d\alpha_{ij} / dt = 0$ в данном случае можно решить непосредственно. Приведем, однако, результаты расчетов, выполненных по методу [29], пригодному для более сложных систем высоких порядков. Приближенное решение задачи на модели МН-7 дало следующие значения:

$$\alpha_{11} = 11.17, \alpha_{22} = 10.05, \quad \alpha_{33} = 3.21, \quad \alpha_{12} = 9.88, \quad \alpha_{13} = 4.60, \quad \alpha_{23} = 4.60$$

(на фиг. 2, 3, 4 приведены осциллограммы соответствующих траекторий вспомогательной системы уравнений, имеющей ту же неподвижную точку α_{ij}, что и (7.6)).

Весьма точное значение величин $\overset{\circ}{\alpha}_{ij}$ дает расчет по методу [29] на универсальной машине.

На фиг. 5 приведены графики переходных кривых для уравнений (7.6), вычисленные на машине «Урал 1». Значения $\alpha_{ij}(t)$ при $t \to \infty$, дающие $\alpha_{ij}{}^\circ$, здесь таковы:

$$\alpha_{11}=11.1333433, \quad \alpha_{12} = 10.1333433, \quad \alpha_{22} = 10.1333433$$
$$\alpha_{13}= 4.6115817, \quad \alpha_{23} = 4.6115817, \quad \alpha_{33} = 3.1973682$$

Это намного превышает точность, потребную практически.

Искомое управление ζ° имеет здесь вид

$$\zeta^\circ = -(\alpha_{13}x_1 + \alpha_{23}x_2 + \alpha_{33}u) = -(4.6116x_1 + 4.6116x_2 + 3.1974u) \tag{7.7}$$

Следовательно, уравнение, разрешающее задачу 4.1, имеет вид

$$\frac{du}{dt} = -4.6116x_1 - 4.6116x_2 - 3.1974u \tag{7.8}$$

Теперь следует рассмотреть задачу 4.2. Так как координата $x_1(t)$ вследствие (7.4) в линейном приближении известна и значение ее может быть подано в регулятор, то вводить ее в закон регулирования (7.3) через $y(t+\vartheta)$, очевидно, в данном случае нет смысла. Будем предполагать, что эта величина $x_1(t)$ вводится в орган, формирующий $u(t)$ непосредственно. Это добавит лишь в уравнении (7.3) член вида $bx_1(t)$. Тогда нам достаточно определять через $y(t+\vartheta)$ $(-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0)$ лишь величину $x_2(t)$, т. е. следует в задаче 4.2 искать оператор $Y_{(1)}$, для которого

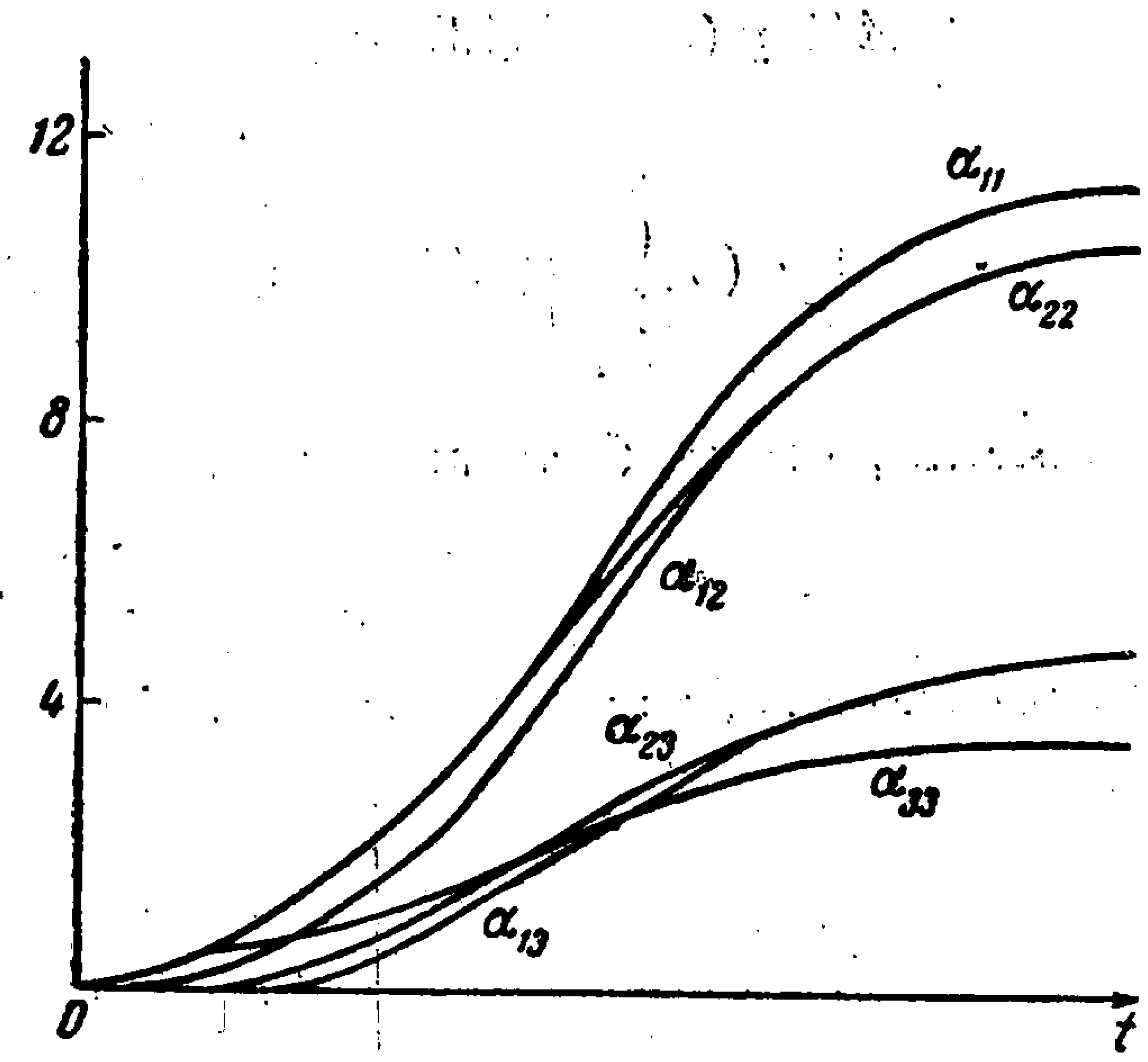
$$x_2(t) = Y_{(1)}[y(t+\vartheta), u(t+\vartheta)] = \int_{-\tau}^{0} \{Y(\vartheta)\, y(t+\vartheta) + K(\vartheta)\, u(t+\vartheta)\}\, d\vartheta \tag{7.9}$$

где $Y(\vartheta)$, $K(\vartheta)$ — скалярные функции, не зависящие явно от времени вследствие стационарности уравнений (7.4). Фундаментальная матрица $X[t, t+\vartheta]$ решений для уравнения (3.1), т. е.— в данном случае — для уравнения

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = x_1$$

имеет вид

$$X[t, t+\vartheta] = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\vartheta & \operatorname{sh}\vartheta \\ \operatorname{sh}\vartheta & \operatorname{ch}\vartheta \end{pmatrix} \tag{7.10}$$



Фиг. 3

Выберем $\tau = 1$. Тогда задача 4.3 трансформируется в задачу: найти функцию $V(\vartheta)$ $(-1 \leqslant \vartheta \leqslant 0)$, удовлетворяющую условию

$$x_{20} = \int_{-1}^{0} V(\vartheta)(x_{10} \operatorname{ch}\vartheta + x_{20} \operatorname{sh}\vartheta)\, d\vartheta$$

или

$$0 = \int_{-1}^{0} V(\vartheta) \operatorname{ch}\vartheta\, d\vartheta, \qquad 1 = \int_{-1}^{0} V(\vartheta) \operatorname{sh}\vartheta\, d\vartheta \tag{7.11}$$

В соответствии с (4.20) функцию $V(\vartheta)$ следует искать в виде

$$V(\vartheta) = \lambda_1 \operatorname{ch}\vartheta + \lambda_2 \operatorname{sh}\vartheta \tag{7.12}$$

Из (7.11) и (7.12) следуют уравнения для λ_1 и λ_2

$$\lambda_1 \int_{-1}^{0} \operatorname{ch}^2(\vartheta)\, d\vartheta + \lambda_2 \int_{-1}^{0} \operatorname{ch}\vartheta \operatorname{sh}\vartheta\, d\vartheta = 0$$

$$\lambda_1 \int_{-1}^{0} \operatorname{ch}(\vartheta) \operatorname{sh}(\vartheta)\, d\vartheta + \lambda_2 \int_{-1}^{0} \operatorname{sh}^2\vartheta\, d\vartheta = 1 \tag{7.13}$$

Отсюда $\lambda_1 = 7.358$, $\lambda_2 = 4.329$. Тогда в соответствии с (4.24) заключаем, что оператор (7.9) определяется функциями

$$Y(\vartheta) = 7.358 \operatorname{ch} \vartheta + 4.329 \operatorname{sh} \vartheta \qquad (7.14)$$

$$K(\vartheta) = \int_{-1}^{\vartheta} \{(7.358 \operatorname{ch} \eta + 4.329 \operatorname{sh} \eta) \operatorname{sh} (\eta - \vartheta)\} \, d\eta$$

Сопоставляя (7.8), (7.9) и (7.14), приходим к выводу, что стабилизирующий закон регулирования в линейном приближении имеет вид

$$\frac{du}{dt} = -4.6116 x_1(t) - 3.1974 u(t) - 4.6116 \int_{-1}^{0} \Big\{ (7.358 \operatorname{ch} \vartheta + {}$$

$$+ 4.329 \operatorname{sh} \vartheta) x_1(t + \vartheta) + \Big\{ \int_{-1}^{\vartheta} \{7.358 \operatorname{ch} \eta + 4.329 \operatorname{sh} \eta\} \operatorname{sh} (\eta - \vartheta) \, d\eta u(\vartheta) \Big\} d\vartheta$$

Замкнутая нелинейная система будет описываться уравнениями (7.1), (7.2) и

$$\frac{du}{dt} = -4.6116\, y(t) - 3.1974 u(t) - 4.6116 \int_{-1}^{0} \Big\{ (7.358 \operatorname{ch} \vartheta + 4.329 \operatorname{sh} \vartheta)\, y(t + \vartheta) + {}$$

$$+ u(\vartheta) \int_{-1}^{\vartheta} \Big\{ (7.358 \operatorname{ch} \eta + 4.329 \operatorname{sh} \eta\} \operatorname{sh} (\eta - \vartheta) \, d\eta) \Big\} d\vartheta \qquad (7.15)$$

Заметим, что стабилизация системы (7.1) при помощи уравнения

$$\frac{du}{dt} = au(t) + bx_1(t) \qquad (7.16)$$

здесь невозможна, так как характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\rho & 1 & 0 \\ 1 & -\rho & 1 \\ b & 0 & a - \rho \end{vmatrix} = 0$$

системы (7.4), (7.16) при любом выборе постоянных a и b имеет корни с положительной действительной частью, а следовательно, и соответствующая нелинейная система при любой добавке к (7.4), (7.16) нелинейных членов по $y(t)$ и $u(t)$ была бы неустойчива. Это обосновывает здесь необходимость введения последействия в закон регулирования (7.15), если предполагать, как мы и сделали при постановке задачи, невозможность непосредственного измерения величины $\dot{y}(t)$ (или $\dot{\varphi}(t)$) (вследствие наличия высокочастотной помехи, например).

Автор благодарит В. Е. Третьякова за выполнение расчетов, осциллограмм и графиков, приведенных в этом параграфе, и Ю. Ш. Гуревича за составление программы для машины «Урал 1».

Поступила 16 IV 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, 1950.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1956.
3. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. IV. Автоматика и телемеханика, 1961, т. XXII, № 4.
4. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления. Труды I Конгресса ИФАК, т. I. Изд-во АН СССР, 1961. Kalman R. E. New methods and Results in Linear Prediction and Filtering Theory. RIAS, Technical Report, 1961—1.
5. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, 1959

6. Кириллова Ф. М. К задаче об аналитическом конструировании регуляторов. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 3.
7. Курцвейль Я. К аналитическому конструированию регуляторов. Автоматика и телемеханика, 1961, т. XXII, № 6.
8. Альбрехт Э. Г. Об оптимальной стабилизации нелинейных систем. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 5.
9. Альбрехт Э. Г. К теории аналитического конструирования регуляторов. Тезисы докладов Межвузовской конференции по устойчивости движения и аналитической механике. Изд-во КАИ, Казань, 1962.
10. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. Гостехиздат, 1951.
11. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Изд. 2, Гостехиздат, 1950.
12. Гамкрелидзе Р. В. К теории оптимальных процессов. Докл. АН СССР, 1957, т. 116, вып. 1.
13. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.
14. La Salle I. P. Time optimal control systems. Proc. Nat. Akad. Sci. U. S. A., 1958, vol. 45, № 4.
15. Красовский Н. Н. К теории оптимального регулирования. Автоматика и телемеханика. 1957, т. XXVII, № 11.
16. Markus L., Lee E. B. On the existence of optimal controls. J. Basic Engr. (Trans ASME), 83 D (1961).
17. Кириллова Ф. М. О корректности постановки одной задачи оптимального регулирования. Изв. вузов МВО, 1958, № 4 (5).
18. Лидский Э. А. О стабилизации стохастических систем. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 5.
19. Красовский Н. Н. К проблеме существования оптимальных траекторий. Изв. вузов МВО, 1959, № 6 (13).
20. Красовский Н. Н. Об одной задаче оптимального регулирования нелинейных систем. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 2.
21. Красовский Н. Н. К теории оптимального регулирования. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 4.
22. Красовский Н. Н. Об одной задаче преследования. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 2.
23. Ройтенберг Я. Н. Некоторые задачи теории динамического программирования для нелинейных систем. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 3.
24. Ройтенберг Я. Н. О некоторых косвенных методах получения информации о положении управляемой системы в фазовом пространстве. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 3.
25. Пожарицкий Г. К. Об асимптотической устойчивости равновесий и стационарных движений механических систем с частичной диссипацией. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 4.
26. Красовский Н. Н., Лидский Э. А. Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами. Автоматика и телемеханика, 1962, т. XXII, вып. 9—11.
27. Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О. Некоторые вопросы математической теории процессов управления. ИЛ, 1962.
28. Лидский Э. А. Оптимальное регулирование систем со случайными свойствами. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 1.
29. Репин Ю. М., Третьяков В. Е. Решение задачи об аналитическом конструировании регулятора на моделирующих устройствах. Автоматика и телемеханика, 1963, т. XXIV, № 6.
30. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Гостехиздат, 1952.