Прикладная математика и механика, Т. XXVII, 1963

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ИСТОЧНИКОМ МОЩНОСТИ ПРИ ДВИЖЕНИИ ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ С АКТИВНЫМ СБРОСОМ МОЩНОСТИ

В. В. Токарев

(Москва)

Задача о построении оптимального закона уменьшения веса источника мощности (с соответствующим уменьшением мощности реактивной струи) при движении тела переменной массы в гравитационном поле изучалась ранее в работах [1-3]. Работа [1] содержит рассмотрение случая ступенчатого уменьшения мощности. В работе [2] исследовано непрерывное уменьшение мощности и продолжено рассмотрение ступенчатого уменьшения мощности. Результаты работы [3], в которой задача об оптимальном уменьшении мощности решается для постоянного ускорения от реактивной тяги, можно получить из работы [2] как частный случай.

Ниже задача, рассмотренная в работе [2], обобщается на случай, когда сбрасываемые секции источника мощности могут быть частично или полностью использованы в качестве рабочего вещества для создания тяги [1] (активный сброс мощности).

1. Формулировка вариационной проблемы. Система уравнений, описывающих движение тела переменной массы в гравитационном поле и изменение веса тела, может быть представлена в следующем виде

$$\dot{G}_m = -q_m, \qquad \dot{G}_N = -q_\nu, \qquad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{i}\,\frac{\sqrt{(2g/a)\,G_N N\,(q_m + \gamma q_\nu)}}{G_m + G_N + G_n} + \mathbf{R} \tag{1.1}$$

Здесь считается, что вес тела G распределен между запасом рабочего вещества G_m, источником мощности G_N и полезной нагрузкой G_n, при этом веса G_m и G_N предполагаются изменяющимися по времени t. Секундный весовой расход $q_m(t) \geqslant 0$ и γ-часть $(0 \leqslant \gamma(t) \leqslant \gamma_{\max} \leqslant 1)$ расхода $q_\nu(t) \geqslant 0$ используются для создания реактивной тяги. Веса G_m, G_N, G_n и расходы q_m, q_ν отнесены к начальному весу тела.

Мощность реактивной струи $N = qV^2 / 2$ (где V — скорость истечения) может изменяться от нуля до некоторого максимального значения. Максимальная величина мощности предполагается линейно связанной с весом источника мощности $N_{\max} = G_N / \alpha$ (где α — удельный вес источника мощности). Мощность N считается отнесенной к своему максимальному значению, так что $0 \leqslant N(t) \leqslant 1$.

Единичный вектор $\mathbf{i}(t)$ указывает направление тяги. Через $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ обозначены радиус-вектор и скорость тела, через $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{r}, t)$ и g — уско-

---

[1] Идея использования «лишних» частей системы в качестве рабочего вещества была высказана Ф. А. Цандером [4] в 1909 г.

рение от гравитационных сил в точке ($\mathbf{r}$, t) и величина ускорения силы тяжести на поверхности Земли соответственно. Комбинация

$$\sqrt{(2g/\alpha)\,G_N N\,(q_m+\gamma q_\nu)}\,/\,(G_m+G_N+G_n)=a \qquad (1.2)$$

представляет собой ускорение от тяги (тяга, деленная на текущую массу). Точка обозначает дифференцирование по времени.

Аналогично работе [2] ставится задача об отыскании минимального времени движения T при заданной величине полезной нагрузки G_n. Эта задача сводится к следующей вариационной проблеме для системы (1.1).

Из множества кусочно-непрерывных, кусочно-гладких функций выбрать такие управления

$$\begin{gathered}0\leqslant N(t)\leqslant 1,\qquad 0\leqslant\gamma(t)\leqslant\gamma_{\max},\qquad |\mathbf{i}(t)|\equiv 1\\ 0\leqslant q_m(t)<\infty,\qquad 0\leqslant q_\nu(t)<\infty\end{gathered} \qquad (1.3)$$

которые обеспечивали бы для заданных величин G_n, $\gamma_{\max}$ и α минимальное время T перехода системы (1.1) из заданного начального состояния [1]

$$G_{m0}+G_{N0}=1-G_n \qquad (t_0=0) \qquad (1.4)$$

в заданное конечное состояние

$$G_{m1}=0 \qquad (t_1=T) \qquad (1.5)$$

при условии

$$G_m(t)\geqslant 0,\qquad G_N(t)\geqslant 0 \qquad (1.6)$$

2. Состав оптимального управления. Сформулированная вариационная проблема представляет собой задачу о максимальном быстродействии. На первом этапе решения используется метод Л. С. Понтрягина [5, 6].

Помимо ограничений (1.3) на управляющие функции, рассматриваемая задача содержит еще и ограничения (1.6) фазовых координат. Внутри области ($G_m\geqslant 0$, $G_N\geqslant 0$) справедлив принцип максимума, согласно которому на оптимальном управлении гамильтонова функция

$$\begin{gathered}H=-p_m q_m-p_\nu q_\nu+\mathbf{p}_r\cdot\mathbf{v}+\mathbf{p}_v\cdot\mathbf{R}+p_t+\\ +(\mathbf{p}_v\cdot\mathbf{i})\sqrt{(2g/\alpha)\,G_N N\,(q_m+\gamma q_\nu)}\,/\,(G_m+G_N+G_n)\end{gathered} \qquad (2.1)$$

$$\left(\dot p_m=-\frac{\partial H}{\partial G_m},\quad \dot p_\nu=-\frac{\partial H}{\partial G_N},\quad \dot{\mathbf{p}}_r=-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}},\quad \dot{\mathbf{p}}_v=-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}},\quad \dot p_t=-\frac{\partial H}{\partial t}\right)$$

должна иметь абсолютный максимум по переменным $\mathbf{i}$, N, γ, q_m и q_ν, подчиненным условиям (1.3).

Что касается границы $G_N=0$, то она может достигаться только в конце управляемого движения; после выхода на эту границу тяга обра-

[1] Начальные и конечные условия для $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ не конкретизируются, считается только, что эти условия удовлетворяют всем требованиям, необходимым для применения принципа максимума [5,6].

щается в нуль и возможно лишь движение по инерции. Использование сбрасываемой части источника мощности в качестве рабочего вещества делает возможным движение по границе $G_m = 0$. Однако для этого участка, согласно [5], вид функции H и дифференциальные уравнения для импульсов p сохраняются, фазовые координаты и импульсы проходят через точку сопряжения непрерывно и принцип максимума оказывается применимым вдоль всей траектории.

Таким образом, оптимальное управление всюду определяется из условия максимума функции Гамильтона (2.1) по переменным $\mathbf{i}$, N, γ, q_m и q_ν с учетом ограничений (1.3). Единичный вектор $\mathbf{i}\ (t)$, входящий в четвертый член функции H, выбирается так, чтобы скалярное произведение $\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{i}$, перед которым стоит неотрицательный коэффициент, было максимально

$$\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{i} = |\,\mathbf{p}_v\,| \tag{2.2}$$

т. е. вектор тяги [1] должен быть направлен по вектору $\mathbf{p}_v$.

Из анализа того же члена с учетом условия (2.2) следует, что параметр γ и мощность N должны быть максимально возможными [2]

$$\gamma\ (t) = \gamma_{\max}, \qquad N\ (t) = 1 \tag{2.3}$$

После этого часть функции H, зависящая от управлений q_m и q_ν, может быть записана следующим образом [3]:

$$\mathrm{H}^* = - p_m\, q_m - p_\nu\, q_\nu - |\,\mathbf{p}_v\,|\sqrt{(2g/\alpha)\ G_N\ (q_m + \gamma\, q_\nu)}\,/\,(G_m + G_N + G_n) \tag{2.4}$$

Если один или оба импульса p_m, p_ν меньше нуля либо равны нулю, то оптимальное значение одного или обоих расходов q_m, q_ν обращается в бесконечность, т. е. нарушается условие кусочной непрерывности управлений. Если же $p_m > 0$ и $p_\nu > 0$, то оптимальные величины расходов конечны, зависят от знака функции

$$\Delta\ (t) = p_\nu\,(t) - \gamma\, p_m\ (t) \tag{2.5}$$

и определяются следующими соотношениями (см. Приложение 1):

$$\begin{aligned} q_m &= \frac{(g\,/\,\alpha)\ G_N\, p_v^2}{2p_m^2\,(G_m + G_N + G_n)^2}, \qquad q_\nu = 0 \qquad \text{при } \Delta > 0 \\ q_m &= 0, \qquad q_\nu = \frac{\gamma\,(g\,/\,\alpha)\ G_N\, p_v^2}{2p_\nu^2\,(G_m + G_N + G_n)^2} \qquad \text{при } \Delta < 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

В случае $\Delta\ (t) = 0$ условие максимума функции H^* не определяет каждого из расходов q_m и q_ν, а определяет только сумму $(q_m + \gamma\ q_\nu)$. В этом

[1] В особом случае $|\,\mathbf{p}_v\,(t)\,| = 0$ из формул (2.6) и (2.8) будет следовать, что расходы q_m и q_ν, а значит и тяга, равны нулю. Кроме вырожденного случая целиком пассивного движения, как будет видно из (5.8), $\mathbf{p}_v$ нигде в нуль не обращается.

[2] Для движения с постоянным весом источника мощности оптимальность полного использования мощности впервые доказана в работе [7]. В случае, когда максимальная мощность реактивной струи зависит от скорости истечения, граничный характер оптимального управления мощностью установлен в работе [8].

[3] Здесь и в дальнейшем под γ (без индекса) подразумевается максимальное значение $\gamma_{\max}$.

смысле случай $\Delta = 0$ является особым. На участках $\Delta(t) = 0$ оптимальные значения расходов удается установить при помощи условия $\dot{\Delta}(t) = 0$, из которого следует (см. Приложение 1):

$$G_m(t) + G_n = (1-2\gamma)\, G_N(t) \tag{2.7}$$

Это выражение, как нетрудно видеть, имеет смысл при $\gamma < 0.5$, $G_n < 0.5$. Совместно с условием максимума функции $\mathscr{H}$ оно дает

$$q_m = (1-2\gamma)\, q_\nu = \frac{(1-2\gamma)(g/\alpha)\, G_N\, p_v^2}{2(1-\gamma)\, p_m^2 (G_m + G_N + G_n)^2} \quad \text{при } \Delta = 0 \tag{2.8}$$

3. Оптимальное управление источником мощности. Согласно предыдущему разделу, мощность, которую источник сообщает реактивной струе, и доля γ расхода q_ν, используемая в качестве рабочего вещества должны быть максимально возможными [см. (2.3)]. Кроме того,

$$q_\nu = 0 \text{ при } \Delta > 0, \qquad q_m = (1-2\gamma)\, q_\nu \text{ при } \Delta = 0, \qquad q_m = 0 \text{ при } \Delta < 0$$

[см. (2.6), (2.8)]; т. е. на каждом участке оптимального движения уравнения (1.1) могут быть записаны через один из расходов q_m или q_ν. Этот расход заменяется на новую управляющую функцию a — ускорение от тяги (1.2). Тогда два векторных уравнения (1.1), определяющих траекторию движения, не будут содержать весовых параметров: $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$, $\dot{\mathbf{v}} = a\mathbf{i} + \mathbf{R}$, а уравнения (1.1), описывающие изменения весов G_m и G_N, будут выражаться через весовые параметры и квадрат ускорения от тяги

$$\dot{G}_m = -\frac{(G_m + G_N + G_n)^2}{G_N} \frac{\alpha}{2g} a^2, \quad G_N(t) = \text{const} \quad \text{при } \Delta(t) > 0 \tag{3.1}$$

$$\dot{G}_m = -4(1-\gamma)(G_m + G_n) \frac{\alpha}{2g} a^2, \quad G_N(t) = \frac{G_m(t) + G_n}{1-2\gamma} \quad \text{при } \begin{cases} \Delta(t) = 0 \\ \gamma < 0.5 \\ G_n < 0.5 \end{cases} \tag{3.2}$$

$$G_m(t) = \text{const}, \qquad \dot{G}_N = -\frac{(G_m + G_N + G_n)^2}{\gamma G_N} \frac{\alpha}{2g} a^2 \quad \text{при } \begin{cases} \Delta(t) < 0 \\ \gamma > 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Для того чтобы установить, из каких экстремалей (3.1) — (3.3) составляется оптимальный закон изменения веса, и определить чередование этих экстремалей, необходимо исследовать характер поведения функции $\Delta(t)$, задаваемой соотношением (2.5).

В начале движения

$$\Delta(0) = 1 - \gamma \tag{3.4}$$

так как из условия (1.4) на основании общей теории [5] следует [1], что

$$\text{либо } p_{m0} = p_{\nu 0} = -1, \qquad \text{либо } p_{m0} = p_{\nu 0} = 1$$

[1] При $t = 0$ обобщенный вектор импульсов должен быть нормален гиперплоскости (1.4). После соответствующей нормировки можно считать $p_{m0} = p_{\nu 0} = \pm 1$.

Первая возможность отпадает из-за обращения в бесконечность расходов q_m и q_ν (см. раздел 2). Поэтому $\Delta(0) > 0$ (кроме случая $\gamma = 1$, когда $\Delta(0) = 0$), и реализуется экстремаль типа (3.1).

В конце движения не задано значение веса G_{N1}, следовательно, $p_{\nu 1} = 0$. Производная от импульса p_m, определяемая по формулам (2.1) с учетом (2.2) и (2.3)

$$\dot{p}_m = |\mathbf{p}_v| \sqrt{(2g/\alpha)\, G_N (q_m + \gamma q_\nu)}\, / (G_m + G_N + G_n)^2 \tag{3.5}$$

всюду неотрицательна. Начальное значение этого импульса p_{m0} положительно, поэтому в конце движения

$$\Delta(T) = -\gamma p_{m1} < 0 \tag{3.6}$$

(кроме случая $\gamma = 0$, когда $\Delta(T) = 0$), и реализуется экстремаль типа (3.3). Причем вес G_m, постоянный на этой экстремали, по условию (1.5) обращается в нуль.

В дальнейшем могут иметь место два варианта (при $0 < \gamma < 1$).

1°. Производная $\dot{\Delta}$ всегда отрицательна, тогда оптимальный закон изменения веса состоит из экстремалей типа (3.1) и (3.3).

2°. Производная $\dot{\Delta}$ сначала отрицательна, затем при $\Delta = 0$ обращается в нуль и остается равной нулю на некотором отрезке времени. После того как G_m уменьшится до нуля, производная $\dot{\Delta}$ снова становится отрицательной и не меняет знака уже до конца движения. В соответствии с этим оптимальный закон изменения веса состоит из последовательно состыкованных экстремалей (3.1), (3.2) и (3.3).

Для всех остальных вариантов (см. Приложение 2) не выполняется условие (3.6).

В предельном случае $\gamma = 1$ начальное значение функции Δ равно нулю, поэтому изменение веса всюду определяется соотношением (3.3). Для другого предельного случая $\gamma = 0$, рассмотренного в работе [2], соотношение (3.3) не имеет смысла, и оптимальный закон изменения веса состоит либо только из (3.1), либо из (3.1) и (3.2).

Обратимся теперь к интегрированию уравнений (3.1) — (3.3). Переменные в каждом из этих уравнений разделяются, и квадратуры с учетом условия непрерывного сопряжения решений имеют вид:

для случая (3.1) + (3.3)

$$-G_{N0} \int_{G_{m0}}^{0} \frac{dG_m}{(G_m + G_{N0} + G_n)^2} - \gamma \int_{G_{N0}}^{G_{N1}} \frac{G_N\, dG_N}{(G_N + G_n)^2} = \Phi \tag{3.7}$$

для случая (3.1) + (3.2) + (3.3)

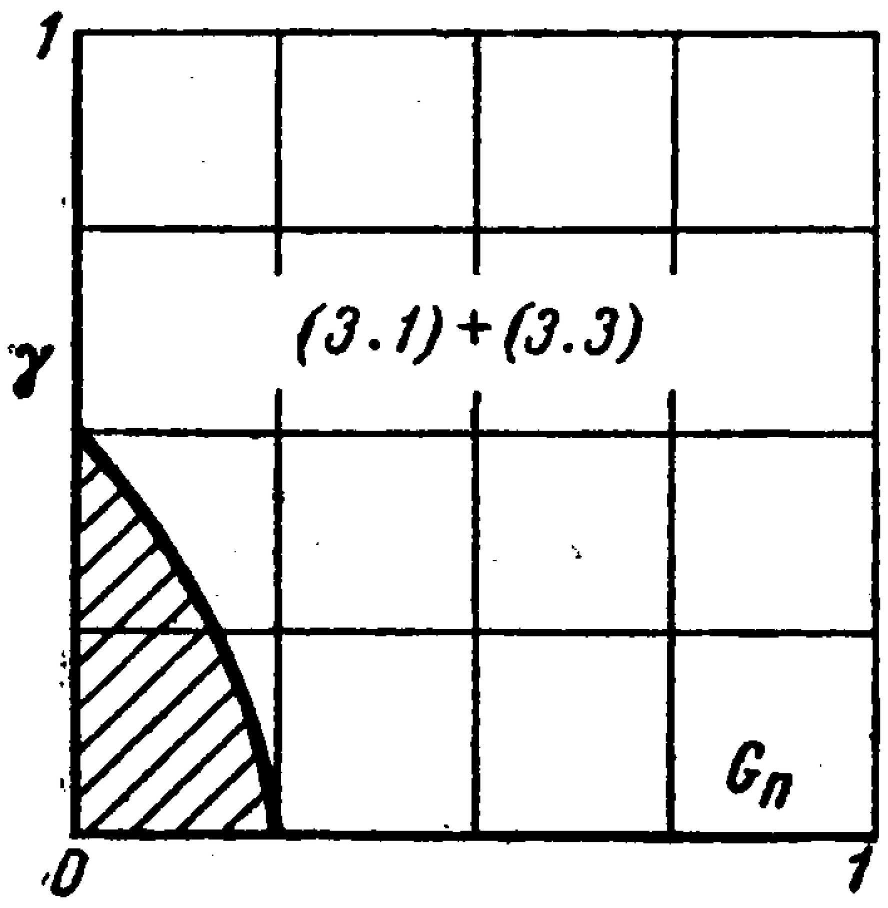
$$-G_{N0} \int_{G_{m0}}^{G_m^*} \frac{dG_m}{(G_m + G_{N0} + G_n)^2} - \frac{1}{4(1-\gamma)} \int_{G_m^*}^{0} \frac{dG_m}{G_m + G_n} - \gamma \int_{G_N^{**}}^{G_{N1}} \frac{G_N\, dG_N}{(G_N + G_n)^2} = \Phi \tag{3.8}$$

Здесь

$$\Phi = \frac{\alpha}{2g} \int_0^T a^2 dt, \qquad \begin{aligned} G_{m0} &= 1 - G_{N0} - G_n \\ G_m^* &= (1 - 2\gamma)\, G_{N0} - G_n \\ G_N^{**} &= G_n / (1 - 2\gamma) \end{aligned} \tag{3.9}$$

После вычисления интегралов (3.7), (3.8) устанавливается конечная связь между относительной полезной нагрузкой G_n, начальным G_{N0} и конечным G_{N1} значениями веса источника мощности, параметром γ и величиной функционала Φ. При этом G_n монотонно убывает с возрастанием Φ, что позволяет, разделить задачи оптимального программирования ускорения от тяги и оптимального управления источником мощности.

Оптимальная программа $\mathbf{a}(t) = a\mathbf{i}$ должна обеспечивать минимум времени T перемещения ($\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$, $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a} + \mathbf{R}$) из заданного начального в заданное конечное состояние при фиксированном значении интеграла



Фиг. 1

$$J = \int_0^T a^2 dt$$

(либо минимум интеграла J при фиксированном времени движения [1]).

Оптимальное управление источником мощности описывается соотношениями (2.3), (3.1) — (3.3), (3.7) и (3.8). Начальное и конечное значения веса источника мощности определяются из условия максимума функции $\Phi(G_n, \gamma, G_{N0}, G_{N1})$, задаваемой соотношениями (3.7) и (3.8), по переменным G_{N0} и G_{N1} при фиксированных значениях G_n и γ.

Для случая (3.1) + (3.3) эта процедура приводит к соотношениям

$$G_{N0} = {}^1/_2\gamma - G_n + \sqrt{{}^1/_4\gamma^2 + (1-\gamma)G_n}, \quad G_{N1} = 0 \tag{3.10}$$

а для случая (3.1) + (3.2) + (3.3)— к соотношениям

$$G_{N0} = 1/4(1-\gamma), \qquad G_{N1} = 0 \tag{3.11}$$

Рассмотрение проинтегрированных выражений (3.7) и (3.8), в которые подставлены оптимальные значения (3.10), (3.11) начального и конечного веса источника мощности [см. (3.14) и (3.15)], позволяет установить точные диапазоны реализации каждого типа решений.

Решение (3.1) + (3.3) имеет место в диапазонах

$$\begin{gathered}(1-2\gamma)/4(1-\gamma) \leqslant G_n \leqslant 1, \qquad 0 < \gamma \leqslant 0.5 \\ 0 \leqslant G_n \leqslant 1, \qquad 0.5 \leqslant \gamma < 1\end{gathered} \tag{3.12}$$

а решение (3.1) + (3.2) + (3.3) — в диапазоне

$$0 \leqslant G_n \leqslant (1-2\gamma)/4(1-\gamma), \qquad 0 < \gamma < 0.5 \tag{3.13}$$

---

[1] Эта задача рассматривается в работах [1,7]. Указанное разделение общей задачи сохраняется и при наличии ограничений на ускорение a; например, $a_{\min} \leqslant a(t) \leqslant a_{\max}$; $a(t) = a_0$, 0 и т. д. Однако, если ограничения наложены не прямо на ускорение, а на расход или на скорость истечения [8], то это свойство в общем случае не сохраняется. При отыскании в этих случаях оптимальной величины постоянного веса источника мощности $G_N(t) \equiv G_{N0}$ возникает методологическая трудность: требуется найти оптимальное значение постоянного параметра G_{N0}, который входит одновременно в правые части уравнений движения (1.1) и в граничные условия (1.4). В общей теории принципа максимума [5] получен критерий для выбора оптимальных значений параметров, входящих только в правые части уравнений. Указанную трудность можно обойти, введя уравнение $\dot{G}_{N0} = 0$ и рассматривая G_{N0} не как параметр, а как фазовую координату. Тогда задача с параметром сводится к задаче без параметра, для решения которой применим принцип максимума в его обычной формулировке.

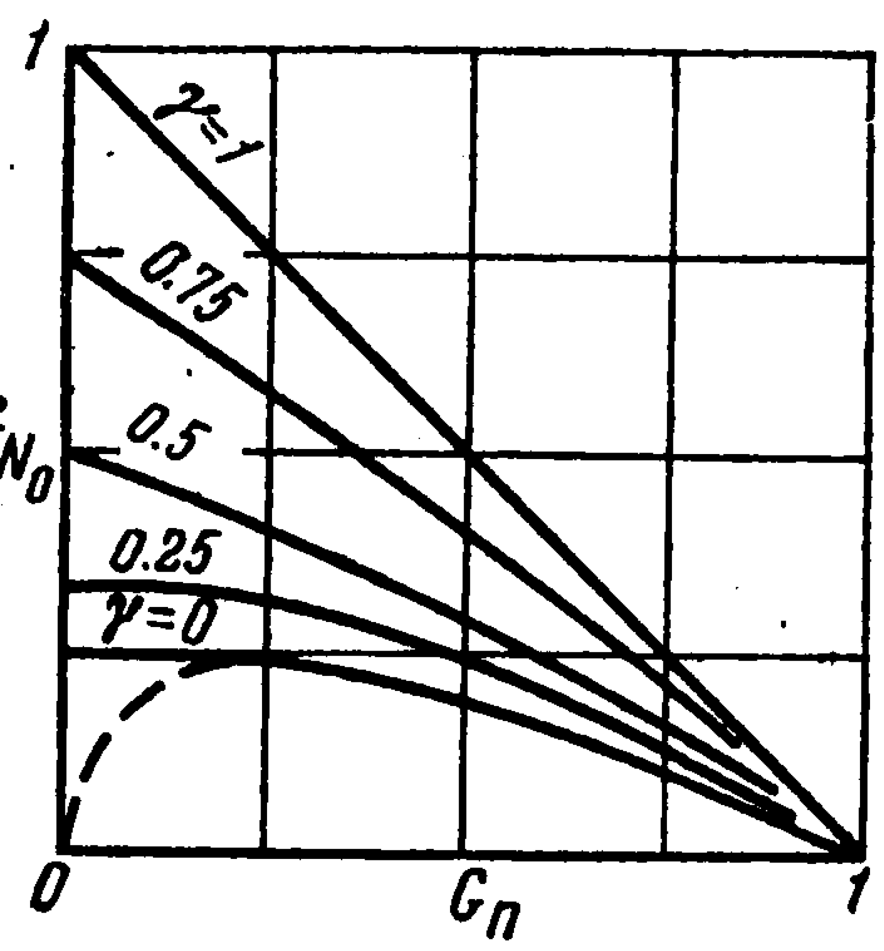
Области (3.12) и (3.13) показаны на фиг. 1. Штриховкой выделена область (3.13).

Для $\gamma = 1$ во всем диапазоне $0 \leqslant G_n \leqslant 1$ справедливо решение (3.3), а G_{N0} и G_{N1} определяются по формулам (3.10).

При $\gamma = 0$ в интервале $0.25 \leqslant G_n \leqslant 1$ реализуется решение (3.1), для которого

$$G_N(t) \equiv \sqrt{G_n} - G_n$$

а в интервале $0 \leqslant G_n \leqslant 0.25$ будем иметь решение (3.1) + (3.2), при этом $G_{N0} = 0.25$, $G_{N1} = G_n$.



Фиг. 2

На фиг. 2 представлена зависимость оптимальной величины начального веса источника мощности G_{N0} от полезной нагрузки G_n для различных значений γ. Кривые построены по формулам (3.10), (3.11) с учетом диапазонов их реализации [(3.12), (3.13). Пунктирный участок, продолжающий нижнюю кривую, и правая ветвь кривой относятся к случаю $G_N(t) \equiv \sqrt{G_n} - G_n$ (см. [1,7]).

Окончательное выражение для Φ через G_n и γ имеет вид

при $(1-2\gamma)/4(1-\gamma) \leqslant G_n \leqslant 1$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 0.5$ и при $0 \leqslant G_n \leqslant 1$, $0.5 \leqslant \gamma \leqslant 1$

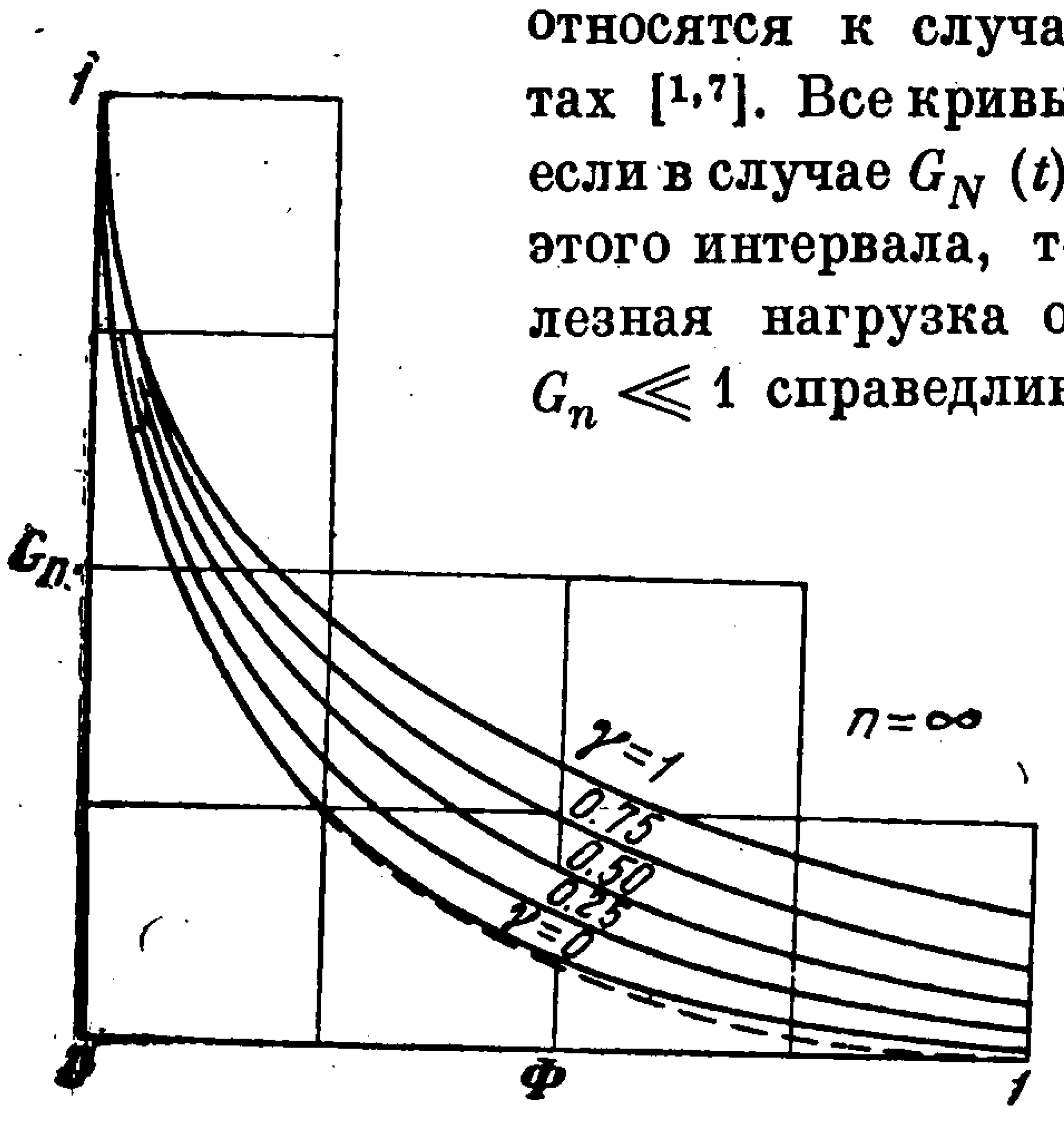
$$\Phi = (1-\gamma)(1 - G_n / \varkappa) - \gamma \ln G_n + G_n + \gamma \ln \varkappa - \varkappa \tag{3.14}$$

$$\left(\varkappa = {}^1/_2\,\gamma + \sqrt{{}^1/_4\,\gamma^2 + (1-\gamma)\,G_n}\right)$$

при $0 \leqslant G_n \leqslant (1-2\gamma)/4(1-\gamma)$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 0.5$

$$\Phi = \frac{1-2\gamma}{4(1-\gamma)} - \gamma \ln \frac{1-2\gamma}{2(1-\gamma)} - \frac{1}{4(1-\gamma)} \ln \frac{4G_n(1-\gamma)}{1-2\gamma} \tag{3.15}$$

Зависимость относительной полезной нагрузки G_n от величины функционала Φ для фиксированных значений γ представлена на фиг. 3. Нижняя сплошная кривая соответствует случаю $\gamma = 0$, рассмотренному в работе [2]. Эта же кривая (в диапазоне $0 \leqslant \Phi \leqslant 0.25$) и продолжающая ее пунктирная кривая (в диапазоне $0.25 \leqslant \Phi \leqslant 1$) относятся к случаю постоянного веса G_N, рассмотренному в работах [1,7]. Все кривые представлены в интервале $0 \leqslant \Phi \leqslant 1$. Однако, если в случае $G_N(t) \equiv \sqrt{G_n} - G_n$ функция $G_n(\Phi)$ теряет смысл вне этого интервала, то для оптимально меняющегося веса $G_N(t)$ полезная нагрузка определена на всей полуоси $0 \leqslant \Phi < \infty$ и для $G_n \ll 1$ справедливы приближенные формулы:



Фиг. 3

при $0 \leqslant \gamma < 0.5$

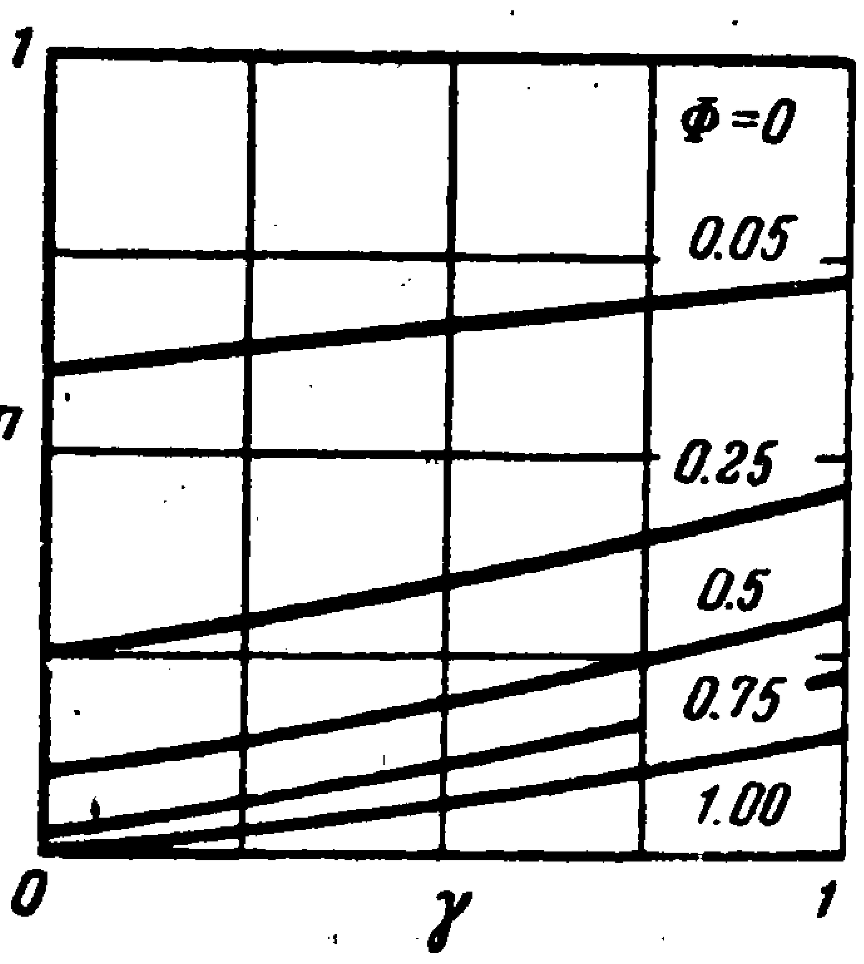
$$G_n \approx \frac{1-2\gamma}{4(1-\gamma)} \exp\left[-4(1-\gamma)\Phi\right] \tag{3.16}$$

при $0.5 \leqslant \gamma \leqslant 1$

$$G_n \approx \exp(-\Phi / \gamma) \tag{3.17}$$

Зависимость полезной нагрузки от параметра γ при малых значениях Φ ($0 \leqslant \Phi \lesssim 0.5$) близка к линейной (фиг. 4), а при больших переходит в экспоненциальную (3.16), (3.17).

Из сравнения верхней кривой фиг. 3 ($\gamma = 1$) с нижней сплошной кривой, относящейся к случаю пассивного сброса мощности ($\gamma = 0$), следует, что при одних и тех же значениях функционала Φ использование сбрасываемых секций источника мощности в качестве рабочего вещества (активный сброс мощности $\gamma > 0$) существенно увеличивает полезную нагрузку: при $\Phi = 0.05$ — в 1.2 раза, при $\Phi = 0.25$ — в 1.8 раза, при $\Phi = 0.5$ — более чем в 3 раза, при $\Phi = 0.75$ — в 7 раз, при $\Phi = 1$ — в 15 раз.

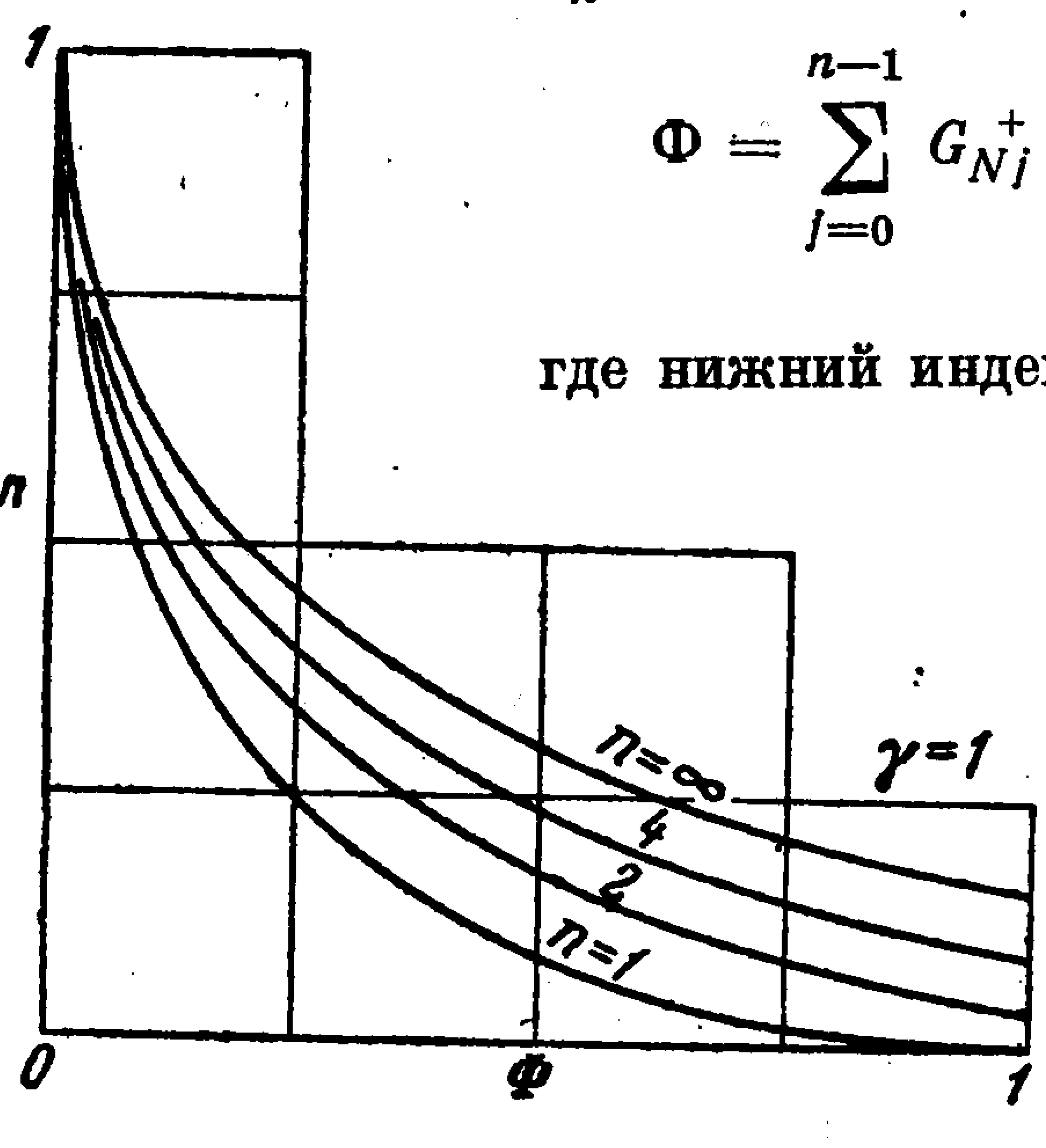


Фиг. 4

Однако сравнение полезной нагрузки при одних и тех же значениях функционала $\Phi = (\alpha \,/\, 2g)\, J$ [см. (3.9)] дает завышенные результаты. Естественно предположить существование возрастающей зависимости удельного веса источника мощности α от параметра γ, что увеличит значение Φ при фиксированной величине J. Знание зависимости $\alpha\,(\gamma)$ позволит решить задачу о выборе оптимального значения γ, обеспечивающего максимум полезной нагрузки при заданной величине интеграла J.

4. Ступенчатое уменьшение веса источника мощности. Рассмотренный выше случай непрерывного уменьшения веса источника мощности соответствует бесконечно большому числу секций ($n = \infty$ на фиг. 3). Интересно сравнить этот предельный случай со случаем конечного числа секций, как это сделано в работе [2] для $\gamma = 0$.

Пусть в момент времени t_j сбрасывается j-я секция источника, а в интервале $(t_j,\, t_{j+1})$ вес источника остается постоянным. Мощность N и параметр γ, как и раньше, должны быть максимально возможными. Изменение веса тела описывается уравнением (3.1). Интегрируя это уравнение по участкам от t_j до t_{j+1} ($j = 0, 1, \ldots, n-1$; $t_n = T$) и складывая, получаем



Фиг. 5

$$\Phi = \sum_{j=0}^{n-1} G_{Nj}^{+} \left(\frac{1}{G_{mj+1}^{-} + G_{Nj}^{+} + G_n} - \frac{1}{G_{mj}^{+} + G_{Nj}^{+} + G_n} \right) \tag{4.1}$$

где нижний индекс j указывает на момент времени t_j, а верхний значок плюс или минус относится к значению функции справа или слева от момента времени t_j.

Учтя соотношения на разрывах для запаса рабочего вещества

$$G_{mj}^{+} = G_{mj}^{-} + \gamma\,(G_{Nj}^{-} - G_{Nj}^{+}) \qquad (j = 1, \ldots, n-1)$$

и условие постоянства веса источника мощности между моментами сброса

$$G_{Nj}^{-} = G_{Nj-1}^{+} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

перепишем выражение (4.1) в таком виде

$$\Phi = \sum_{j=0}^{n-1} G_{Nj}^{+} \left(\frac{1}{G_{mj+1}^{-} + G_{Nj}^{+} + G_n} - \frac{1}{G_{mj}^{-} + \gamma G_{Nj-1}^{+} + (1-\gamma)\, G_{Nj}^{+} + G_n} \right) \tag{4.2}$$

Здесь

$$G_{N(-1)}^{+} = G_{N0}^{+} = G_{N0}, \qquad G_{m0}^{-} = G_{m0}, \qquad G_{mn}^{-} = G_m\,(T) = 0$$

Вычислив частную производную $\partial\Phi \,/\, \partial G_n$, можно убедиться, что функция $\Phi(G_n)$ монотонно убывающая. Поэтому задачу об отыскании максимума G_n при заданной величине Φ можно свести к нахождению таких значений

$$G_{Nj}^{+}, \quad G_{mj}^{-} \qquad (j = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{4.3}$$

которые обеспечили бы максимум функции Ф при фиксированном значении G_n и удовлетворяли бы условиям

$$G_{m0} + G_{N0} = 1 - G_n, \qquad G_{Nj}^+ \leqslant G_{Nj-1}^+$$

Для определения $2n$ неизвестных величин (4.3) получаем систему $2n$ алгебраических уравнений (при $0 \leqslant \gamma < 1$)

$$(G_{mj}^- + G_{Nj-1}^+ + G_n)\sqrt{G_{Nj}^+} = (G_{mj}^- + \gamma G_{Nj-1}^+ + (1-\gamma)G_{Nj}^+ + G_n)\sqrt{G_{Nj-1}^+}$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial G_{mj}^-} = 0\right)$$

$$\frac{G_{mj+1}^- + G_n}{(G_{mj+1}^- + G_{Nj}^+ + G_n)^2} + \frac{\gamma G_{Nj+1}^+}{(G_{mj+1}^- + \gamma G_{Nj}^+ + (1-\gamma)G_{Nj+1}^+ + G_n)^2} =$$

$$= \frac{G_{mj}^- + \gamma G_{Nj-1}^+ + G_n}{(G_{mj}^- + \gamma G_{Nj-1}^+ + (1-\gamma)G_{Nj}^+ + G_n)^2} \qquad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial G_{Nj}^+} = 0\right)$$

$$\frac{G_{m1}^- + G_n}{(G_{m1}^- + G_{N0}^+ + G_n)^2} + \frac{\gamma G_{N1}^+}{(G_{m1}^- + \gamma G_{N0}^+ + (1-\gamma)G_{N1}^+ + G_n)^2} = 1 \qquad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial G_{N0}^+} = 0\right)$$

$$G_{m0}^- + G_{N0}^+ = 1 - G_n \qquad (j = 1, \ldots, n-1)$$

В предельном случае $\gamma = 1$ соответствующие уравнения имеют простое решение

$$\begin{aligned} G_{m0}^- &= G_{m0} = 1 - G_n^{1/(n+1)}, \qquad G_{mj}^- = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n-1) \\ G_{Nj}^+ &= G_n^{(j+1)/(n+1)} - G_n \qquad (j = 0, 1, \ldots, n-1;\ \gamma = 1) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Подставляя соотношения (4.4) в формулу (4.2), получим связь между максимальной полезной нагрузкой G_n и величиной функционала Ф

$$\Phi = (n+1)(1 - G_n^{1/(n+1)}) + G_n - 1 \qquad \text{при } \gamma = 1 \tag{4.5}$$

При $n \to \infty$ эта формула переходит в (3.14). Соотношение (4.5) представлено на фиг. 5 в виде зависимости G_n (Ф) для $n = 1, 2, 4, \infty$. Из фигуры видно, что переход от $n = 1$ к $n = 2$ реализует приблизительно $^1/_3$ максимально возможного выигрыша в полезной нагрузке, а переход к $n = 4$ —приблизительно $^2/_3$. Остальная треть реализуется переходом от $n = 4$ к $n = \infty$. В случае $\gamma = 0$, рассмотренном в работе [2], при $n = 2$ реализуется подавляющая часть выигрыша. Интересно отметить, что ступенчатое уменьшение веса источника мощности отодвигает верхнюю границу диапазона допустимых значений функционала Ф до $\Phi = n$ ($G_n = 0$ при $\Phi = n$).

5. Приложение 1. Определение оптимальных расходов q_m и q_ν производится из условия абсолютного максимума функции H^* в каждый момент времени по независимым переменным $0 \leqslant q_m < \infty$, $0 \leqslant q_\nu < \infty$.

Импульсы p_m и p_ν, входящие в выражение (2.4) для функции H^*, вдоль оптимального решения должны быть строго больше нуля

$$p_m(t) > 0, \qquad p_\nu(t) > 0 \tag{5.1}$$

В противном случае из условия максимума H^* последует либо $q_m = \infty$ либо $q_\nu = \infty$ (или то и другое вместе). Все это противоречит условию конечности расходов.

Введем суммарный расход

$$q = q_m + \gamma q_\nu \quad (0 \leqslant q < \infty,\ 0 \leqslant q_m < q,\ 0 \leqslant q_\nu \leqslant q/\gamma) \tag{5.2}$$

и запишем с его помощью функцию H^* в таком виде

$$H^* = -p_m q_m + |\mathbf{p}_v| \sqrt{(2g/\alpha)\, G_N q} \,/\, (G_m + G_N + G_n) - (p_\nu - \gamma p_m)\, q_\nu \qquad (5.3)$$

Отсюда видно, что оптимальное распределение суммарного расхода q между составляющими q_m и q_ν определяется знаком комбинации $\Delta = -p_\nu - \gamma p_m$.

В самом деле, если $\Delta > 0$, то максимум H^* по q_ν достигается при $q_\nu = 0$; а если $\Delta < 0$, то при $q_\nu = q / \gamma$, т. е. при $q_m = 0$. В случае $\Delta = 0$ функция H^* не зависит от каждого из расходов q_m и q_ν по отдельности, а определяется суммарным расходом q. Таким образом, в каждом из трех возможных случаев функция H^* зависит только от одного из управлений q_m, q_ν или q

$$H_1^* = -p_m q_m + |\mathbf{p}_v| \sqrt{(2g/\alpha)\, G_N q_m} \,/\, (G_m + G_N + G_n) \qquad \text{при } \Delta > 0 \ (q_\nu = 0)$$

$$H_2^* = -p_\nu q_\nu + |\mathbf{p}_v| \sqrt{(2g/\alpha)\, G_N \gamma q_\nu} \,/\, (G_m + G_N + G_n) \qquad \text{при } \Delta < 0 \ (q_m = 0)$$

$$H_3^* = -p_m q + |\mathbf{p}_v| \sqrt{(2g/\alpha)\, G_N q} \,/\, (G_m + G_N + G_n) \qquad \text{при } \Delta = 0 \qquad (5.4)$$

Из условий стационарности $\partial H_1^* / \partial q_m = 0$ и $\partial H_2^* / \partial q_\nu = 0$, которые здесь соответствуют условию абсолютного максимума, получаем необходимые соотношения (2.6), определяющие оптимальные управления q_m и q_ν при $\Delta > 0$ и при $\Delta < 0$.

При $\Delta = 0$ из условия $\partial H_3 / \partial q = 0$ следует

$$q_m + \gamma q_\nu = \frac{(g/\alpha)\, G_N p_v^2}{2 p_m^2 (G_m + G_N + G_n)^2} \qquad \text{при } \Delta = 0 \qquad (5.5)$$

Когда Δ обращается в нуль не в изолированных точках, а на некотором конечном отрезке времени (а именно такой случай будет действительно особым), то производная $\dot{\Delta}$ также равна нулю на этом интервале

$$\dot{\Delta} = \dot{p}_\nu - \gamma \dot{p}_m = \frac{1}{2} \dot{p}_m \left(1 - 2\gamma - \frac{G_m + G_n}{G_N}\right) = 0 \qquad (5.6)$$

Исследуем два возможных варианта.

Первый $\dot{p}_m = 0$. Из (3.5) с помощью (5.5) исключаем $(q_m + \gamma q_\nu)$

$$\dot{p}_m = \frac{(g/\alpha)\, G_N}{(G_m + G_N + G_n)^3} \frac{p_v^2}{p_m^2} \qquad (5.7)$$

Для обращения этого выражения в нуль необходимо или $G_N = 0$ или $\mathbf{p}_v = 0$. В том и в другом случае движение будет происходить по инерции без тяги, так как расходы q_m и q_ν, согласно (2.6), (5.5), обратятся в нуль. При этом и та и другая ситуация будут сохраняться до конца движения. Для $G_N = 0$ это не требует пояснений, а импульс $\mathbf{p}_v$, как это следует из уравнений (2.1)

$$\dot{\mathbf{p}}_v = -\mathbf{p}_r, \qquad \dot{\mathbf{p}}_r = -\mathbf{p}_v \cdot \partial \mathbf{R} / \partial \mathbf{r} \qquad (5.8)$$

может обращаться в нуль только тождественно, вдоль всей траектории. Этот случай вырожденный, так как движение будет целиком пассивным.

Таким образом, обращение функции Δ в нуль из-за равенства нулю $\dot{p}_m$ возможно лишь в конце управляемого движения, когда G_N обращается в нуль, т. е. производную $\dot{p}_m$ можно считать всюду положительной.

Остается второй вариант

$$1 - 2\gamma - (G_m + G_n) / G_N = 0 \qquad (5.9)$$

Это выражение означает пропорциональное изменение веса источника мощности G_N и запаса рабочего вещества G_m. Совместно с соотношением (5.5) оно дает формулу (2.8), определяющую оптимальные управления q_m и q_ν при $\Delta = 0$.

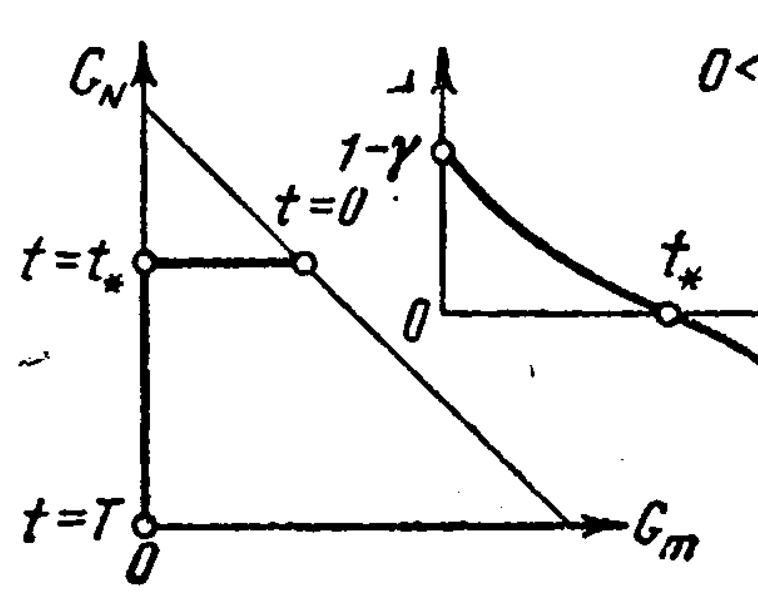
6. Приложение 2. Чередование экстремалей (3.1) — (3.3) определяется знаком функции $\Delta(t)$ из (2.5). Сначала рассмотрим промежуточный случай $0 < \gamma < 1$. Из оптимальных граничных условий для импульсов (3.4), (3.6) следует, что начальное значение функции Δ больше нуля, а конечное — меньше нуля ($\Delta(0) > 0$, $\Delta(T) < 0$). Нужно исследовать характер поведения этой функции внутри интервала $[0, T]$.

Производная от функции Δ по времени определяется соотношением (5.6). Как показано в предыдущем разделе, производная $\dot{p}_m$ положительна.

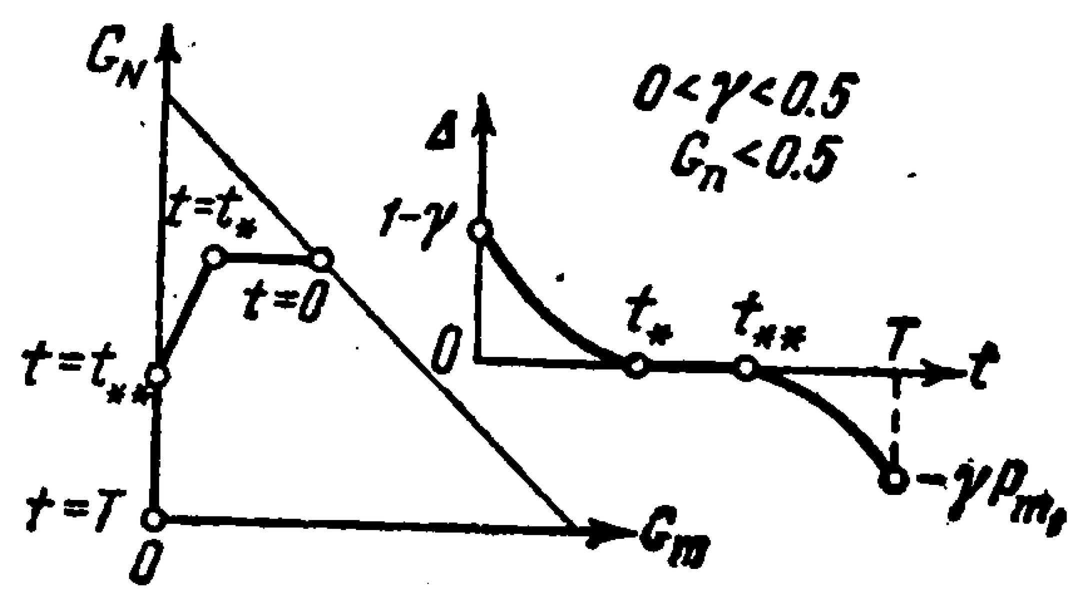
Следовательно, смена знаков функции Δ зависит от комбинации

$$\chi = 1 - 2\gamma - (G_m + G_n) / G_N \tag{6.1}$$

В начале движения $\Delta(0) > 0$ (3.4), поэтому изменение веса происходит по уравнению (3.1). Согласно (3.1), вес G_N остается постоянным, а G_m убывает, т. е. χ вдоль



Фиг. 6

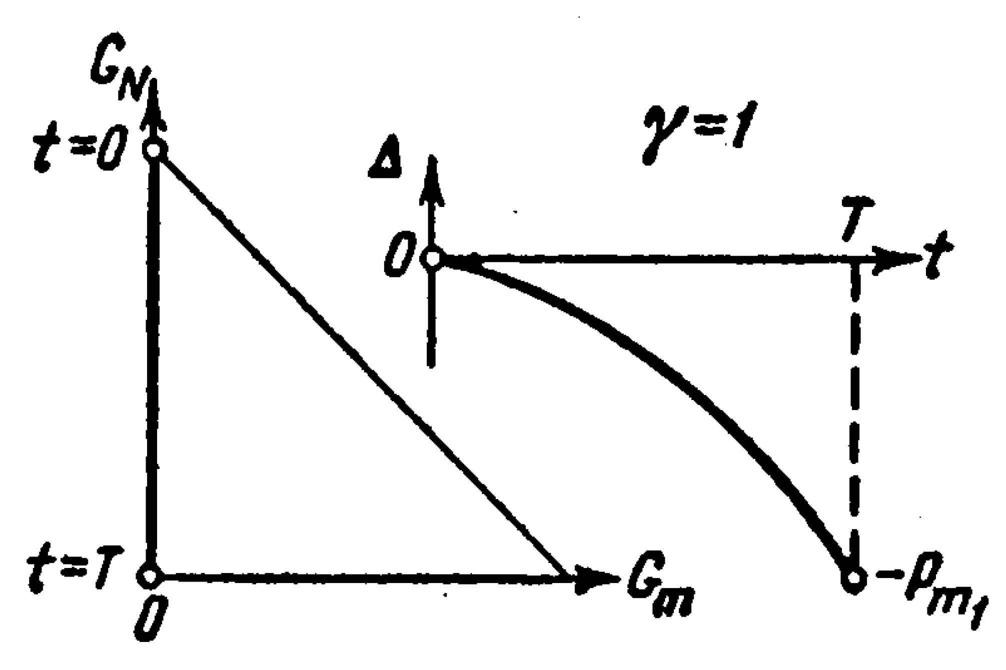


Фиг. 7

(3.1) возрастает. Если предположить, что $\dot{\Delta}(0) \geqslant 0$, то конечное значение $\Delta(T)$ окажется положительным, ибо $\Delta(0) > 0$ и $\dot{\Delta}(t) \geqslant 0$ (вследствие возрастания χ). Положительность же $\Delta(T)$ противоречит условию (3.6).

Таким образом, производная функции Δ в начале движения отрицательна. Исследуем все возможные ситуации, которые могут иметь место в дальнейшем.

1°. Производная $\dot{\Delta}(t)$ всюду остается отрицательной. Тогда $\Delta(t)$ в некоторый момент времени $t = t_*$ пересечет ось t (так как $\Delta(0) > 0$, а $\Delta(T) < 0$). На первом интервале $0 \leqslant t \leqslant t_*$ будет иметь место уравнение (3.1), согласно которому $G_N(t) \equiv G_{N0}$, а на втором $t_* \leqslant t \leqslant T$ — уравнение (3.3), вдоль которого $G_m(t) \equiv G_m(t_*)$ (см. фиг. 6). Причем $G_m(t_*) = 0$ так как по условию (1.5) $G_m(T) = 0$.



Фиг. 8

2°. Производная $\dot{\Delta}(t)$ обращается в нуль при $\Delta(t) = 0$ ($t = t_*$). В интервале $0 \leqslant t \leqslant t_*$ изменение веса происходит по уравнению (3.1). При $t = t_*$ оно сменяется на (3.2). Согласно (3.2), веса G_m и G_N меняются пропорционально, так что χ и $\dot{\Delta}$ остаются равными нулю. В некоторый момент времени $t = t_{**}$ вес G_m обращается в нуль. После этого может меняться только G_N. Функция Δ (а значит и $\dot{\Delta}$) с уменьшением G_N снова станет отрицательной. Функция Δ перейдет в отрицательную область, и управление весом будет осуществляться по уравнению (3.3) (см. фиг. 7).

3°. Производная $\dot{\Delta}(t)$ обращается в нуль при $\Delta(t) > 0$. В области $\Delta > 0$ веса меняются по уравнению (3.1), согласно которому χ возрастает. Поэтому после обращения в нуль производная $\dot{\Delta}$ станет положительной и функция Δ никогда не попадает в область отрицательных значений, что противоречит условию (3.6).

4°. Производная $\dot{\Delta}(t)$ обращается в нуль при $\Delta(t) < 0$. Эта возможность также отпадает, так как в области $\Delta < 0$ функция χ должна убывать, согласно (3.3) и (6.1). А чтобы функция Δ при некотором $t = t_*$ попала в отрицательную область, необходимо $\dot{\Delta}(t_*) < 0$. Поэтому в области $\Delta < 0$ производная $\dot{\Delta}$ остается отрицательной.

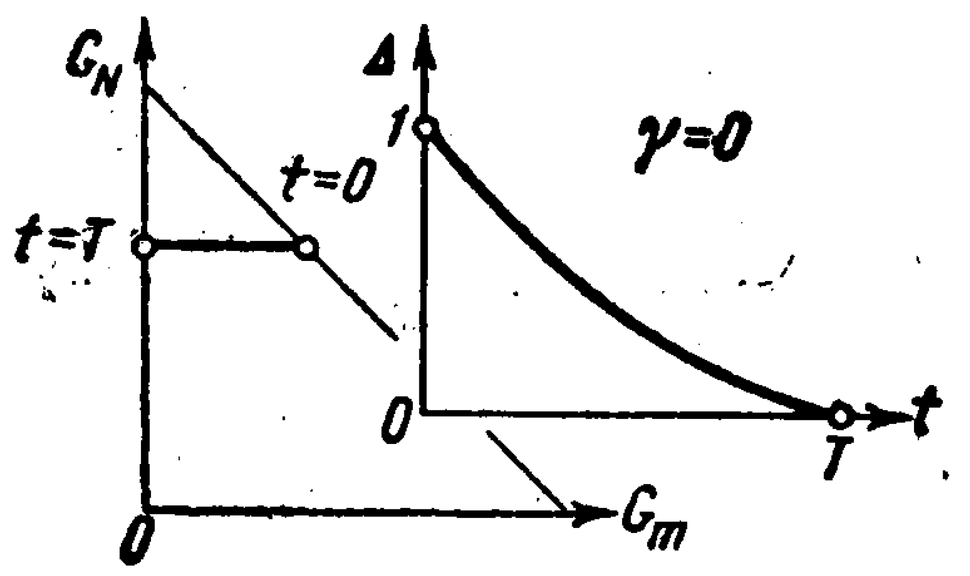
Таким образом, последние два варианта 3° и 4° отпадают. Остается рассмотреть предельные случаи $\gamma = 1$ и $\gamma = 0$.

При $\gamma = 1$ начальное значение функции Δ равно нулю (3.4), а ее производная (5.6)

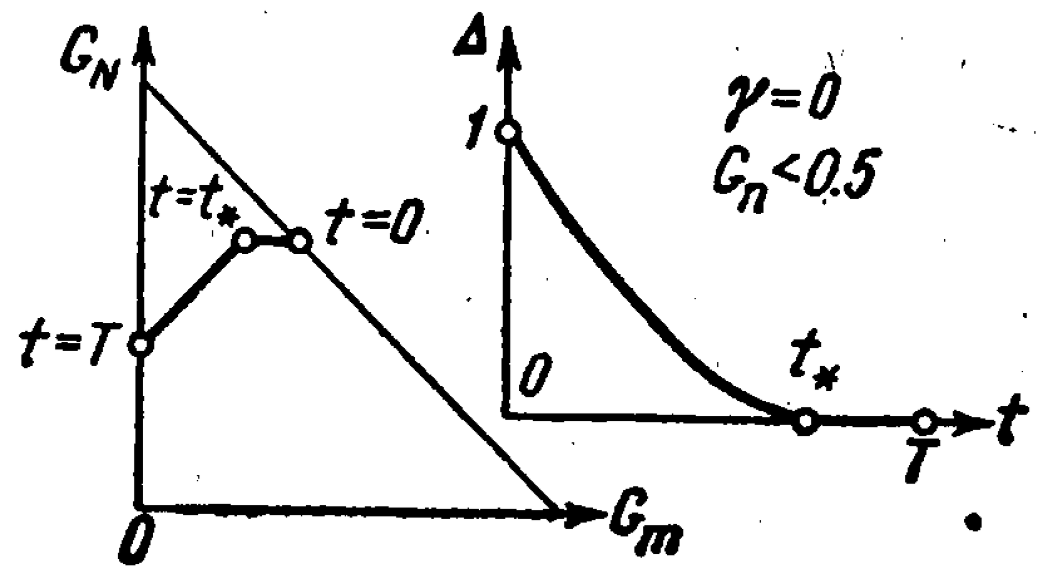
$$\dot{\Delta} = -\frac{1}{2}\dot{p}_m\left(1 + \frac{G_m + G_n}{G_N}\right) \quad \text{при } \gamma = 1 \tag{6.2}$$

всюду отрицательна. Поэтому все последующие значения Δ лежат в отрицательной области, и в процессе движения изменяется только вес источника мощности G_N по уравнению (3.3). Вес рабочего вещества G_m при этом тождественно равен нулю, так как по условию (1.4) $G_m(T) = 0$ (см. фиг. 8).

В случае $\gamma = 0$ начальное значение функции Δ равно единице, а конечное — нулю (3.4), (3.6). Функция Δ не может попасть в отрицательную область, так как при $\gamma = 0$ уравнение (3.3) не имеет смысла. Поэтому Δ обращается в нуль либо в конце движения, и тогда $G_N(t) \equiv G_{N0}$ (см. фиг. 9), либо — в некоторый момент времени



Фиг. 9



Фиг. 10

$t = t_* < T$. Тогда производная $\dot{\Delta}(t_*)$ также обращается в нуль и до конца движения остается равной нулю. На первом участке $0 \leqslant t \leqslant t_*$ изменение веса происходит по уравнению (3.1), на втором $t_* \leqslant t \leqslant T$ — по уравнению (3.2) (см. фиг. 10). Остальные возможности исключаются аналогично тому как было сделано при $0 < \gamma < 1$.

Поступила 19 I 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. О движении тела переменной массы с постоянной затратой мощности в гравитационном поле. Докл. АН СССР, 1961, т. 137, № 5.
2. Иванов Ю. Н. Оптимальное уменьшение мощности при движении тела переменной массы в гравитационном поле. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 4.
3. Martelly J. Optimization of Interplanetary Propulsion Systems. IRE Trans. Nucl. Sci., 1962, vol. NS-9.
4. Цандер Ф. А. Применение металлического топлива в ракетных двигателях. Сб. «Ракетная техника», 1936, № 1; см. также «Проблема полета при помощи реактивных аппаратов. Межпланетные путешествия». Оборонгиз, 1961.
5. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.
6. Розеноэр Л. И. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем. Автоматика и телемеханика, 1959, т. XX, № 10—12.
7. Irving J. H. Low Thrust Flight. Space Technology, J. Wiley, N. Y., 1959.
8. Исаев В. К., Сонин В. В. Об одной нелинейной задаче оптимального управления. Автоматика и телемеханика, 1962, т. XXIII, № 9.