

ВОЛНЫ, ВЫЗВАННЫЕ МГНОВЕННЫМ РАЗРЫВОМ СПЛОШНОСТИ УПРУГОЙ СРЕДЫ

Л. М. Флитман

(Москва)

Изучаются волны, вызванные мгновенным разрывом сплошности напряженной упругой среды. Строится точное решение плоской задачи, когда разрыв происходит вдоль полосы шириной l . Результаты применяются для асимптотического исследования пространственной задачи.

В работе [1] имеется приближенное решение рассматриваемой ниже задачи. Мауэ [2] рассмотрел родственную задачу для полубесконечного разрыва.

1. В упругом пространстве, находящемся в плоском напряженном состоянии, происходит мгновенное нарушение сплошности вдоль бесконечно длинной плоской полосы шириной l . Напряженное состояние, предшествующее разрыву, предполагается однородным. Разрыв характеризуется тем, что на его поверхности нормальные напряжения и нормальные смещения непрерывны (щель не раскрывается), а касательные напряжения обращаются в нуль, так что терпят разрыв тангенциальные смещения.

Поместим начало координат на правом краю разрыва (фиг. 1), ось z направим вдоль его края, а ось y — нормально его плоскости.

Задача о нахождении поля смещений, возникшего в результате такого разрыва, сводится к решению уравнений для потенциалов смещений

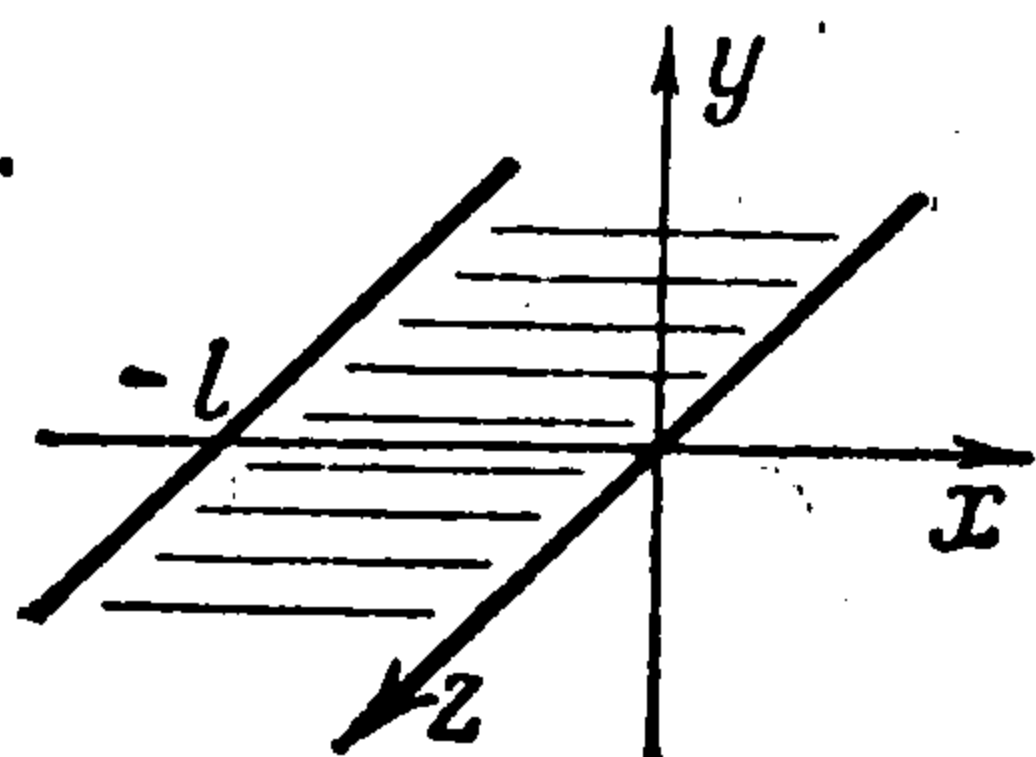
$$\Delta\varphi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta\psi - \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad \left(a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad b^2 = \frac{\mu}{\rho} \right) \quad (1.1)$$

где λ и μ — коэффициенты Ляме, ρ — плотность. Начальные условия — нулевые; краевые условия при $y = 0$ и $-l < x < 0$ имеют вид

$$\sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^-, \quad v^+ = v^-, \quad \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = \tau = \text{const} \quad (1.2)$$

Индексами плюс и минус отмечены соответственно предельные значения

компонент напряжения и смещения в верхней и нижней полуплоскости при $y = 0$. Через τ обозначено касательное напряжение, имевшееся на полосе $-l < x < 0$ до разрыва. Для смещений u и v вдоль осей x и y имеем



Фиг. 1

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

От краевой задачи (1.2) для уравнений (1.1) во внешности отрезка легко перейти к задаче для верхней полуплоскости $y \geq 0$ с условиями при $y = 0$

$$\sigma_{yy} = 0 \quad (-\infty < x < \infty), \quad \tau_{xy} = 0 \quad (-l < x < 0), \quad u = u_0 \equiv \frac{b\tau}{\mu} t \quad (x < -l, x > 0) \quad (1.3)$$

Для этого надо сначала воспользоваться очевидным свойством симметрии поля перемещений данной задачи

$$u^+(x, y) = -u^-(x, -y), \quad v^+(x, y) = v^-(x, -y) \quad (1.4)$$

а потом представить решение в виде суммы плоской поперечной волны, уходящей вверх, и вспомогательного решения, которое и должно удовлетворять (1.3).

Задача (1.1), (1.3) будет частным случаем задачи о дифракции плоской волны на щели конечной ширины. Решение для полубесконечной щели получено А. Ф. Филипповым, М. М. Фридманом, Мауэ [3-5].

2. В момент разрыва от полосы оторвется фронт плоской поперечной волны, а на краях образуются продольные и поперечные волны с цилиндрическими фронтами (фиг. 2). Для $t < l/a$ при построении волн, образовавшихся на одном из краев, очевидно, не нужно учитывать второй край. Поэтому для указанного интервала времени достаточно получить решение уравнений (1.1) при нулевых начальных условиях и краевом условии вида

$$\sigma_{yy} = 0 \quad (-\infty < x < \infty), \quad \tau_{xy} = 0 \quad (x < 0), \quad u = u_0 \quad (x > 0) \quad (2.1)$$

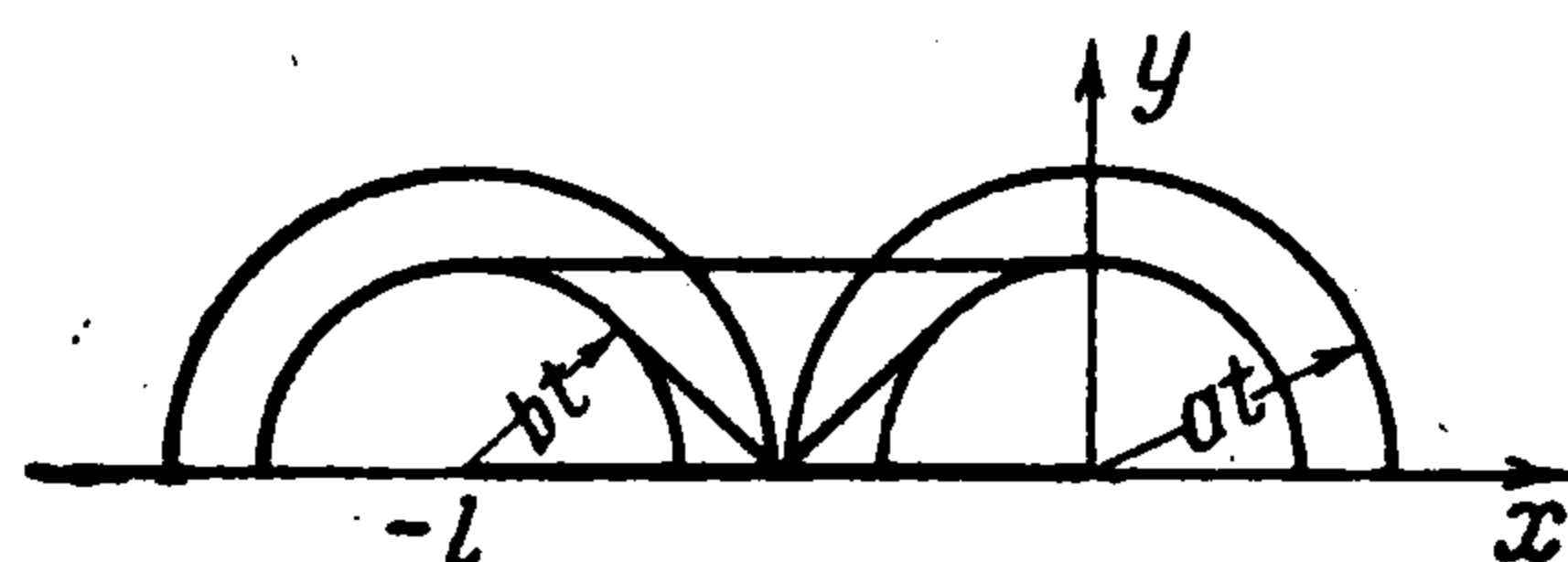
Обозначим это решение через φ_1 и ψ_1 , а соответствующие смещения — через u_1 и v_1 .

При $t > l/a$ цилиндрические волны, образовавшиеся на краях, пройдут по поверхности разрыва и соскользнут с нее, породив при этом новые волны. Фронты вторичных волн около правого края разрыва, возбужденных волнами от левого края, изображены на фиг. 3.

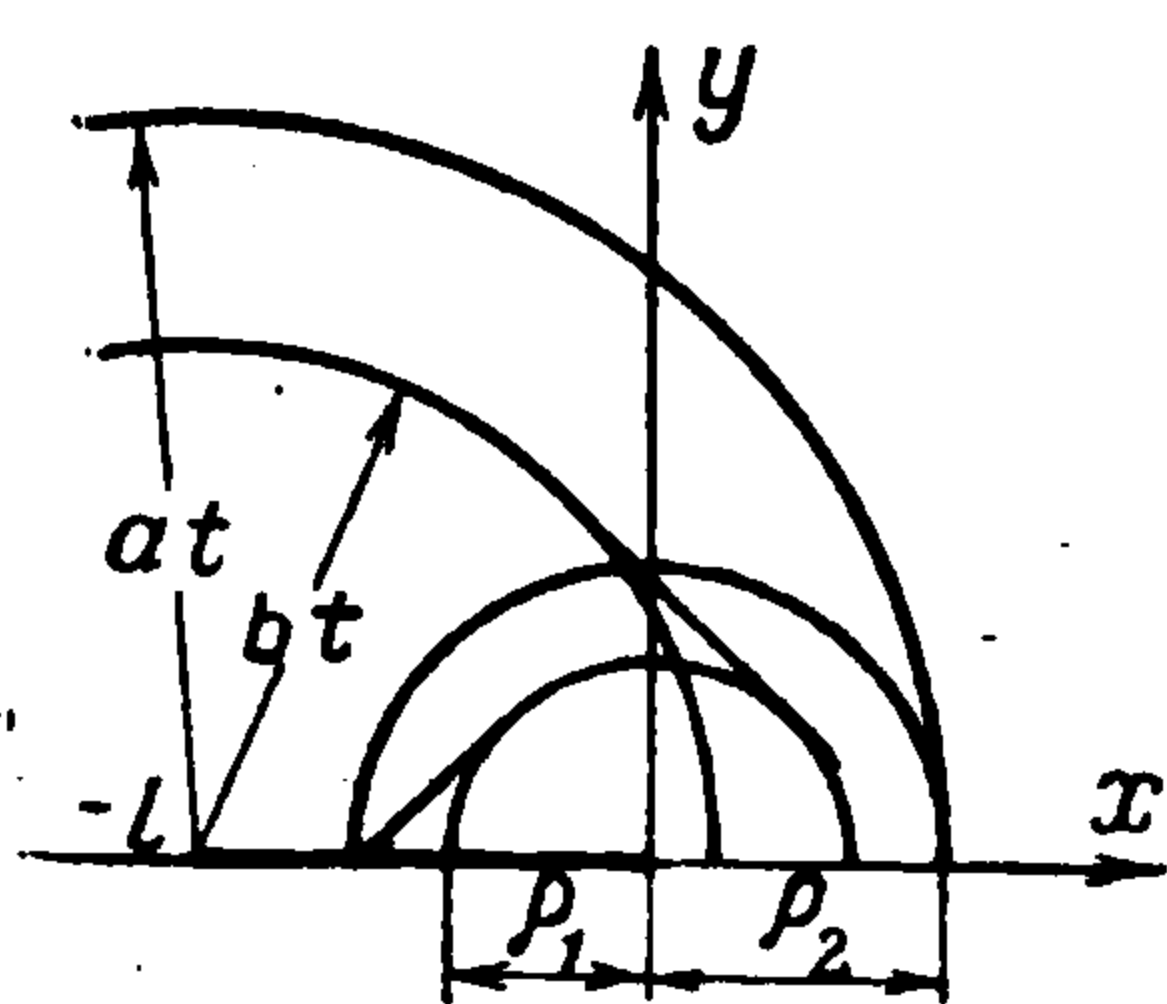
Смещения в окрестности правого края представим в виде суммы трех полей: поля смещений в первичной волне от правого края, в первичной волне от левого края и поля смещений во вторичной волне. Построение последнего может быть осуществлено без учета левого края. Для этого надо получить решение (1.1), удовлетворяющее условиям (2.1), где вместо u_0 нужно написать $-u_1(-x-l, t)$. То же самое происходит около левого края разрыва. Для $t < 2l/a$ смещения в среде будут описываться плоской волной, потенциалами первичных и вторичных волн от обоих краев. При

$t > 2l/a$ возникнут волны третьего порядка и т. д. Построение волн высших порядков аналогично построению вторичных волн. Таким образом, сформулированная выше задача сводится к последовательному нахождению решений системы (1.1), удовлетворяющих условиям типа (2.1), где вместо u_0 стоит функция координат и времени, соответствующая горизонтальным смещениям в пришедшей от противоположного края волне.

Эти решения строятся аналогично работам [6, 7]. Применяя ко всем рассматриваемым функциям двустороннее преобразование Лапласа по x и одностороннее по t с параметрами q и p соответственно, можно получить



Фиг. 2



Фиг. 3

из (1.1) и (2.1) функциональное уравнение, связывающее при $y = 0$ образы касательного напряжения τ_{xy} и смещения u . Методом Винера — Хоцфа — Фока [8] из этого уравнения можно найти образ смещения u , а по нему построить образы потенциалов при $y \geq 0$. Выкладки, аналогичные проведенным в работах [6, 7], опустим. Ввиду того, что на противоположных краях образуются совершенно одинаковые волны, ограничимся рассмотрением волн, возникающих на правом краю разрыва. Образы потенциалов первой продольной и поперечной волн имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_1(y, q, p) &= 2m_0 \frac{\tau b}{\rho p^4} M(s) \exp\left(-\frac{py}{b} \sqrt{\gamma^2 - s^2}\right) \quad \left(\gamma = \frac{b}{a}, \quad s = \frac{bq}{p}\right) \\ \Psi_1(y, q, p) &= -m_0 \frac{\tau b}{\rho p^4} \frac{2s^2 - 1}{s \sqrt{1 - s^2}} M(s) \exp\left(-\frac{py}{b} \sqrt{1 - s^2}\right) \\ &\quad \left(m_0 = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \gamma^2)}}\right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь обозначено

$$M(s) = \frac{\sqrt{1-s}}{\vartheta - s} e^{g(s)}, \quad g(s) = \frac{1}{\pi} \int_{\gamma}^1 \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - s} \quad (2.3)$$

$$\varphi(\xi) = \operatorname{arctg} \frac{4\xi^2 \sqrt{(1 - \xi^2)(\xi^2 - \gamma^2)}}{(2\xi^2 - 1)^2}$$

где ϑ — корень уравнения Рэля

$$G(s) \equiv (2s^2 - 1)^2 + 4s^2 \sqrt{(1 - s^2)(\gamma^2 - s^2)} = 0$$

Для образов потенциалов волн, образовавшихся при $t > (n - 1)l/a$, получаются следующие выражения:

$$[\Phi_n = s\Phi_1 W_{n-1}(s, pl/b), \quad \Psi_n = s\Psi_1 W_{n-1}(s, pl/b)] \quad (2.4)$$

где Φ_1 и Ψ_1 определяются формулами (2.2), а W_m — соотношением

$$W_m = \left(\frac{-1}{\pi}\right)^m \int_{v_m}^{\infty} \Pi_m(M_m) \exp\left(-\frac{pl}{b} \sum_{k=1}^m s_k\right) \frac{dv_m}{s_m + s} \quad (2.5)$$

Интегрирование проводится по объему $s_k \geq \gamma$, где $k = 1, \dots, m$. И, кроме того,

$$\Pi_m(M_m) = \prod_{k=1}^m \frac{P(s_k)}{s_k + s_{k-1}} \quad (s_0 = 0)$$

$$P(s) = \sqrt{s - \gamma} P_1(s) \quad (\gamma \leq s \leq 1) \quad (2.6)$$

$$P(s) = \sqrt{s - \gamma} P_1(s) + \sqrt{s - 1} P_2(s) \quad (s > 1)$$

где

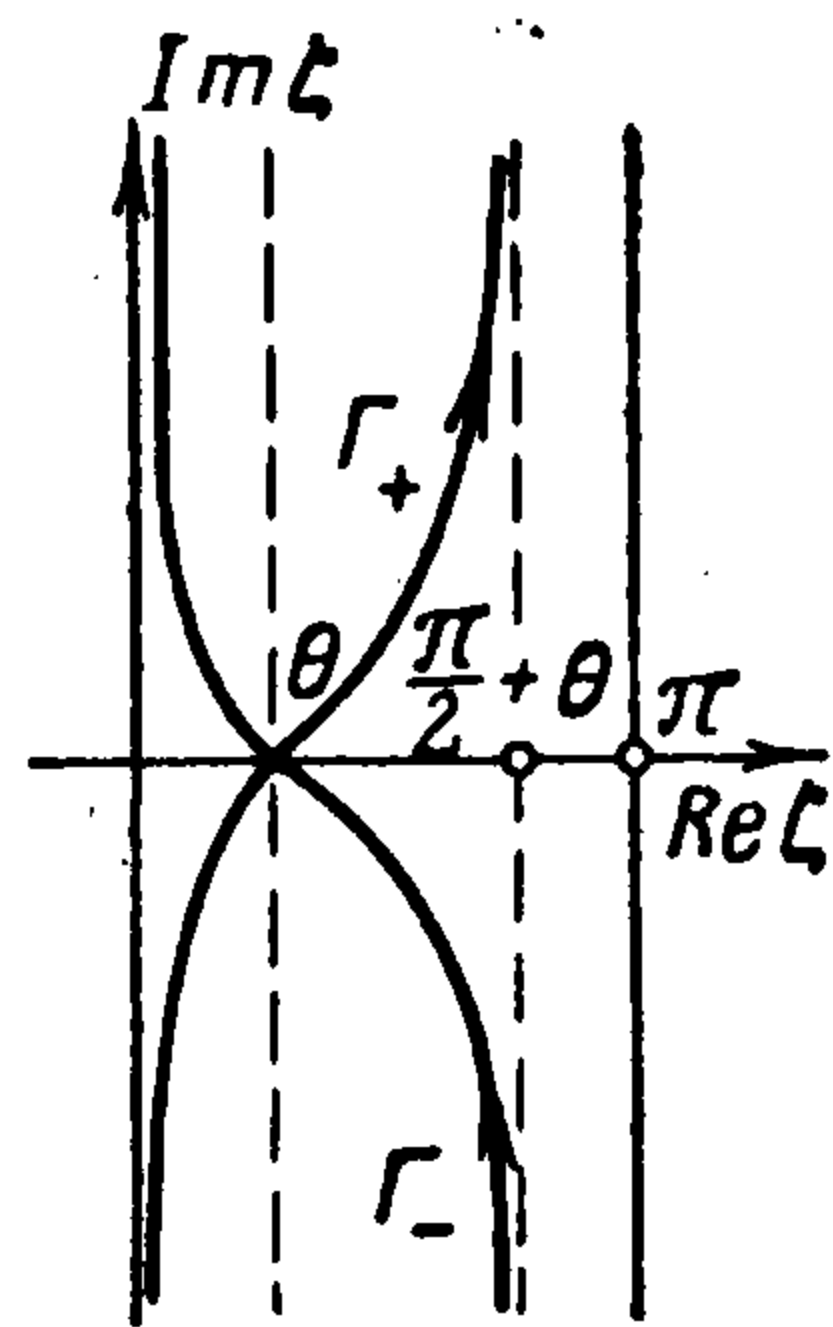
$$P_1(s) = 8(1 - \gamma^2) \frac{s^2(1-s)(\vartheta + s)^2 \sqrt{s + \gamma}}{(2s^2 - 1)^4 + 16s^4(1 - s^2)(s^2 - \gamma^2)} e^{-2g(-s)}$$

$$P_2(s) = -2(1 - \gamma^2) \frac{(2s^2 - 1)^2 (\vartheta + s)^2}{[(2s^2 - 1)^4 + 16s^4(1 - s^2)(s^2 - \gamma^2)] \sqrt{s + 1}} e^{-2g(-s)}$$

3. Из (2.4) и (2.5) следует, что для получения оригиналов, соответствующих Φ_n и Ψ_n , достаточно совершить обращение по q и p над выражениями

$$\frac{s\Phi_1}{s_{n-1} + s} \exp\left(-\frac{pl}{b} \sum_{k=1}^{n-1} s_k\right), \quad \frac{s\Psi_1}{s_{n-1} + s} \exp\left(-\frac{pl}{b} \sum_{k=1}^{n-1} s_k\right) \quad (3.1)$$

Такая процедура соответствует выполнению обращения под знаком интеграла в формуле (2.5), где подынтегральная функция зависит от s и p . Однако удобнее строить оригиналы выражений, полученных из (3.1) умножением на p^3 . Это означает, что будут построены третьи производные по времени от искомых функций.



Фиг. 4

Обозначим интегралы обращения по q указанных выражений через A_n° и B_n° соответственно, а их полные оригиналы — A_n и B_n .

Переходя в A_n° к новой переменной интегрирования ζ , такой, что $q = -a^{-1}p \cos \zeta$, и вводя вместо декартовых координат x и y полярные r и θ , получим

$$A_n^\circ = \exp\left(-\frac{pl}{b} \sum_{k=1}^{n-1} s_k\right) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} C_n(\zeta) \exp\left[-\frac{pr}{a} \cos(\zeta - \theta)\right] d\zeta \quad (3.2)$$

$$C_n(\zeta) = -m_0 \gamma \frac{\tau}{\rho} \frac{\sin 2\zeta}{s_{n-1} - \gamma \cos \zeta} M(-\gamma^e \cos \zeta)$$

Контур Γ расположен в полосе $0 < \operatorname{Re} \zeta < \pi$ так, что разности абсцисс его точек и точки $\zeta = \theta$ меньше $\pi/2$. Кроме того, его положение зависит от знака $\operatorname{Im} p$: для того чтобы на всем контуре имело место неравенство

$$\operatorname{Re}[p \cos(\zeta - \theta)] > 0 \quad (3.3)$$

при $\operatorname{Im} p > 0$ контур Γ должен совпадать с Γ_+ , а при $\operatorname{Im} p < 0$ — с Γ_- , изображенными на фиг. 4. Выполняя обращение по p , получим

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^0 dp \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_-} C_n(\zeta) e^{p\Delta} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{i\infty} dp \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} C_n(\zeta) e^{p\Delta} d\zeta$$

$$\Delta = t - \frac{r}{a} \cos(\zeta - \theta) - \frac{l}{b} \sum_{k=1}^{n-1} s_k \quad (3.4)$$

Выполнение условия (3.3) дает возможность проинтегрировать по p под знаками интегралов. Полученное после этого выражение можно преобразовать в интеграл по замкнутому контуру Γ , имеющему вид восьмерки (фиг. 5)

$$A_n = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} C_n(\zeta) \frac{d\zeta}{\Delta}$$

Подынтегральная функция стремится к нулю в бесконечности и имеет в полосе только полюсы, совпадающие с нулями функции Δ , которая дается формулой (3.4). При $at - r < (n-1)l$ эти нули лежат на действительной оси и не попадают внутрь контура Γ . Поэтому $A_n = 0$.

При $at - r > (n - 1)l$ имеются два нуля функции Δ , расположенные на прямой $\text{Re } \zeta = \theta$ в сопряженных точках. Координата нуля, лежащего в верхней полуполосе, дается формулой

$$\zeta_0 = \theta + i \ln \left(\frac{aT}{r} + \sqrt{\frac{a^2 T^2}{r^2} - 1} \right) \quad \left(T = t - \frac{l}{b} \sum_{k=1}^{n-1} s_k \right) \quad (3.5)$$

Поэтому интеграл, определяющий A_n , равен сумме вычетов в указанных точках

$$A_n = -\frac{a}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 T^2 - r^2}} \text{Re } C_n(\zeta) \quad (3.6)$$

Тогда для оригинала функции Φ_n из (2.4), который будем обозначать φ_n , можно получить

$$\varphi_n(r, \theta, t) = 0 \quad (at - r < (n - 1)l) \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial^3 \varphi_n}{\partial t^3} = \left(\frac{-1}{\pi} \right)^n a \int_{v_{n-1}} \Pi_{n-1}(M_{n-1}) \frac{\text{Re } C_n(\zeta_0)}{\sqrt{a^2 T^2 - r^2}} dv \quad (at - r > (n - 1)l)$$

Интегрирование проводится по объему

$$\sum_{k=1}^{n-1} s_k \leq (at - r) / \gamma l, \quad s_k \geq \gamma \quad (k = 1, \dots, n - 1) \quad (3.8)$$

Аналогично строится оригинал функции Ψ_n , но при его вычислении встречаются осложнения, вызванные наличием в полосе дополнительного полюса и линии разветвления, связанных с головными волнами. Для потенциала цилиндрической поперечной волны получим

$$\frac{\partial^3 \psi_n}{\partial t^3} = \left(\frac{-1}{\pi} \right)^n b \int_{v_{n-1}} \Pi_{n-1}(M_{n-1}) \text{Re } D_n(\eta_0) \frac{dv}{\sqrt{b^2 T^2 - r^2}} \quad (bt - r > (n - 1)\gamma l) \quad (3.9)$$

Интегрирование проводится по объему

$$\sum_{k=1}^{n-1} s_k \leq \frac{bt - r}{l}, \quad s_k \geq \gamma \quad (k = 1, \dots, n - 1) \quad (3.10)$$

В (3.9) введены обозначения

$$\eta_0 = \theta + i \ln \left[\frac{bT}{r} + \left(\frac{b^2 T^2}{r^2} - 1 \right)^{1/2} \right], \quad D_n(\eta) = \frac{m_0 \tau}{\rho} \frac{\cos 2\eta}{s_{n-1} - \cos \eta} M(-\cos \eta) \quad (3.11)$$

где T определяется (3.5). Близкий способ вычисления интегралов обращения имеется в работе [9].

Вышеизложенное позволяет записать значение продольного потенциала поля смещений в произвольный момент t и в произвольной точке r и θ (начало координат на правом краю) в виде

$$\varphi(r, \theta, t) = \sum_{k=1}^{N_1} \varphi_k(r, \theta, t) + \sum_{k=1}^{N_2} \varphi_k(r_1, \pi - \theta_1, t)$$

где r_1 и θ_1 — полярные координаты той же точки в системе, расположенной на левом краю разрыва

$$N_1 = E\left(\frac{at-r}{l}\right) + 1, \quad N_2 = E\left(\frac{at-r_1}{l}\right) + 1$$

Здесь $E(x)$ — целая часть x .

Аналогичный вид имеет поперечный потенциал поля без учета головных волн. Таким образом, задача, поставленная в п. 1, решена. Исследуем полученные результаты.

4. Рассмотрим потенциалы первой продольной и поперечных волн, образовавшихся на правом краю разрыва. Согласно (3.7) и (3.9), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial t^3} &= -\frac{2\gamma m_0}{\pi} \frac{a\tau}{\rho} \frac{1}{\sqrt{a^2 t^2 - r^2}} \operatorname{Re} [\sin \zeta_0 M(-\gamma \cos \zeta_0)] \\ \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial t^3} &= \frac{m_0 b\tau}{\pi} \frac{1}{\rho \sqrt{b^2 t^2 - r^2}} \operatorname{Re} \left[\frac{\cos 2\eta_0}{\cos \eta_0} M(-\cos \eta_0) \right] \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\left(\zeta_0 = \theta + i \ln \left(\frac{at}{r} + \sqrt{\frac{a^2 t^2}{r^2} - 1} \right), \quad \eta_0 = \theta + i \ln \left(\frac{bt}{r} + \sqrt{\frac{b^2 t^2}{r^2} - 1} \right) \right)$$

Эти формулы также могут быть получены из решения задачи о дифракции поперечной волны на полуплоскости [3, 4]. Прифронтальной зоне продольной волны соответствует соотношение

$$1 \gg (at - r) / r$$

Тогда с точностью до малых порядка $\sqrt{(at - r) / r}$ будет $\zeta_0 = \theta$ и из (4.1) следует

$$\varphi_1(r, \theta, t) = \frac{8\sqrt{2}\gamma m_0}{15\pi} \frac{\tau}{a^2 \rho} \sin \theta M(-\gamma \cos \theta) \frac{(at - r)^{5/2}}{\sqrt{r}} \quad (4.2)$$

Зависимость радиального смещения $u_r = \partial \varphi_1 / \partial r$ от θ в прифронтальной зоне изображена на фиг. 6, где вдоль радиуса окружности, соответствующей фронту продольной волны, отложена величина

$$U = \frac{4\sqrt{2}\gamma m_0}{3\pi} \sin \theta M(-\gamma \cos \theta)$$

пропорциональная u_r .

Аналогично получается разложение вблизи фронта для поперечной волны

$$\psi_1(r, \theta, t) = \frac{4\sqrt{2}m_0}{15\pi} \frac{\tau}{b^2 \rho} \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta} K(\theta) \frac{(bt - r)^{5/2}}{\sqrt{r}} \quad (4.3)$$

где

$$K(\theta) = M(-\cos \theta) \quad (0 \leq \theta < \pi - \arccos \gamma) \quad (4.4)$$

$$K(\theta) = \frac{2(1 - \gamma^2) \cos^2 2\theta \sin \theta}{[\cos^4 2\theta + 16 \sin^2 2\theta \cos^2 \theta (\cos^2 \theta - \gamma^2)] M(\cos \theta)} \quad (\pi - \arccos \gamma < \theta \leq \pi)$$

Формула (4.3) непригодна в окрестности точки $\theta = \pi / 2$, нужное выражение можно получить из (4.1), если эту точку рассмотреть отдельно.

Зависимость тангенциального смещения $u_\theta = \partial \psi_1 / \partial r$ от θ в прифронтальной зоне поперечной волны приведена на фиг. 6, где вдоль радиусов

окружности, соответствующей фронту поперечных волн, отложена величина

$$V = - \frac{\sqrt{2} m_0}{3\pi\gamma^2} \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta} K(\theta)$$

пропорциональная u_θ .

Если расстояние от точки наблюдения намного превосходит ширину разрыва l , то цилиндрические волны, образовавшиеся на краях, можно приближенно считать исходящими из одного центра. Зависимость смещений от угла θ (система координат прежняя) в первых вступлениях таких комбинированных цилиндрических волн можно построить при помощи формул (4.2) и (4.3), если положить, что для $|\theta| < \pi/2$ смещения совпадают со смещениями в волне, идущей от правого края разрыва, а для $\pi < 2\theta < 3\pi$ — со смещениями в волне от левого края. Такие зависимости для радиальной составляющей u_r первой продольной волны и тангенциальной составляющей u_θ поперечной волны изображены на фиг. 7. Важно отметить, что в первой продольной волне при $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$ и $\theta = \pi$ радиальные смещения равны нулю, а в поперечной при $\theta = \pm\pi/4$ и $\theta = \pm 3\pi/4$ равны нулю тангенциальные смещения.

Если предположить, что рассматриваемый разрыв моделирует очаг землетрясения, то указанные свойства поля смещений совпадают со свойствами модели Хондо — Введенской [10] и др. и не согласуются с соответствующими свойствами модели Кейлис-Борока [11].

5. Из формул (3.7) и (3.9) можно получить, подобно п. 4, прифронтное разложение произвольной волны, распространяющейся от правого края разрыва. Рассмотрим φ_n из (3.7). Обозначим через h_0 расстояние, отсчитываемое от первого фронта этой волны вовнутрь

$$h_0 = at - r - (n-1)l \quad (5.1)$$

И пусть $1 \gg h_0/l$, что соответствует прифронтной зоне. Тогда из (3.8) следует

$$\sum_{k=1}^{n-1} s_k < \gamma (n + h_0/l)$$

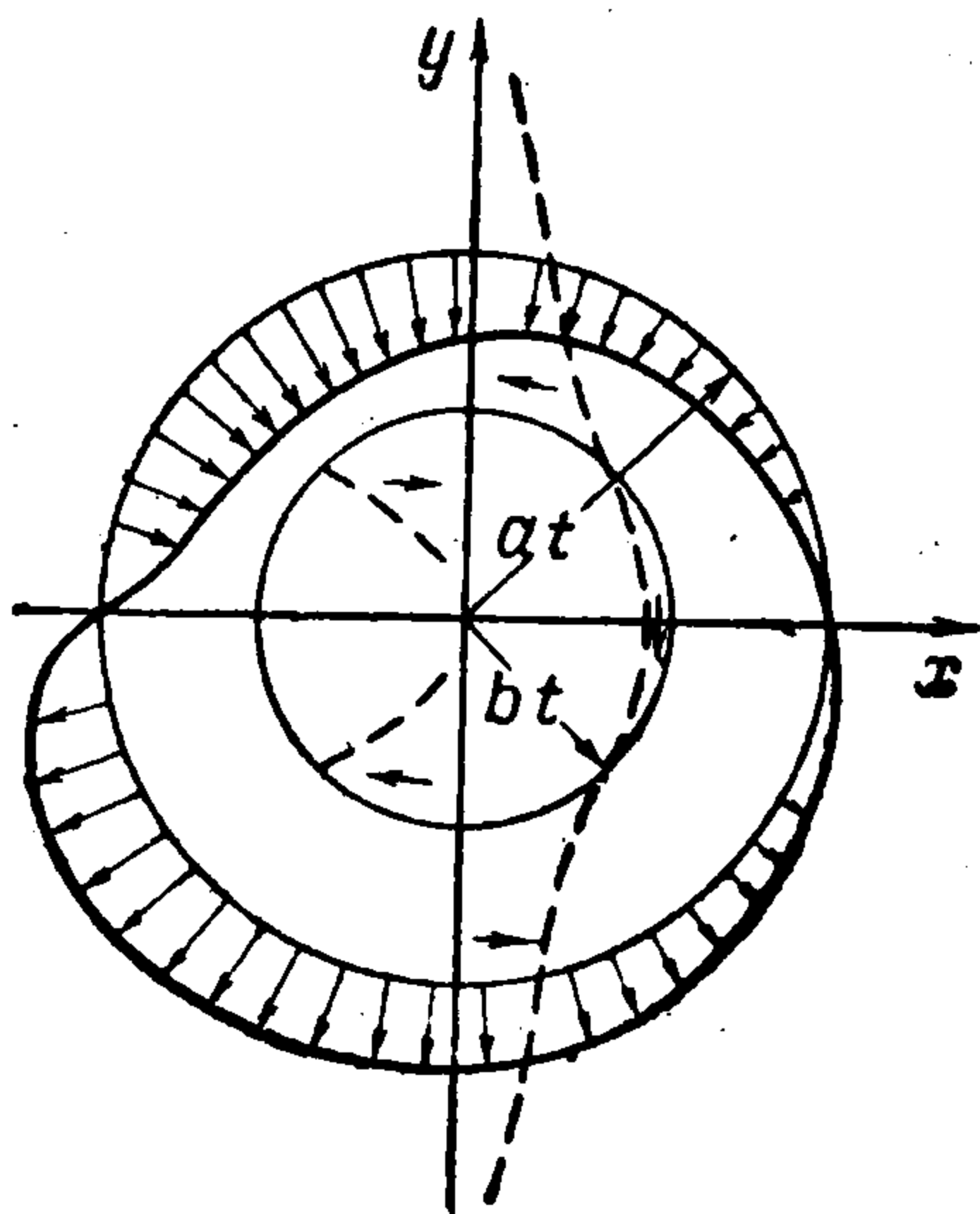
Пользуясь этим, при помощи (3.5) можно показать, что $\zeta_0 = \theta$ с точностью до малых порядка $\sqrt{h_0/l}$. Кроме того, в (2.6) с той же точностью можно положить

$$\Pi_{n-1} = \gamma \left[\frac{P_1(\gamma)}{2\gamma} \right]^{n-1} \left[\prod_{k=1}^{n-1} (s_k - \gamma) \right]^{1/2}$$

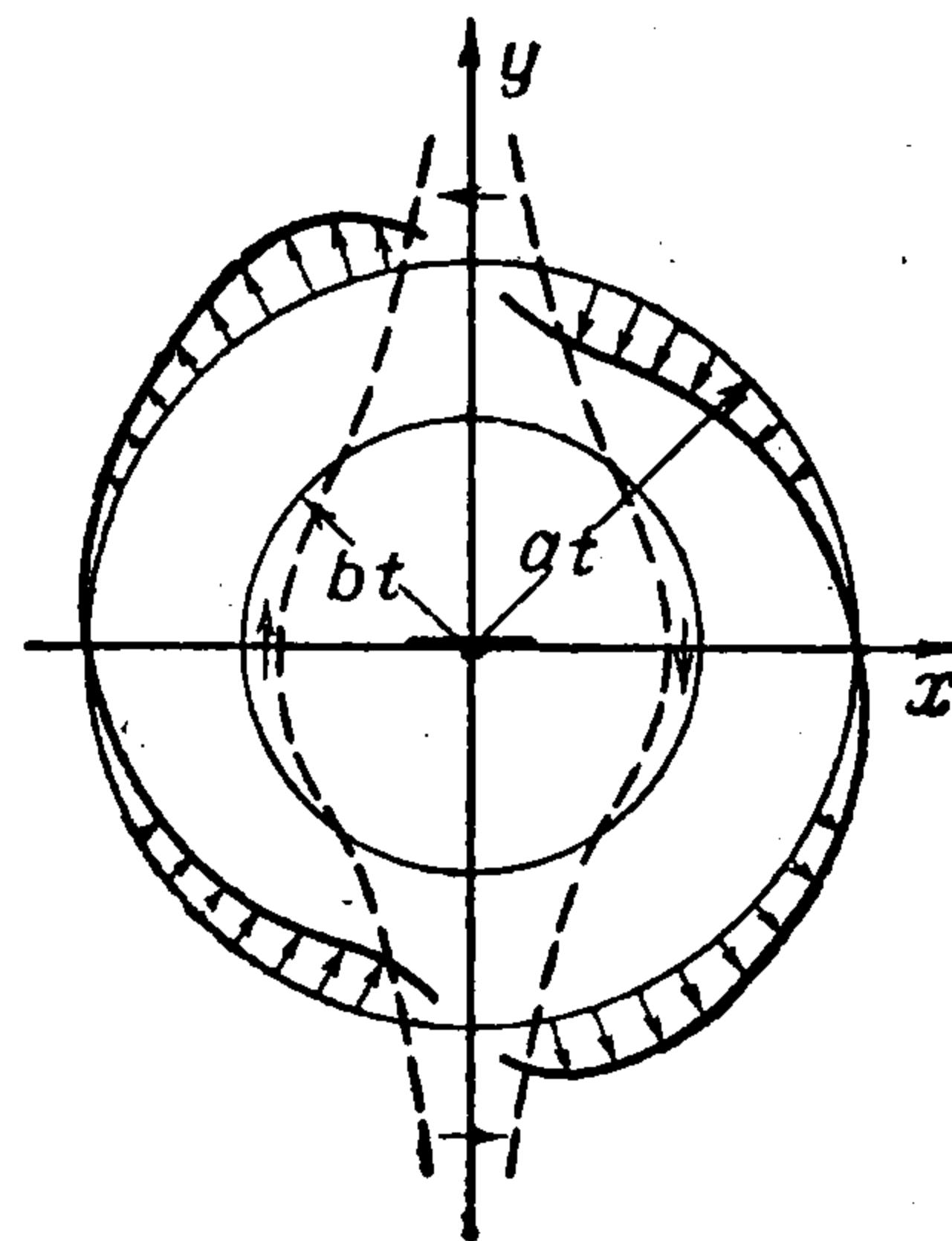
Удерживая в (3.7) только старший член, получим следующую формулу:

$$\varphi_n(r, \theta, t) = f_0(n) \frac{l^2 \tau}{a^2 \rho} \frac{\sin 2\theta}{1 - \cos \theta} M(-\gamma \cos \theta) \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{r}} \left(\frac{h_0}{l} \right)^{1+3n/2} \quad (5.2)$$

$$f_0(n) = - \left(\frac{-1}{2\pi} \right)^n m_0 2\sqrt{2} \gamma^{\frac{n+1}{2}} \frac{[P_1(\gamma) \Gamma(3/2)]^{n-1}}{\Gamma(1/2) \Gamma(1 + 3n/2)}$$



Фиг. 6



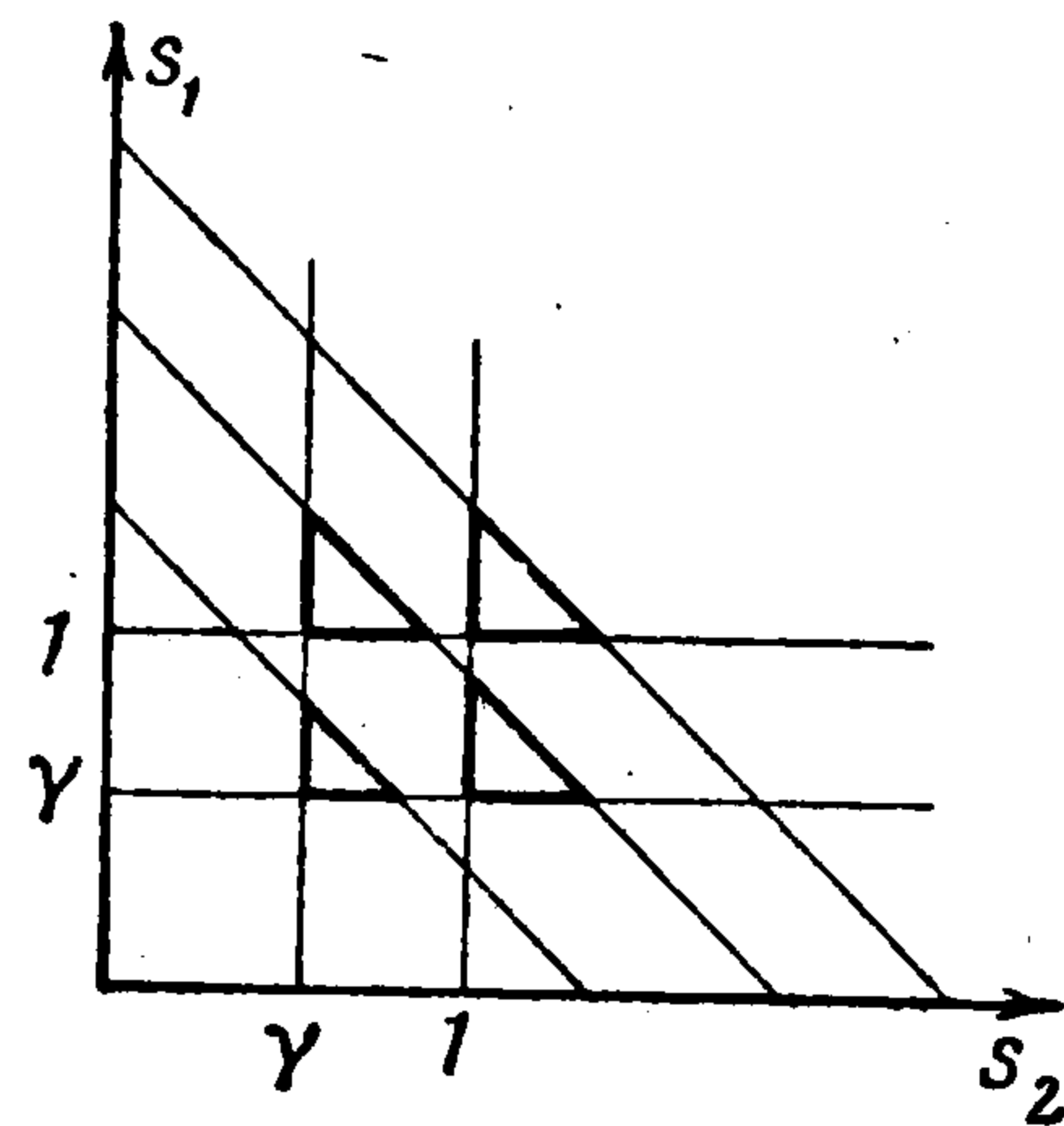
Фиг. 7

Однако формула (3.7) описывает не только волну с фронтом $h_0 = 0$, окрестность которого только что обследовалась, но и волны с фронтами

$$h \equiv at - r - (n - m - 1)l - ml / \gamma = 0$$

$$(m=0,1,\dots,n-1) \quad (5.3)$$

Эти фронты вызваны соскальзыванием с разрыва волн, которые $n - m - 1$ раз прошли по разрыву как продольные и m раз как поперечные. При фиксированных n и m таких волн будет C_{n-1}^m , но все они возникнут одновременно и будут иметь общий фронт. Среди них будут выделяться C_{n-2}^m , которые на последнем этапе шли как продольные и обладают одинаковыми прифронтными разложениями, не совпадающими с разложениями волн, которые на последнем этапе шли как поперечные. Последние также обладают одинаковыми разложениями.



Фиг. 8

Рассмотрим для иллюстрации случай $n = 3$. Из (2.6) имеем

$$s_1 (s_1 + s_2) \Pi_2 = P_1 (s_1) P_1 (s_2) \sqrt{(s_1 - \gamma) (s_2 - \gamma)} +$$

$$+ P_1 (s_1) P_2 (s_2) \sqrt{(s_1 - \gamma) (s_2 - 1)} + P_1 (s_2) P_2 (s_1) \sqrt{(s_1 - 1) (s_2 - \gamma)} +$$

$$+ P_2 (s_1) P_2 (s_2) \sqrt{(s_1 - 1) (s_2 - 1)}$$

Поэтому интеграл в (3.7) распадется на сумму четырех интегралов. Из (2.6) следует, что первый отличен от нуля при $at - r > 2l$, второй и третий при $at - r > l(1 + 1/\gamma)$, а четвертый при $at - r > 2l/\gamma$. Эти интегралы описывают потенциалы волн, о которых только что шла речь. Построение их прифронтных разложений осуществляется при помощи интегрирования по треугольникам малой площади, с вершинами в точках (γ, γ) , $(1, \gamma)$, $(\gamma, 1)$, $(1, 1)$, изображенными на фиг. 8.

Аналогично рассматривается случай произвольных n и m . Имеем

$$\varphi_n (r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{n-1} \varphi_{nm} (r, \theta, t)$$

где

$$\varphi_{nm} = f_m (n) \frac{l^2 \tau}{a^2 \rho} \sin 2\theta M (-\gamma \cos \theta) \times$$

$$\times \left(\frac{c_{nm}}{1 - \gamma \cos \theta} + \frac{d_{nm}}{1 - \cos \theta} \right) \sqrt{\frac{l}{r}} \left(\frac{h_m}{l} \right)^{1+3n/2} \quad (5.4)$$

$$f_m (n) = - \left(\frac{-1}{\pi} \right)^n \frac{m_0}{\sqrt{2\gamma}} \gamma^{3n/2} \frac{P_1^{n-m-1} (\gamma) P_2^m (1) \Gamma^{n-1} (3/2)}{\Gamma (1/2) \Gamma (1 + 3n/2)}$$

Значение h_m дается формулой (5.3); кроме того, через c_{nm} обозначена сумма всевозможных произведений

$$\frac{1}{1 + s_{n-2}} \prod_{k=1}^{n-2} \frac{1}{s_k + s_{k-1}} \quad (s_0 = 0)$$

Здесь m величин из s_1, \dots, s_{n-2} равны 1, а остальные равны γ .

Аналогично d_{nm} — сумма всевозможных произведений

$$\frac{1}{\gamma(\gamma + s_{n-2})} \prod_{k=1}^{n-2} \frac{1}{s_k + s_{k-1}}$$

Здесь $m - 1$ величин из s_1, \dots, s_{n-2} равна 1, а остальные равны γ .

Из приведенных формул следует, что у всех волн, соответствующих потенциалу φ_n , порядок разрыва на фронте на $3/2$ меньше, чем у волн с потенциалом φ_{n-1} . Кроме того, коэффициенты $f_m(n)$ с ростом n быстро убывают. Таким образом, волны, соответствующие многократной дифракции, сильно ослабляются. Интересно отметить, что прифронтовые разложения всех продольных волн, начиная со второй, имеют множитель $\sin 2\theta$. Отсюда следует, что при регистрации многократно дифрагированных продольных волн на далеких расстояниях, радиальные компоненты смещения в прифронтовых зонах будут равны нулю на прямой, являющейся продолжением разрыва, и на перпендикулярной к ней, проходящей через середину разрыва.

Аналогично исследуются прифронтовые зоны многократно дифрагированных поперечных волн, которые описываются (3.9) — (3.11). Как и раньше, головные волны исключены из рассмотрения

$$\psi_n(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{n-1} \psi_{nm}(r, \theta, t) \quad (5.5)$$

$$\psi_{nm} = -f_m(n) \frac{l^2 \tau}{a^2 \rho} \cos 2\theta K(\theta) \left(\frac{c_{nm}}{1 - \cos \theta} + \frac{\gamma d_{nm}}{\gamma - \cos \theta} \right) \sqrt{\frac{l}{r}} \left(\frac{h_m}{l} \right)^{1+3n/2}$$

Здесь

$$h_m = bt - r - \gamma l(n - m - 1) - ml$$

Коэффициенты $f_m(n)$, c_{nm} и d_{nm} имеют то же значение, что и в (5.4). Функция $K(\theta)$ дается формулой (4.4).

Формула для ψ_{nm} теряет смысл в точках, где фронт $h_m = 0$ имеет касания: с фронтом предыдущей поперечной волны ($\theta = 0$), с фронтом головной волны, соответствующей предыдущей поперечной ($\theta = \arccos \gamma$), с фронтом головной волны ($\theta = \pi - \arccos \gamma$).

Эти особые точки видны на фиг. 3.

Интересно отметить, что во всех многократно дифрагированных поперечных волнах тангенциальная составляющая в прифронтовой зоне обращается в нуль при $\theta = \pm \pi/4$ и $\theta = \pm 3\pi/4$, т. е. для тех же углов, что и в первой волне (4.3).

6. Рассмотрим соответствующую пространственную задачу. Характер напряженного состояния, предшествовавшего разрыву, и свойства разрыва (непрерывность нормальных компонент напряжения и смещения) предполагаются такими же, как и в п. 1. Но пусть разрыв происходит вдоль круга радиуса l . Точное решение такой задачи не известно. Однако, пользуясь приведенными выше результатами, можно получить асимптотические представления поля перемещений вблизи фронтов первой продольной и поперечной волн.

Постоянное касательное напряжение, имевшееся на круге до разрыва, обозначим τ_0 . Введем систему координат α, r, θ . Поверхность $\alpha = \text{const}$ — полуплоскость, перпендикулярная кругу и проходящая через его центр. Угол между линией пересечения полуплоскости и круга с направлением τ_0 обозначим α . На полуплоскости $\alpha = \text{const}$, в точке ее пересечения окружностью, являющейся границей разрыва,

поместим начало полярной системы координат r, θ . Угол будет отсчитываться от продолжения радиуса, проведенного из центра круга в начало полярной системы координат (фиг. 9).

В момент разрыва от круга отойдет плоская поперечная волна, а на краю возникнут продольные и поперечные волны с тороидальными фронтами

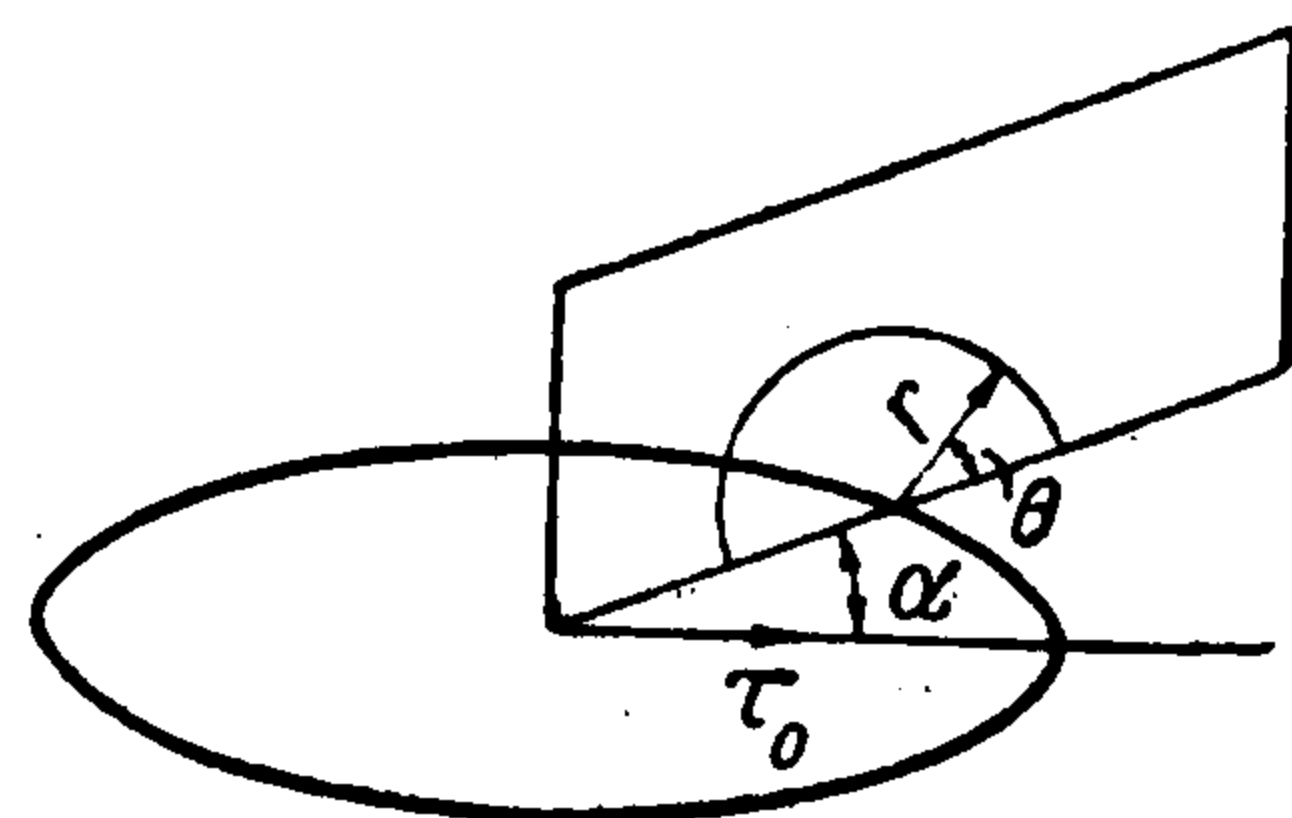
$$r = at, \quad r = bt \quad (6.1)$$

(время t отсчитывается от момента разрыва), которые будут соединены коническим фронтом головной волны. Сечение системы фронтов плоскостью, перпендикулярной кругу и проходящей через его центр, изображено на фиг. 2.

Пусть теперь $at \ll l$. Рассмотрим смещения в узком ломтике, вырезанном из возмущенной области двугранным углом $d\alpha$. Для их приближенного построения нужно знать решение задачи, когда в результате разрыва освобождается от касательных напряжений $\tau_{xy} = \tau_0 \cos \alpha$ и $\tau_{zy} = -\tau_0 \sin \alpha$ полуплоскость $y = 0, x < 0$ (фиг. 10).

Эта задача расщепляется на две: первая о волнах, смещения в которых параллельны плоскости $z = 0$, и ее решение дается формулами (4.1) — (4.3); вторая о волнах со смещениями, параллельными оси z . Последняя сводится к хорошо изученным задачам, и смещения в прифронтной зоне цилиндрической волны имеют вид

$$w = \frac{4}{3\pi} \frac{\tau_0 \sin \alpha \sin \theta / 2}{\rho b^2 \cos \theta} \frac{(bt - r)^{3/2}}{\sqrt{r}} \quad (6.2)$$



Фиг. 9

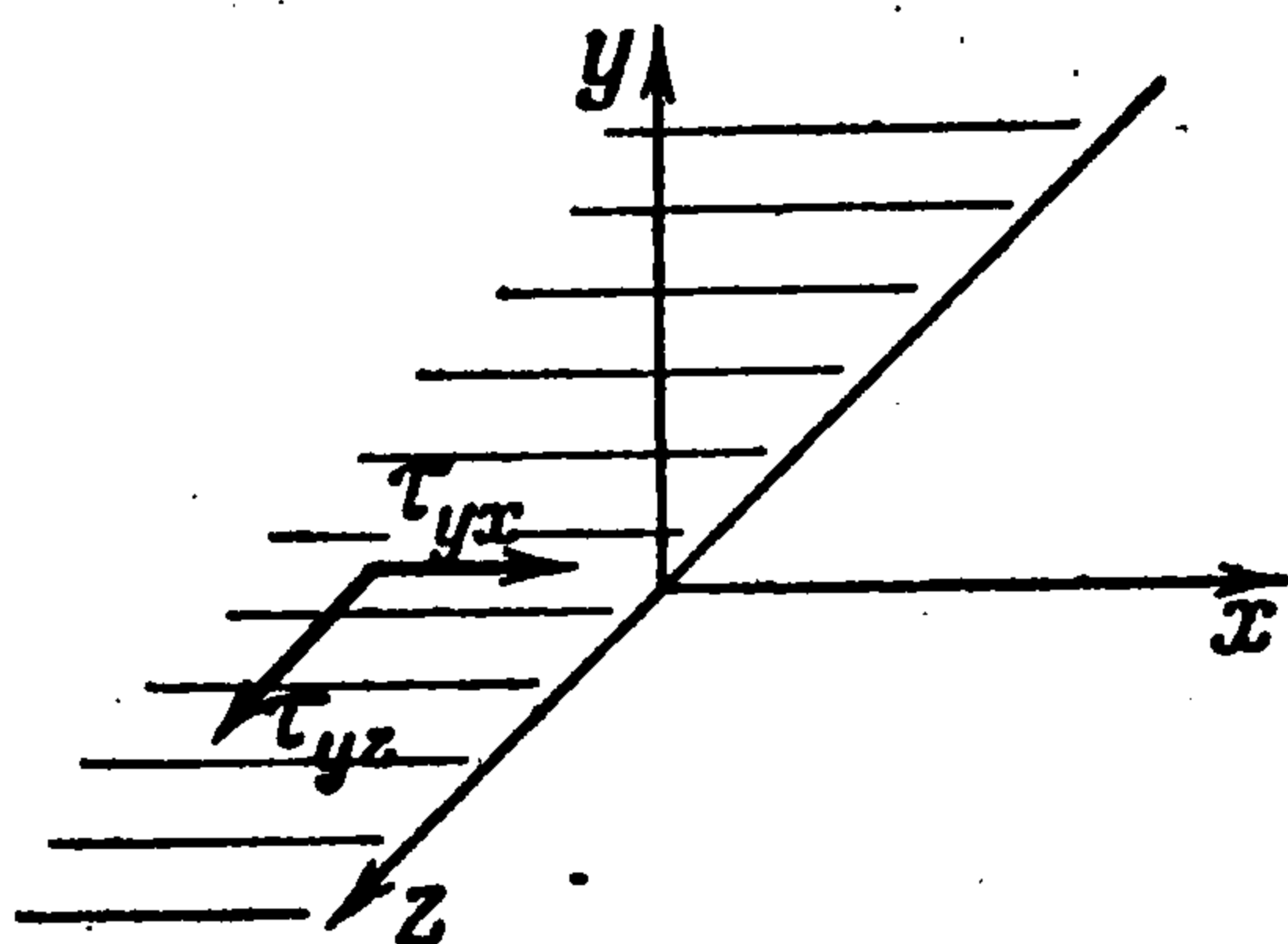
Итак, формулы (6.2) и (4.2), (4.3) (в последних надо положить $\tau = \tau_0 \cos \alpha$) дают прифронтные разложения всех тороидальных волн при $at \ll l$. Но если для какой-либо волны известно прифронтное разложение в некоторый фиксированный момент, то можно построить это разложение для произвольного положения фронта [12] при условии, что поле лучей не имеет ни особых линий, ни особых точек (каустики и фокусов).

Этим требованиям удовлетворяют фронты тороидальных волн для $|\theta| < \pi/2$. Согласно [12], главные части разложений u_0 и u в точках пересечения двух различных положений фронта одним и тем же лучом связаны формулой

$$u = u_0 \sqrt{R_1^\circ R_2^\circ / R_1 R_2} \quad (6.3)$$

где R_1°, R_2° и R_1, R_2 — главные радиусы кривизны фронтов в точках пересечения с выбранным лучом. Можно показать, что для тороидальных фронтов (6.1) будет

$$\frac{R_1^\circ R_2^\circ}{R_1 R_2} = \frac{r_0 (r_0 \cos \theta + l)}{r (r \cos \theta + l)} \quad (6.4)$$



Фиг. 10

Здесь r_0 — радиус исходного положения тороидального фронта.

Пользуясь (4.2) и (6.4) для радиальной составляющей смещения в прифронтной зоне продольной волны, будем иметь при $|\theta| < \pi/2$

$$u_0 = \frac{4 \sqrt{2} \gamma m_0 \sqrt{l} \tau_0}{3\pi a^2 \rho} \cos \alpha \sin \theta M(-\gamma \cos \theta) \frac{(at - r)^{3/2}}{\sqrt{r (r \cos \theta + l)}} \quad (6.5)$$

Для меридиональной и широтной составляющих смещения в прифронтной зоне поперечной волны из (4.3), (6.2) и (6.4) получаем

$$u_\theta = -\frac{2 \sqrt{2} m_0 \sqrt{l} \tau_0 \cos \alpha \cos 2\theta}{3\pi b^2 \rho \cos \theta} K(\theta) \frac{(bt - r)^{3/2}}{\sqrt{r (r \cos \theta + l)}} \quad (6.6)$$

$$u_\alpha = \frac{4 \sqrt{l} \tau_0 \sin \alpha \sin \theta / 2}{3\pi b^2 \rho \cos \theta} \frac{(bt - r)^{3/2}}{\sqrt{r (r \cos \theta + l)}} \quad (6.7)$$

Если $bt \gg l$, то внешнюю часть ($|\theta| < \pi/2$) любого из тороидальных фронтов можно приближенно считать сферой с центром в середине круга, по которому произошел разрыв. Введенные выше координаты r, θ, α с такой же точностью можно считать сферическими с началом в центре круга (угол θ отсчитывается от плоскости разрыва). Тогда, пренебрегая в (6.5) — (6.7) l по сравнению с r , получим

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{4\sqrt{2}\gamma m_0}{3\pi} \frac{\sqrt{l}\tau_0}{a^2\rho} \frac{\cos\alpha \sin\theta}{\sqrt{\cos\theta}} M(-\gamma \cos\theta) \frac{(at-r)^{3/2}}{r} \\ u_\theta &= -\frac{2\sqrt{2}m_0}{3\pi} \frac{\sqrt{l}\tau_0}{b^2\rho} \frac{\cos\alpha \cos 2\theta}{(\cos\theta)^{3/2}} K(\theta) \frac{(bt-r)^{3/2}}{r} \\ u_\alpha &= \frac{4}{3\pi} \frac{\sqrt{l}\tau_0}{b^2\rho} \frac{\sin\alpha \sin\theta/2}{(\cos\theta)^{3/2}} \frac{(bt-r)^{3/2}}{r} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Эти приближенные формулы не применимы при $\theta = \pm \pi/2$. Интересно отметить, что в прифронтальной зоне продольной волны $u_r = 0$ на меридианах $\alpha = \pi/2$ и $\alpha = 3\pi/2$, а также на экваторе $\theta = 0$. В поперечной волне $u_\theta = 0$ на тех же меридианах и на двух кругах широты $\theta = \pm \pi/4$. Что касается u_α , то она равна нулю на меридиане $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$.

Если предположить, что рассмотренный разрыв моделирует очаг землетрясения, то указанные свойства поля смещений согласуются с аналогичными свойствами модели Хондо-Введенской^[10] и не согласуются со свойствами модели Кейлис-Борока^[11].

Автор благодарит за ценные советы и консультации Н. В. Зволинского, поставившего эту задачу, и А. А. Гвоздева.

Поступила 1 IV 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. K a s a h a r a K. The Nature of Seismic Origins as Inferred from Seismological and Geodetic Observations (2). Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo Univ., 1957, vol. 35, № 3.
2. M a u e A. Die Entspannungswelle bei plötzlichem Einschnitt eines gespannten elastischen Körpers. Z. angew. Math. und Mech., 1954, Bd. 34, H. 1/2.
3. Ф и л и п п о в А. Ф. Некоторые задачи дифракции упругих волн. ПММ, 1956, т. 20, вып. 6.
4. Ф р и д м а н М. М. Дифракция плоской упругой волны относительно полубесконечного прямолинейного разреза. Докл. АН СССР, 1949, т. 66, № 1.
5. M a u e A. Die Beugung elastischer Wellen an der Halbebene. Z. angew. Math. und Mech., Bd. 33, H. 1/2.
6. Ф л и т м а н Л. М. Динамическая задача о штампе на упругой полуплоскости. ПММ, 1959, т. 23, вып. 4.
7. Ф л и т м а н Л. М. О движении под действием волны жесткой массивной полосы, лежащей на упругом полупространстве. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6.
8. Ф о к В. А. О некоторых интегральных уравнениях математической физики. Матем. сб., 1944, т. 14, (56), вып. 1—2.
9. П е т р а ш е н ь Г. И., О г у р ц о в К. И., М а р ч у к Г. И. О задаче Лэмба в случае полупространства. Уч. зап. ЛГУ, 1950, № 135, вып. 21.
10. В в е д е н с к а я А. Н. Определение поля смещений при землетрясениях при помощи теории дислокаций. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1956, № 3.
11. К е й л и с - Б о р о к В. И. К вопросу об исследовании источников эквивалентных очагам землетрясений. Тр. Геофиз. ин-та АН СССР, 1950, № 9.
12. Ф и л и п п о в А. Ф. О приближенном вычислении отраженных и преломленных волн. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1957, № 7.