Прикладная математика и механика. Т. XXVII, 1963

ОБ АВТОКОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОСТИ БОЛЬШОЙ ПЛОТНОСТИ В ТРУБАХ

Н. Н. Кочина

(Москва)

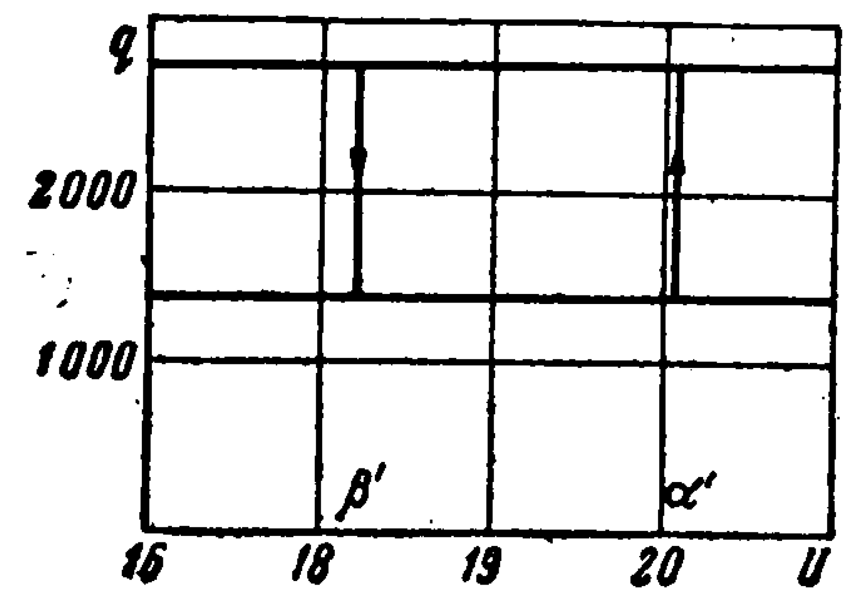
Автоколебательные системы, описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка с нелинейными граничными условиями, рассматривались в работах [1-5].

Ниже рассмотрены автоколебания, которые при некоторых условиях могут возбуждаться при движении жидкости большой плотности в трубе. Задача сводится к решению квазилинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка с непериодическим граничным условием.

1. Дифференциальные уравнения неустановившегося движения в трубах вязкой сжимаемой жидкости с учетом гидравлических сопротивлений имеют вид [6]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \varphi(u) \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho S u}{\partial x} = 0 \qquad (1.2)$$



Фиг. 1

Здесь u — средняя в сечении трубы скорость движения частиц, p — давление, ρ — плотность, S — площадь поперечного сечения трубы. К уравнениям (1.1) и (1.2) следует добавить еще уравнение состояния и условие изэнтропичности; функция $\varphi(u)$ принимается линейной для ламинарного и квадратичной для турбулентного режима [6].

Будем считать трубопровод занимающим полубесконечную область $x \geqslant 0$. Если к концу $x = 0$ трубопровода присоединен какой-либо агрегат, изменяющий расход жидкости (поршневой насос, задвижка, турбина, компрессор и т. д.), причем этот агрегат отделен от трубопровода камерой, служащей для регулирования расхода или уменьшения колебаний давления (воздушный колпак, уравнительная шахта, буферный резервуар компрессора), то граничное условие при $x = 0$ задается в виде

$$-u + h\frac{\partial u}{\partial x} = \eta(t) \qquad (1.3)$$

где h — положительная константа, характеризующая тип камеры, $\eta(t)$ — известная функция времени, пропорциональная расходу q [6]. Будем считать, что расход q есть функция релейного вида от скорости u, имеющая участок неоднозначности (фиг. 1). Тогда условие (1.3) примет вид

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{q(u, \partial u/\partial t) + u}{h} \qquad (1.4)$$

где q равно q_1 или q_2, как показано на фиг. 1.

Предполагая, что плотность жидкости ρ велика и в уравнении (1.1) можно пренебречь членом $-\rho^{-1}\,\partial p\,/\,\partial x$, будем искать периодическое решение нашей системы с граничным условием (1.4).

Основная трудность заключается в интегрировании уравнения (1.1), где опущен член $-\rho^{-1}\,\partial p\,/\,\partial x$, с граничным условием (1.4). После нахождения из (1.1) и (1.4) скорости $u\,(x,\,t)$ остальные величины ρ, S, p, T определяются из линейного дифференциального уравнения (1.2) и конечных соотношений.

Рассмотрим несколько более общую задачу: найти периодическое решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}+g'(u)\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi(u) \tag{1.5}$$

с граничным условием

$$\frac{\partial u(0,\,t)}{\partial x}=Q\left[u\,(0,\,t),\ \frac{\partial u\,(0,\,t)}{\partial t}\right] \tag{1.6}$$

Функцию $Q\,(z,y)$ будем предполагать равной $Q_1\,(z)$ при $\beta'<z<\alpha$ и $Q_2\,(z)$ при $\alpha'<z<\beta$ или при $\beta<z<\alpha'$, причем, если $y<\gamma$, $Q\,(z,y)=Q_1(z)$, и как только z достигает значения β', функция Q становится равной $Q_2\,(z)$, т. е. совершается скачок из точки $z=\beta'$, $Q=Q_1\,(\beta')$ в точку $z=\beta$, $Q=Q_2\,(\beta)$; если $y>\delta$, $Q=Q_2$, и как только z достигает значения α', функция Q становится равной $Q_1\,(z)$, причем совершается скачок из точки $z=\alpha'$, $Q=Q_2\,(\alpha')$ в точку $z=\alpha$, $Q=Q_1\,(\alpha)$. Предполагается, что $Q_1\,(z)$ и $Q_2\,(z)$ — некоторые заданные монотонные функции, которые могут быть определены и вне интервалов $\beta'<z<\alpha$ и $\alpha'<z<\beta$ $(\beta<z<\alpha')$ переменной z соответственно. Интервалы $\beta'<z<\alpha$ и $\alpha'<z<\beta$ $(\beta<z<\alpha')$ имеют общую часть.

Так как условие (1.6) непериодическое, искомое решение уравнения (1.5) должно быть автоколебательного типа. Определим условия, которые нужно наложить на функции φ, g, Q_1, Q_2, чтобы было возможно такое решение. Пока будем предполагать функции $\varphi\,(u)$, $g'\,(u)$, $Q_1\,(u)$ и $Q_2\,(u)$ непрерывными со своими производными.

2. Как известно, [8] для квазилинейного уравнения вида (1.5) гладкое решение задачи Коши существует лишь в достаточно малой окрестности линии, на которой задана гладкая начальная функция, а для разрывной начальной функции это решение не существует, вообще говоря, в сколь угодно малой окрестности линии задания начальных данных. Поэтому рассматриваются обобщенные решения уравнения (1.5), т. е. решения, удовлетворяющие закону сохранения

$$\oint\limits_C u\,dx-g\,(u)\,dt+\iint\limits_G\varphi\,(u)\,dx\,dt=0 \tag{2.1}$$

Здесь G — любая область внутри области изменения переменных x, t, в которой ищется решение, C — кусочно-гладкая граница этой области. Мы будем рассматривать обобщенные решения уравнения (2.1) в области G, заключенной внутри полуплоскости $x\geqslant 0$.

Решение уравнения (2.1) — кусочно-непрерывная функция $u\,(x,\,t)$, совпадающая в точках, где она непрерывна, с решением (1.5); значения

$u(x, t)$ по разные стороны от поверхности разрыва связаны уравнением

$$\frac{dX}{dt} = \frac{g(u^+) - g(u^-)}{u^+ - u^-} \tag{2.2}$$

Здесь через X обозначена координата скачка, u^+ и u^- значения $u(x, t)$ при $x = X(t) + 0$ и $x = X(t) - 0$ соответственно. Для того, чтобы был возможен скачок, должно выполняться условие

$$g'(u^+) < dX/dt < g'(u^-) \tag{2.3}$$

Найдем теперь непрерывные решения уравнения (1.5); его общее решение имеет вид (Φ — произвольная функция)

$$t = f(u) + \Phi[x - F(u)] \qquad \left(f(u) = \int \frac{du}{\varphi(u)},\ F(u) = \int \frac{g'(u)\,du}{\varphi(u)}\right) \tag{2.4}$$

Будем искать периодическое решение уравнения (1.5) с граничным условием (1.6). Из формулы (2.4) ясно, что решение $u(x, t)$ будет периодическим с периодом T, если $\Phi^{-1}(z)$ — периодическая функция [1] с периодом T. Функция Φ^{-1} определяется из граничного условия (1.6). Предположив, что скорость во входе трубы известна в зависимости от времени $u(0, t) = u_0(t)$, запишем решение (2.4) в виде

$$t = f(u) + u_0^{-1}\{F^{-1}[F(u) - x]\} - f\{F^{-1}[F(u - x)]\} \tag{2.5}$$

Из формулы (2.5) ясно, что функция $\Phi^{-1}(z)$ будет периодической, если $u_0(t)$ — периодическая функция с тем же периодом. Воспользовавшись уравнением (1.5), запишем теперь условие (1.6) следующим образом:

$$u_0'(t) = \varphi[u_0(t)] - g'[u_0(t)]\,Q[u_0(t)] \tag{2.6}$$

Интегрируя уравнение (2.6), найдем

$$t = \int\limits_{u_0(0)}^{v_0} \frac{dz}{\varphi(z) - g'(z)\,Q(z)} \tag{2.7}$$

Значение функции $Q(z)$ в формуле (2.7) равно либо $Q_1(z)$, либо $Q_2(z)$. Зададим некоторое значение величины $u(0, t_0) = z_0$. Считая для определенности, что $\varphi(z) - g'(z)\,Q_1(z) < 0$, $g'(u) > 0$ и $Q = Q_1(z)$, если $z_0 > \beta'$ и $Q = Q_2(z)$, если $z_0 < \beta'$ ($\beta > \beta'$) (так как время t входит в уравнение (1.5) с точностью до аддитивной константы, а в условие (1.6) не входит вовсе) получим по формуле (2.7) одну из двух функций:

при $z_0 > \beta'$

$$t = \omega^{-1}(u_0) = \int\limits_{\omega(0)}^{u_0} \frac{dz}{\varphi(z) - g'(z)\,Q_1(z)} \tag{2.8}$$

при $z_0 < \beta'$ $\qquad \left(\begin{matrix} \omega(0) = \alpha, & \Omega(T_1) = \beta \\ \omega(T_1) = \beta', & \Omega(T) = \alpha' \end{matrix}\right)$

$$t = \Omega^{-1}(u_0) = T_1 + \int\limits_{\Omega(T_1)}^{u_0} \frac{dz}{\varphi(z) - g'(z)\,Q_2(z)} \tag{2.9}$$

Величина T_1 определена ниже формулой (2.10).

---

[1] Здесь и в дальнейшем -1 в степени у характеристик функций $\Phi^{-1}(z)$, $F^{-1}(z)$, $\omega^{-1}(z), \ldots$ будет означать обращение функций $\Phi(z)$, $F(z)$, $\omega(z), \ldots$

Рассмотрим сначала случай $\beta' < z_0 < \alpha$. Формула (2.8) верна до момента $t = T_1$, пока значение u_0, равное $\omega(t)$, не достигнет величины $\omega(T_1)$. С момента T_1 решение уравнения (2.7) начинает описываться соотношением (2.9); как только функция $\Omega(t)$ достигает величины $\Omega(T)$, решение уравнения (2.7) снова начинает описываться формулой (2.8), где нужно t заменить на $t + T$. Таким образом, получено периодическое решение уравнения (2.6), причем константа T_1 и период T, согласно (2.8), (2.9), определяются выражениями

$$T_1 = \int\limits_{\omega(0)}^{\omega(T_1)} \frac{dz}{\varphi(z) - g'(z) Q_1(z)}, \qquad T = T_1 + \int\limits_{\Omega(T_1)}^{\Omega(T)} \frac{dz}{\varphi(z) - g'(z) Q_2(z)} \tag{2.10}$$

Легко видеть, что при $\alpha' < z_0 < \beta$ или при $\beta < z_0 < \alpha'$ получится то же самое периодическое решение уравнения (2.6). Если $z_0 > \max(\alpha, \beta)$ или $z_0 < \min(\alpha', \beta')$, то функция $u_0(t)$, описываемая (2.8), (2.9), может быть периодической только в пределе при $t \to \infty$.

Таким образом, периодическое решение уравнения (1.5) с непериодическим условием (1.6) в случае $g'(u) > 0$, $\varphi(u) - g'(u) Q_1(u) < 0$ может существовать лишь при условии

$$\min(\alpha', \beta') \leqslant u(0, t) \leqslant \max(\alpha, \beta) \tag{2.11}$$

Если это решение существует, то в точках, где оно непрерывно, оно дается формулой (2.5), причем функции $\omega(t)$, $\Omega(t)$ — периодические с периодом T, и $u_0(t)$ имеет вид

$$u_0(t) = \begin{cases} \omega(t) & \text{при } nT \leqslant t \leqslant nT + T_1 \\ \Omega(t) & \text{при } nT + T_1 \leqslant t \leqslant (n+1)T \end{cases} \quad (n = 0, \pm 1, \ldots) \tag{2.12}$$

а T_1 и T определяются интегралами (2.10).

Аналогичные результаты получаются и в остальных случаях

$$\begin{aligned} &g'(u) > 0, \quad \varphi(u) - g'(u) Q_1(u) > 0 \\ &g'(u) < 0, \quad \varphi(u) - g'(u) Q_1(u) < 0 \\ &g'(u) < 0, \quad \varphi(u) - g'(u) Q_1(u) > 0 \end{aligned}$$

Выясним, какие ограничения следует наложить на функции $\varphi(u)$ и $g'(u)$, чтобы из условия (2.11) вытекало существование решения (2.5). Если это решение существует, то в трубе возникают автоколебания, период которых, как видно из формулы (2.10), зависит от вида функций φ, g, Q_1, Q_2, входящих в уравнение (1.5), и в граничное условие (1.6).

3. Решение (2.5) уравнения (1.5) с условием (2.6) имеет вид:

$$\text{при } nT < \omega^{-1}\{F^{-1}[F(u) - x]\} < nT + T_1 \qquad (n = 0, \pm 1, \ldots) \tag{3.1}$$

$$t = f(u) + \omega^{-1}\{F^{-1}[F(u) - x]\} - f\{F^{-1}[F(u) - x]\}$$

$$\text{при } nT + T_1 < \Omega^{-1}\{F^{-1}[F(u) - x]\} < (n+1)T \qquad (n = 0, \pm 1, \ldots)$$

$$t = f(u) + \Omega^{-1}\{F^{-1}[F(u) - x]\} - f\{F^{-1}[F(u) - x]\} \tag{3.2}$$

(ω^{-1} и Ω^{-1} — многозначные формулы своего аргумента)

Отметим, что (3.1), (3.2) следуют из (2.5), если функции $\omega(t)$, $\Omega(t)$, $F(u)$ — монотонные.

Предположим, что $F'(u) \neq 0$, а величины $\varphi(u) - g'(u) Q_i(u)$ ($i = 1, 2$), имеющие тот же знак, что и производные $\omega'(t)$ и $\Omega'(t)$ соответственно, как видно из (2.8) и (2.9), тоже нигде не обращаются в нуль. Характеристики уравнения (1.5) определятся соотношениями

$$u = F^{-1}(x - C_2) \tag{3.3}$$

$$t = C_1 + f[F^{-1}(x - C_2)] \tag{3.4}$$

Кривые (3.4) — проекции характеристик на плоскость xt. В силу периодичности функции $u_0(t)$ кривые (3.4), являющиеся границами полуполос, внутри которых имеет место решение (3.1), даются формулами

$$t = nT - f[\omega(0)] + f\{F^{-1}[x + F(\omega(0))]\} \qquad (n = 0, \pm 1, \ldots) \tag{3.5}$$

$$= nT + T_1 - f[\omega(T_1)] + f\{F^{-1}[x + F(\omega(T_1))]\} \quad (n = 0, \pm 1, \ldots) \tag{3.6}$$

и соответственно для решения (3.2) — формулами

$$t = nT + T_1 - f[\Omega(T_1)] + f\{F^{-1}[x + F(\Omega(T_1))]\} \quad (n = 0, \pm 1, \ldots) \tag{3.7}$$

$$t = (n + 1)T - f[\Omega(T)] + f\{F^{-1}[x + F(\Omega(T))]\} \quad (n = 0, \pm 1, \ldots) \tag{3.8}$$

Очевидно, что полуполосы (3.5) — (3.6) и (3.7) — (3.8), частично перекрываясь, должны заполнять всю область $x \geqslant 0$ (иначе решение будет неединственным). В области пересечения полуполос (3.5) — (3.6) и (3.7) — (3.8) возникают скачки. В плоскости xt в силу предполагаемой периодичности решения достаточно рассмотреть полуполосу $x \geqslant 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$ шириной T или полуполосу $x \geqslant 0$ между двумя проекциями характеристик (3.5) с $n = 0$ и $n = 1$; действительно, эта полуполоса состоит из кусков, составляющих полуполосу $0 \leqslant t \leqslant T$.

Рассмотрим сначала окрестность прямой $x = 0$. Скачки, как известно [11], могут образовываться либо из-за разрывности функции $u_0(t)$, либо из-за пересечения характеристик. Функция $u_0(t)$ имеет разрывы в точках $t = nT$, $t = nT + T_1$ ($n = 0, \pm 1, \ldots$). В этих точках при $x = 0$ будут возникать скачки, если выполнены условия

$$g'[\Omega(T)] < g'[\omega(0)], \qquad g'[\omega(T_1)] < g'[\Omega(T_1)] \tag{3.9}$$

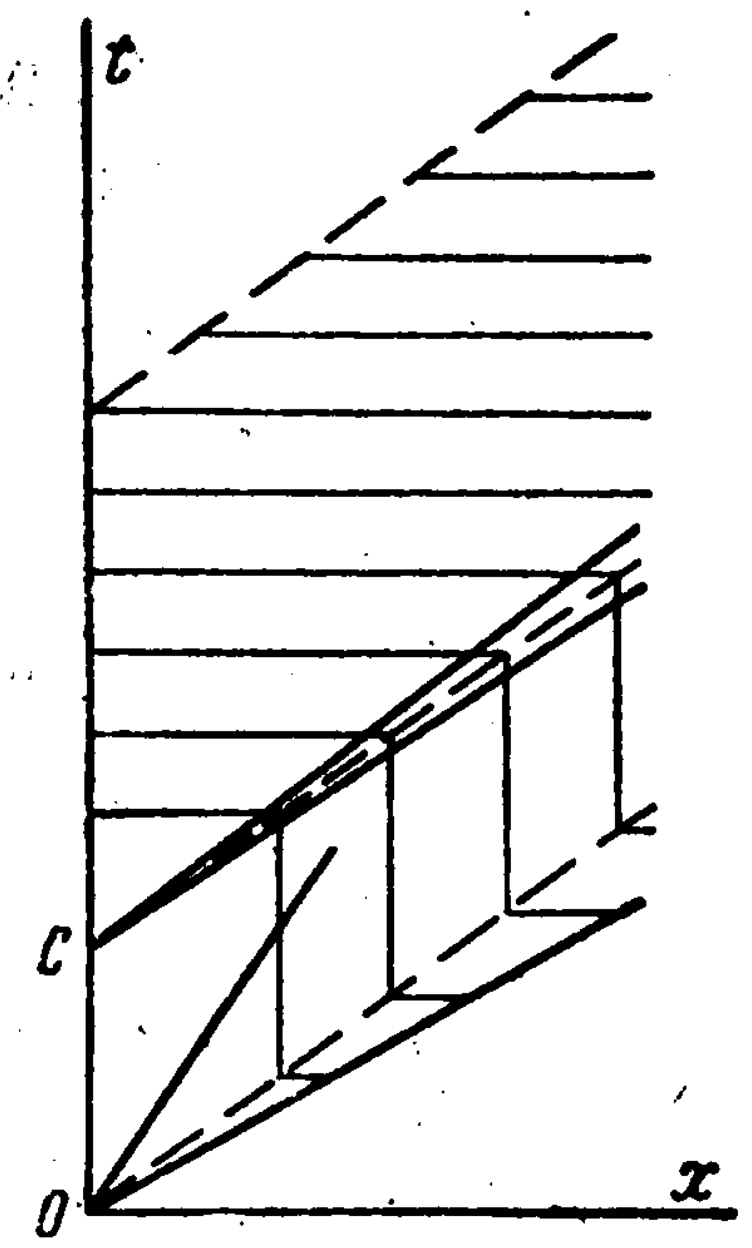
Неравенства (3.9) — следствие условия (2.3) возможности скачка. Следовательно, через точки O ($x = t = 0$) и C ($x = 0$, $t = T_1$) пройдут поверхности разрыва с начальными наклонами

$$\frac{dX}{dt} = \frac{g[\omega(0)] - g[\Omega(T)]}{\omega(0) - \Omega(T)}, \qquad \frac{dX}{dt} = \frac{g[\Omega(T_1)] - g[\omega(T_1)]}{\Omega(T_1) - \omega(T_1)} \tag{3.10}$$

соответственно, причем первая отделяет область $u = u^-$, где справедливо решение (3.1), от области $u = u^+$, где справедливо решение (3.2), а вторая — область $u = u^-$, где справедливо решение (3.2), от области $u = u^+$, где справедливо (3.1) (фиг. 2).

Ясно, что если $g'(u) \neq 0$ ($g''(u) > 0$ или $g''(u) < 0$), причем выполнены условия (3.9), то в окрестности оси t проекции характеристик будут при $x > 0$ расходящимися, и решение (2.1) при $0 \leqslant x < x_0$ существует и единственно [11].

В заштрихованных вертикально и горизонтально областях решение определяется формулами (3.1) и (3.2) соответственно, а уравнения скачков, исходящих из точек O и C, находятся численным интегрированием уравнения (2.2), причем вместо u^+ и u^- подставлены решения (3.1) и (3.2) (фиг. 2).



Фиг. 2

Условия (3.9) показывают, что константы α, β, α', β' должны удовлетворять неравенствам

$$g'(\alpha') < g'(\alpha), \qquad g'(\beta') < g'(\beta)$$

если $$\varphi(z) - g'(z)\, Q_1(z) < 0$$

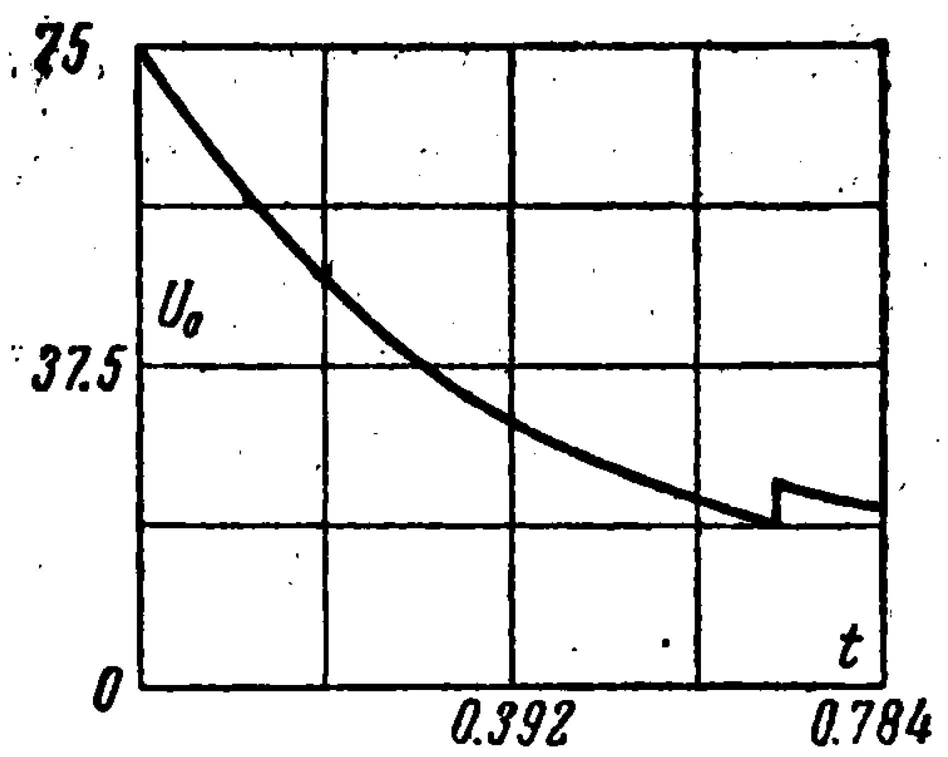
Легко видеть, что требования, которые нужно наложить на функции $g'(u)$ и $\varphi(u)$ для того, чтобы проекции соседних характеристик не пересекались при $x > 0$, сводятся к уже наложенным выше: $F'(u) \neq 0$, $g'(u) \neq 0$.

Теперь ясно, каким образом строить решение уравнения (2.1) при сформулированных выше предположениях относительно функций $g'(u)$, $\varphi(u)$, $Q_i(u)$ до тех пор, пока два скачка не пересекутся. В точке M пересечения скачков, где имеется три значения функции $u(x, t)$, нужно рассматривать задачу о распаде произвольного разрыва [9]. Пусть, например, одно из значений u_1 функции $u(x, t)$ приносится по характеристике из области, где имеет место решение (3.1), а два других u_2 и u_3 — из области, где имеет место решение (3.2). Тогда в точке M выполнено условие (2.3)

$$g'(u_2^-) > g'(u_1^+) = g'(u_1^-) > g'(u_3^+) \qquad (3.11)$$

Так как значение $u_1^+ = u_1^-$ относится к внутренней области между характеристиками, по которым приносятся значения (3.2) функции $u(x, t)$, то в силу (3.11) для функций u_2^- и u_3^+ имеет место условие (2.3) $g'(u_2^-) > g'(u_3^+)$ и из точки M выйдет скачок со скоростью

$$\frac{dX}{dt} = \frac{g(u_3^+) - g(u_2^-)}{u_3^+ - u_2^-}$$



Фиг. 3

Дальнейшее решение будет зависеть только от значений (3.2) функции $u(x, t)$, принесенных по соответствующим характеристикам. Остается исследовать устойчивость найденного периодического решения.

Легко показать, что уравнение (1.5) с граничным условием (1.6) имеет стационарное решение

$$u = F^{-1}[x + F(\vartheta)] \qquad (\vartheta \text{ — значение функции } u(x) \text{ при } x = 0) \qquad (3.12)$$

если уравнение $\varphi(\vartheta) = g'(\vartheta)\, Q(\vartheta)$ имеет корень ϑ.

Линеаризируя уравнение (1.5) и условие (1.6) около стационарного решения (3.12), получим условие устойчивости последнего $\lambda < 0$ и условие самовозбуждения [10] автоколебаний $\lambda > 0$, при этом

$$\lambda = g'(\vartheta)\left\{\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{\varphi(\vartheta)}{g'(\vartheta)}\right) - Q'(\vartheta)\right\} \tag{3.13}$$

Аналогично, линеаризируя уравнение (1.5) и граничное условие (1.6) около периодического решения, получим условие устойчивости $\Lambda < 0$ и неустойчивости $\Lambda > 0$ периодического решения (1.5), (1.6), где

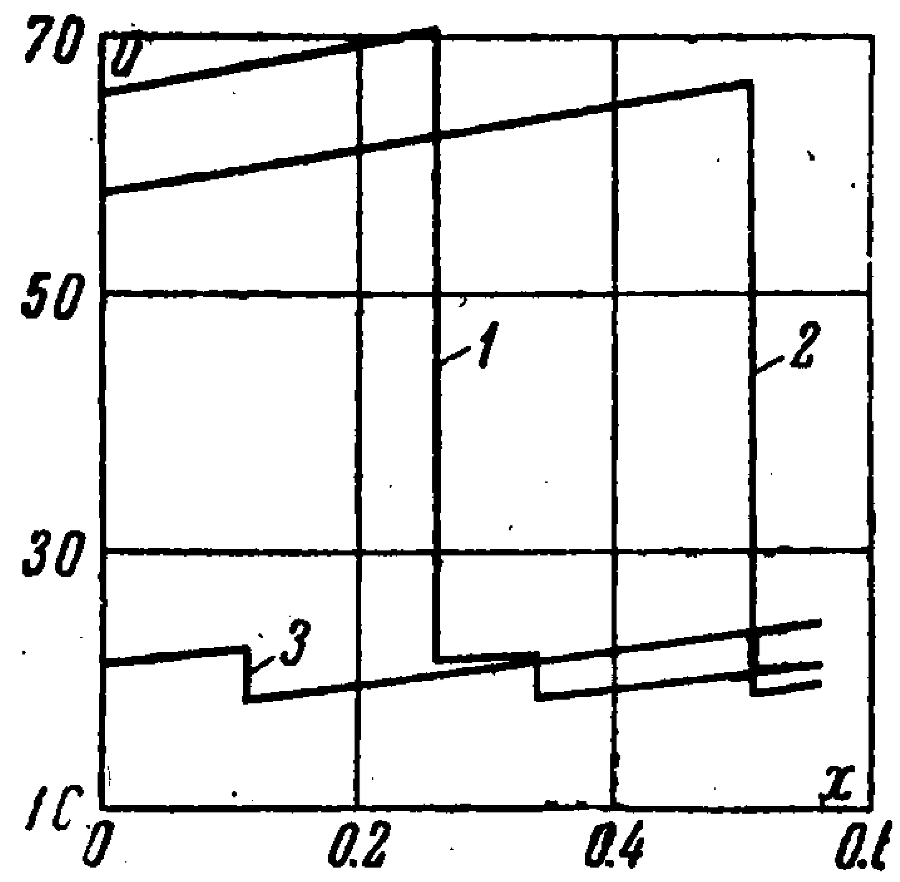
$$\Lambda = \int_0^T \left[\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial u_0} + \sigma Q_{u_0} + f'(u_0)\Phi^{-1''}(\tau)\, Q_{u_0}'\right]\left(\frac{1 - f'(u_0)\, du_0/dt}{f'(u_0) + \sigma Q u_0'}\right) dt$$

$$(\sigma = F'(u_0) - f'(u_0)\,\Phi^{-1'}[t - f(u_0)], \quad \tau = t - f'(u_0))$$

На фиг. 3 и 4 представлены функции $u(0, t)$ и $u(x, t)$ — решение уравнения (1.5), где $g'(u) = u$, $\varphi(u) = -\mu u^2$ с граничным условием (1.4), причем было принято

$h = 1540$ *см*, $q_1 = 2750$ *см/сек* $(u > \beta', \ \partial u/\partial t < \gamma)$
$q_2 = 1375$ *см/сек* $(\alpha' < u < \beta, \ \partial u/\partial t > \delta)$
$\mu = 0.7145 \cdot 10^{-2}$ *сек*$^{-1}$, $\alpha = -99.5600$, $\beta = -13.5924$
$\alpha' = -11.8482$, $\beta' = -19.8619$ *см/сек*, $\gamma = -35.4676$
$\delta = -21.1574$ *см/сек*^{2}

Кривые *1*, *2*, *3* отвечают значениям $t = 0.056$, 0.112, 0,728 *сек* соответственно.



Фиг. 4

4. Если функция $g'(u)$, входящая в уравнение (1.5), мало отличается от константы A, то с некоторым приближением можно заменить (1.5) уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(u) \tag{4.1}$$

Пользуясь (3.1) и (3.2), найдем явное выражение решения (4.1)

$$u(x, t) = \begin{cases} f^{-1}\{x/A + f[\omega(t - x/A)]\} \text{ при } nT < t - x/A < nT + T_1 & (n = 0, \pm 1, \ldots) \\ f^{-1}\{x/A + f[\Omega(t - x/A)]\} \text{ при } nT + T_1 < t - x/A < (n+1)T & \end{cases} \tag{4.2}$$

Проекции характеристик (3.4) в этом случае — прямые линии с тангенсом угла наклона, равным $1/A$; вместо скачков из точек O и C исходят характеристики $x = At$ и $x = A(t - T_1)$ соответственно, вдоль которых решение терпит разрыв (или его производные терпят разрыв).

При $\varphi(u) = -\delta u$ решение (4.2) принимает вид

$$u(x, t) = \begin{cases} \exp(-\delta x/A)\,\omega(t - x/A) & \text{при } nT < t - x/A < nT + T_1 \\ \exp(-\delta x/A)\,\Omega(t - x/A) & \text{при } nT + T_1 < t - x/A < (n+1)T \end{cases} \tag{4.3}$$

5. Рассмотрим теперь вместо уравнения (1.5) уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A\frac{\partial u}{\partial x} = -\delta u + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{5.1}$$

Будем одновременно рассматривать две задачи.

Задача 1. Найти периодическое решение линейного дифференциального уравнения (5.1) с граничным условием (1.6).

Задача 2. Найти периодическое решение уравнения (5.1) с граничным условием

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\nu}{A}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) + Q\left[u(0, t), \frac{\partial u(0,t)}{\partial t}\right] \tag{5.2}$$

Решение обеих задач легко свести к интегрированию в области $z > 0$ уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad \left| \quad \begin{pmatrix} t = \tau T / 2\pi, \; x = \vartheta^{-1} z, & \vartheta^2 = 2\pi / \nu T \\ u = w \exp\left[-(\delta + \nu a^2)t + ax\right], & a = A / 2\nu \end{pmatrix} \right. \tag{5.3}$$

с граничным условием (1.6) и (5.2), соответственно. Из периодичности $u(z, \tau)$ по τ с периодом 2π следует функциональное уравнение

$$w(z, \tau + 2\pi) = w(z, \tau)\exp(-2\pi\zeta) \qquad (\zeta = -(\delta + \nu a^2)T / 2\pi) \tag{5.4}$$

Решение уравнения теплопроводности (5.3), удовлетворяющее функциональному уравнению (5.4), найдено в статье [12] и дано формулами (2.1) и (2.2), причем в рассматриваемом нами случае $\zeta < 0$. Чтобы функция $u(z, \tau)$ при $z \to \infty$ была ограничена, между константами A_0 и B_0, входящими в формулу (2.2) статьи [12] должна существовать зависимость

$$A_0 + B_0 / \sqrt{-\zeta} = 0$$

Используя формулы (2.1) и (2.2) статьи [12], напишем выражение:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}A_0 \exp\{[a - (a^2 + \delta / \nu)^{1/2}]\,x\} + \tag{5.5}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \exp\{[a + \vartheta\rho_k]x\}\{A_k \cos[\vartheta^2 kt - \vartheta\omega_k x] + B_k \sin[\vartheta^2 kt - \vartheta\omega_k x]\}$$

Остается определить коэффициенты Фурье A_k и B_k функции $u(0, t)$, входящие в (5.5), пользуясь граничным условием (1.6) или (5.2).

Рассмотрим первую задачу. При помощи (5.5) запишем (1.6) так:

$$Q_i\left[\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \cos k\tau + B_k \sin k\tau)\right] = v(\tau) \tag{5.6}$$

где

$$v = \frac{A_0}{2}\left[a - \left(a^2 + \frac{\delta}{\nu}\right)\right]^{1/2} + \sum_{k=1}^{\infty}\{(aA_k + \vartheta a_k)\cos k\tau + (aB_k + \vartheta b_k)\sin k\tau\}$$

$$(a_k = \rho_k A_k - \omega_k B_k, \; b_k = \rho_k B_k + \omega_k A_k) \tag{5.7}$$

$$Q(z, y) = \begin{cases} Q_1(z) & \text{при } \beta' < z < \alpha, \; y < \gamma \\ Q_2(z) & \text{при } \alpha' < z < \beta \text{ или при } \beta < z < \alpha', \; y > \delta \end{cases} \tag{5.8}$$

Если функция (5.8) имеет вид (1.4)

$$Q_1 = q_1 + hz, \qquad Q_2 = q_2 + hz$$

то, пользуясь формулами (5.6) — (5.8), найдем коэффициенты A_k и B_k.

$$A_0 = \frac{q_1\tau_1 + q_2(2\pi - \tau_1)}{\pi[a - \vartheta\sqrt{-\zeta} - h]}, \qquad \Delta_k = (a + \vartheta\rho_k - h)^2 + \vartheta^2\omega_k^2$$

$$B_k = \frac{(q_1 - q_2)}{\pi k \Delta_k}[(a + \vartheta\rho_k - h)(1 - \cos k\tau_1) - \vartheta\omega_k \sin k\tau_1]$$

$$A_k = \frac{(q_1 - q_2)}{\pi k \Delta_k}[(a + \vartheta\rho_k - h)\sin k\tau_1 + \vartheta\omega_k(1 - \cos k\tau_1)]$$

Величины τ_1 и T определятся при $q_1 > q_2$ как наименьшие корни трансцендентных уравнений

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k = \frac{\alpha + \alpha'}{2}, \qquad \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\tau_1 + B_k \sin k\tau_1) = \frac{\beta + \beta'}{2}$$

причем в рассматриваемом случае $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, $\gamma = \delta = 0$.

В более общем случае можно рассмотреть обратную задачу, считая, что функция $u_0(\tau)$ имеет вид, аналогичный (2.12). Разложив функцию $u_0(\tau)$ в ряд Фурье, найдем коэффициенты A_k и B_k и, следовательно, определим вид функций $Q_1(z)$, $Q_2(z)$.

Обратимся теперь к решению задачи 2. Условие (5.2) есть не что иное, как условие (2.6) для случая, когда $\varphi(u) = -\delta u$, $g'(u) = A$. Поэтому $u(0, \tau)$, T_1 и T находятся по известной функции Q точно так же, как это было сделано п. 2. Решение рассматриваемой задачи дается выражением (5.5), где A_k и B_k — коэффициенты Фурье найденной функции $u(0, \tau)$, определяемой по формуле (2.6).

Перейдем к пределу, устремляя величину ν к нулю. Легко видеть, что решение (5.5) примет при этом вид

$$u(x, t) = \exp\left(-\frac{\delta x}{A}\right)\left[\frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \nu\vartheta^2 k\left(t - \frac{x}{A}\right) + B_k \sin \nu\vartheta^2 k\left(t - \frac{x}{A}\right)\right] \tag{5.9}$$

а условие (5.2) перейдет в (1.6). Таким образом, в пределе при $\nu \to 0$ решение второй задачи совпадает с (4.3) — решением уравнения (4.1), где $\varphi(u) = -\delta u$, с граничным условием (1.6).

Поступила 24 III 63

ЛИТЕРАТУРА

1. Витт А. А. Распределенные автоколебательные системы. Ж. техн. физ., 1934, т. IV, вып. 1.
2. Витт А. А. К теории скрипичной струны. Ж. техн. физ., 1936, т. VI, вып. 9; Дополнение и поправка к моей работе «Колебания скрипичной струны», Ж. техн. физ., 1937, т. VII, вып. 5.
3. Неймарк Ю. И., Кубланов И. М. Исследование периодических режимов и их устойчивости для простейшей распределенной системы релейного регулирования температуры. Автоматика и телемеханика, 1953, т. XIV, № 1.
4. Андронов А. А., Аронович Г. В. К теории гидравлического тарана. Инж. сб., 1954, т. XX.
5. Цынкова О. Э. Об автоколебаниях в сверхзвуковом диффузоре. Изв. АН СССР, ОТН, 1959, № 5.
6. Чарный И. А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. Гостехиздат, 1951.
7. Олейник О. А. Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений. Успехи матем. наук, 1957, т. XII, вып. 3 (75).
8. Олейник О. А. Задачи Коши для нелинейных дифференциальных уравнений с разрывными начальными условиями. Изд. АН СССР, 1954.
9. Гельфанд И. М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. Успехи матем. наук, 1959, т. XIV, вып. 2 (86).
10. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. Физматгиз, 1959.
11. Самарский А. А., Тихонов А. Н. О разрывных решениях квазилинейного уравнения первого порядка. Докл. АН СССР, 1954, т. 99, № 1.
12. Кочина Н. Н. О периодических решениях уравнения Бюргерса. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 6.