Прикладная математика и механика. Т. XXVII, 1963

ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК ПРИ ПОМОЩИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

А. Л. Гольденвейзер

(Москва)

В статье [1] изложен асимптотический метод интегрирования дифференциальных уравнений теории упругости, при помощи которого можно с произвольной точностью построить приближенную теорию изгиба пластинок. Аналогичные идеи (без подчеркивания асимптотического характера подхода) применялись при построении различных приближенных теорий изгиба и растяжения пластинок, а также приближенных теорий оболочек [2-6]. Решающе важная для такого подхода идея выделения в самостоятельное рассмотрение краевых упругих явлений высказана несколько раньше К. О. Фридрихсом [7,8], но была использована только для вывода граничных условий на свободном краю оболочки.

В предлагаемой работе метод статьи [1] применяется к построению общей теории оболочек. Как будет видно, существует тесная связь между асимптотическим методом построения приближенной теории оболочек и методом асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений теории оболочек, развитым в монографии [9].

1. Отнесем пространство к произвольной криволинейной системе координат x^1, x^2, x^3 и обозначим через $\mathbf{R} = \mathbf{R}(x^1, x^2, x^3)$ радиус-вектор произвольной точки. Тогда главные вектор $\mathbf{R}_i$ и метрический тензор g_{ij} определятся формулами

$$\mathbf{R}_i = \partial \mathbf{R} / \partial x^i, \qquad g_{ij} = \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_j$$

Здесь и дальше латинские индексы принимают значения 1, 2, 3.

Пусть $\mathbf{U}$ — вектор смещения. Введем в рассмотрение тензор деформации γ_{ij} и тензор напряжений σ^{ij}. Тогда для изотропного упругого тела

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{R}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x^j} + \mathbf{R}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x^i}\right), \qquad E\gamma_{ij} = (1+\sigma)\, g_{ir}\sigma_j^{\ r} - \sigma g_{ij}\sigma_r^{\ r} \tag{1.1}$$

где E — модуль Юнга, а σ — коэффициент Пуассона (используемые здесь тензорные соотношения теории упругости можно найти, например, в книге [10]).

Уравнения равновесия при отсутствии массовых сил имеют вид

$$\partial \mathbf{T}^i / \partial x^i = 0, \qquad \mathbf{T}^i = \sqrt{g}\,\sigma^{ij}\mathbf{R}_j \qquad (g = |g_{ij}|) \tag{1.2}$$

При построении теории оболочек удобно пользоваться криволинейными координатами, в которых

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(x^1, x^2) + x^3\mathbf{n}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор срединной поверхности, а $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали срединной поверхности.

Обозначим через $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ тензоры первой и второй квадратичной формы срединной поверхности, соответственно, и условимся, что греческие индексы здесь и в дальнейшем принимают значения 1 и 2. Тогда метрический тензор g_{ij} выразится через $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ следующим образом:

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2x^3 b_{\alpha\beta} + (x^3)^2 b_\alpha{}^\lambda b_{\beta\lambda}, \qquad g_{\alpha 3} = 0, \qquad g_{33} = 1 \tag{1.3}$$

Кроме того, имеют место формулы

$$\sqrt{\frac{g}{a}} = 1 - x^3 b_\lambda{}^\lambda + (x^3)^2 K, \qquad a = |a_{\alpha\beta}|, \qquad K = b_1{}^1 b_2{}^2 - b_2{}^1 b_1{}^2 \tag{1.4}$$

в которых K — гауссова кривизна срединной поверхности.

Удобно ввести несимметричный тензор напряжения τ^{ij}

$$\sqrt{g/a}\, \sigma_\beta{}^i = (a_{\lambda\beta} - x^3 b_{\lambda\beta})\, \tau^{i\lambda}, \qquad \sqrt{g/a}\, \sigma^{i3} = \tau^{i3} \tag{1.5}$$

При этом вектор $\mathbf{T}^i$, входящий в уравнение равновесия, запишется так:

$$\mathbf{T}^i = \sqrt{a}\, (\tau^{i\lambda} \mathbf{r}_\lambda + \tau^{i3} \mathbf{n}) \tag{1.6}$$

Условия симметрии тензора σ^{ij} после некоторых преобразований приводят к равенствам

$$c_{\lambda\beta} (\tau^{\lambda\beta} - x^3 b_\alpha{}^\lambda \tau^{\alpha\beta}) = 0, \qquad \tau^{3\lambda} = \tau^{\lambda 3} - x^3 b_\mu{}^\lambda \tau^{\mu 3} \tag{1.7}$$

где $c_{\lambda\mu}$ — кососимметричный дискриминантный тензор с компонентами

$$c_{\alpha\alpha} = 0, \qquad c_{12} = -c_{21} = \sqrt{a}$$

Подставив (1.6) в уравнение равновесия, получим

$$\nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} - b_\alpha{}^\beta \tau^{\alpha 3} + \frac{\partial \tau^{3\beta}}{\partial x^3} = 0, \qquad \nabla_\alpha \tau^{\alpha 3} + b_{\alpha\beta} \tau^{\alpha\beta} + \frac{\partial \tau^{33}}{\partial x^3} = 0 \tag{1.8}$$

Здесь ∇_α — символ ковариантного дифференцирования в метрике, установленной на срединной поверхности. Эта операция определяется следующими формулами (см., например, [11]):

$$\begin{aligned} &\nabla_\lambda A^{\alpha\beta} = \frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha} A^{\mu\beta} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\beta} A^{\alpha\mu}, \qquad &\nabla_\lambda A^\alpha = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha} A^\mu \\ &\nabla_\lambda A_\alpha = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\lambda} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\mu} A_\mu, &\nabla_\lambda A = \frac{\partial A}{\partial x^\lambda} \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{a^{\alpha\lambda}}{2} \left(\frac{\partial a_{\beta\lambda}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial a_{\gamma\lambda}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial x^\lambda} \right) \tag{1.10}$$

(выражение $\nabla_\alpha \tau^{\alpha 3}$ надо расшифровывать по второй из этих формул). Примем, что вектор смещения

$$\mathbf{U} = u^s \mathbf{r}_s - W \mathbf{n}$$

Тогда при помощи (1.1) получим

$$\begin{aligned} &2\gamma_{\alpha\beta} = \nabla_\beta u_\alpha + \nabla_\alpha u_\beta + 2b_{\alpha\beta} W - x^3 [b_\beta{}^\lambda (\nabla_\alpha u_\lambda + b_{\lambda\alpha} W) + b_\alpha{}^\lambda (\nabla_\beta u_\lambda + b_{\lambda\beta} W)] \\ &2\gamma_{\alpha 3} = -\nabla_\alpha W + b_\alpha{}^\lambda u_\lambda + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^3} - x^3 b_\alpha{}^\lambda \frac{\partial u_\lambda}{\partial x^3}, \qquad \gamma_{33} = -\frac{\partial W}{\partial x^3} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Соотношения упругости (1.1), учитывая (1.5), можно переписать так:

$$-E\sqrt{\frac{g}{a}}\frac{\partial W}{\partial x^3} = \tau^{33} - \sigma\tau^{\alpha\rho}(a_{\alpha\rho} - x^3 b_{\alpha\rho}) \tag{1.12}$$

$$\frac{E}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}\left(-\nabla_\alpha W + b_\alpha{}^\lambda u_\lambda + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^3} - x^3 b_\alpha{}^\lambda \frac{\partial u_\lambda}{\partial x^3}\right) = (1+\sigma) g_{\alpha\lambda}\tau^{\lambda 3}$$

$$\frac{E}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}\{\nabla_\beta u_\alpha + \nabla_\alpha u_\beta + 2b_{\alpha\beta}W - x^3 [b_\beta{}^\lambda(\nabla_\alpha u_\lambda + b_{\lambda\alpha}W) +$$

$$+ b_\alpha{}^\lambda(\nabla_\beta u_\lambda + b_{\lambda\beta}W)]\} =$$

$$= (1+\sigma) g_{\alpha\lambda}(a_{\mu\beta} - x^3 b_{\mu\beta})\tau^{\lambda\mu} - \sigma g_{\alpha\beta}[(a_{\lambda\mu} - x^3 b_{\lambda\mu})\tau^{\lambda\mu} + \tau^{33}]$$

Если толщину оболочки обозначить через $2h$, то равенствами $x^3 = \pm h$ будут задаваться внешняя и внутренняя поверхности оболочки. На них должны выполняться краевые условия. Примем, что они имеют вид

$$\tau^{33} = \pm\frac{1}{2}x, \qquad \tau^{3\alpha} = \pm\frac{1}{2}X^\alpha \quad \text{при } x^3 = \pm h \tag{1.13}$$

Здесь и в дальнейшем предполагается, что h — константа.

2. Уравнения равновесия (1.8), условия симметрии (1.7) и соотношения упругости (1.12) составляют полную систему дифференциальных уравнений для определения перемещений и напряжений. Приступая к интегрированию этой системы, применим прием, который в [1] был использован для построения основного итерационного процесса. Заменим независимые переменные по формулам

$$x^\alpha = R\xi^\alpha, \qquad x^3 = h\zeta \tag{2.1}$$

(здесь R — характерный радиус кривизны срединной поверхности) и примем, что напряжения и перемещения не слишком быстро изменяются по переменным ξ^1, ξ^2, ζ, т. е. будем считать, что искомое напряженное состояние быстро меняется только в направлении переменной x^3.

Перечисленные уравнения после замены переменных (2.1) примут вид

$$h^*\nabla_\alpha'\tau^{\alpha\beta} - h^*Rb_\alpha{}^\beta\tau^{\alpha 3} + \frac{\partial\tau^{3\beta}}{\partial\zeta} = 0, \qquad h^*\nabla_\alpha'\tau^{\alpha 3} + h^*Rb_{\alpha\beta}\tau^{\alpha\beta} + \frac{\partial\tau^{33}}{\partial\zeta} = 0$$

$$c_{\lambda\beta}(\tau^{\lambda\beta} - h^*\zeta Rb_\alpha{}^\lambda\tau^{\alpha\beta}) = 0, \qquad \tau^{3\lambda} = \tau^{\lambda 3} - h^*\zeta Rb_\mu{}^\lambda\tau^{\mu 3}$$

$$-\frac{E}{R}\sqrt{\frac{g}{a}}\frac{\partial W}{\partial\zeta} = h^*[\tau^{33} - \sigma\tau^{\alpha\rho}(a_{\alpha\rho} - h^*\zeta Rb_{\alpha\beta})] \tag{2.2}$$

$$\frac{E}{2R}\sqrt{\frac{g}{a}}\left(-h^*\nabla_\alpha' W + h^*Rb_\alpha{}^\lambda u_\lambda + \frac{\partial u_\alpha}{\partial\zeta} - h^*\zeta Rb_\alpha{}^\lambda\frac{\partial u_\lambda}{\partial\zeta}\right) = h^*(1+\sigma)g_{\alpha\lambda}\tau^{\lambda 3}$$

$$\frac{E}{2R}\sqrt{\frac{g}{a}}\{\nabla_\beta' u_\alpha + \nabla_\alpha' u_\beta + 2Rb_{\alpha\beta}W - \zeta h^*[Rb_\beta{}^\lambda(\nabla_\alpha' u_\lambda + Rb_{\lambda\alpha}W) +$$

$$+ Rb_\alpha{}^\lambda(\nabla_\beta' u_\lambda + Rb_{\lambda\beta}W)]\} =$$

$$= (1+\sigma)g_{\alpha\lambda}(a_{\mu\beta} - h^*\zeta Rb_{\mu\beta})\tau^{\lambda\mu} - \sigma g_{\alpha\beta}[(a_{\lambda\mu} - \zeta h^*Rb_{\lambda\mu})\tau^{\lambda\mu} + \tau^{33}],$$

где $h^* = h/R$, а $\nabla_\alpha' = R\nabla_\alpha$ — символ ковариантного дифференцирования по переменным ξ^α.

Замечание. Замена (2.1) переменных $x^\alpha = R\xi^\alpha$ эквивалентна замене символа ∇_α на $\nabla_\alpha R^{-1}$. Действительно, по первой формуле (1.9), например

$$R\nabla_\lambda A^{\alpha\beta} = \frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial \xi^\lambda} + R\Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha} A^{\mu\beta} + R\Gamma_{\mu\lambda}^{\beta} A^{\alpha\mu}$$

причем, согласно (1.10)

$$R\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{a^{\alpha\lambda}}{2}\left(\frac{\partial a_{\beta\lambda}}{\partial \xi^\gamma} + \frac{\partial a_{\gamma\lambda}}{\partial \xi^\beta} - \frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial \xi^\lambda}\right)$$

Система (2.2) содержит малый параметр h^*. Он входит в уравнения в явном виде и содержится в величинах g, $g_{\alpha\beta}$, которые, согласно (1.3), (1.4) и (2.1), определяются формулами (2.3)

$$\sqrt{\frac{g}{a}} = 1 - h^*\zeta R b_\lambda{}^\lambda + h^{*2}\zeta^2 R^2 K, \qquad g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2h^*\zeta R b_{\alpha\beta} + h^{*2}\zeta^2 R^2 b_\alpha{}^\lambda b_{\beta\lambda}$$

3. Будем искать решение уравнений (2.2) в виде

$$\tau^{\alpha\beta} = h^{*-r}\Sigma h^{*s}\tau_{(s)}{}^{\alpha\beta}, \qquad \tau^{\alpha 3} = h^{*-r}\Sigma h^{*s}\tau_{(s)}{}^{\alpha 3}, \qquad \tau^{33} = h^{*-r}\Sigma h^{*s}\tau_{(s)}{}^{33}$$
$$u_\alpha = h^{*-r}\Sigma h^{*s} u_\alpha{}^{(s)}, \qquad W = h^{*-r}\Sigma h^{*s} W^{(s)} \tag{3.1}$$

Здесь r — число (разное для различных величин), которое будет выбираться ниже; величины, отмеченные индексом s (он взят в скобки, так как не имеет тензорного характера), либо вовсе не зависят от h, либо имеют общий для всех этих величин множитель h^p; суммирование ведется по целым значениям s, начиная от нуля.

Выберем r следующим образом:

$$\tau^{\alpha\beta} \to r = \varkappa + 1, \qquad (\tau^{\alpha 3}, \tau^{33}) \to r = \varkappa, \qquad (u_\alpha, W) \to r = \varkappa + 1 \tag{3.2}$$

(здесь $\varkappa$ — пока неопределенное число), подставим разложения (3.1) в (2.2) и потребуем, чтобы в каждом отдельно взятом уравнении (2.2) обратились в нуль коэффициенты при всех степенях h^*, начиная с самой низкой. Получим последовательность систем уравнений для определения коэффициентов разложений (3.1). Головная система в ней имеет вид

$$\nabla_\alpha{}'\tau_{(0)}{}^{\alpha\beta} + \frac{\partial \tau_{(0)}{}^{3\beta}}{\partial \zeta} = 0, \qquad R b_{\alpha\beta}\tau_{(0)}{}^{\alpha\beta} + \frac{\partial \tau_{(0)}{}^{33}}{\partial \zeta} = 0$$
$$c_{\lambda\beta}\tau_{(0)}{}^{\lambda\beta} = 0, \qquad \tau_{(0)}{}^{3\lambda} = \tau_{(0)}{}^{\lambda 3} \tag{3.3}$$
$$\frac{\partial W^{(0)}}{\partial \zeta} = 0, \qquad \frac{\partial u_\alpha{}^{(0)}}{\partial \zeta} = 0$$
$$\frac{E}{2R}(\nabla_\beta{}' u_\alpha{}^{(0)} + \nabla_\alpha{}' u_\beta{}^{(0)} + 2R b_{\alpha\beta} W^{(0)}) = P_{\alpha\beta\lambda\mu}\tau_{(0)}{}^{\lambda\mu}$$

где

$$P_{\alpha\beta\lambda\mu} = (1 + \sigma)\, a_{\alpha\lambda} a_{\beta\mu} - \sigma a_{\alpha\beta} a_{\lambda\mu} \tag{3.4}$$

Уравнения (3.3) легко интегрируются по ζ. Выполнив эту операцию, положив $\varkappa = 0$, приняв во внимание условия на поверхностях (1.13) и считая, что в них величины x и X^α можно представить в виде

$$X^\alpha = \Sigma h^{*s} X_{(s)}{}^{\alpha}, \qquad x = \Sigma h^{*s} x_{(s)} \tag{3.5}$$

получим (3.6)

$$W^{(0)} = w^{(0)}(\xi^1, \xi^2), \qquad u_\alpha^{(0)} = v_\alpha^{(0)}(\xi^1, \xi^2)$$

$$\frac{E}{2R}(\nabla_\beta' v_\alpha^{(0)} + \nabla_\alpha' v_\beta^{(0)} + 2Rb_{\alpha\beta}w^{(0)}) = P_{\alpha\beta\lambda\mu}\tau_{(0)}^{\lambda\mu}$$

$${}_{\lambda\beta}\tau_{(0)}^{\alpha\beta} = 0, \quad \tau_{(0)}^{3\lambda} = \tau_{(0)}^{\lambda 3}, \quad \nabla_\alpha'\tau_{(0)}^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}X_{(0)}^{\beta}, \quad Rb_{\alpha\beta}\tau_{(0)}^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}x_{(0)}$$

$$\tau_{(0)}^{3\beta} = \frac{\zeta}{2}X_{(0)}^{\beta}, \qquad \tau_{(0)}^{33} = \frac{\zeta}{2}x_{(0)}$$

Равенства (3.6) образуют полную систему дифференциальных уравнений (с независимыми переменными ξ^1, ξ^2) относительно неизвестных $\tau_{(0)}^{\alpha\beta}$, $\tau_{(0)}^{3\lambda}$, $\tau_{(0)}^{\lambda 3}$, $w^{(0)}$, $v_\alpha^{(0)}$, не зависящих от ζ. Здесь напряжения $\tau_{(0)}^{\alpha\beta}$ остаются постоянными по толщине оболочки и соответствующее напряженное состояние, как будет показано в п. 11, тесно связано с безмоментным напряженным состоянием классической теории оболочек.

4. Для однородных уравнений (2.2), когда

$$X_{(s)}^{\alpha} = x_{(s)} = 0 \tag{4.1}$$

существует еще один вид разложений (3.1). Он получается, если выбрать следующую комбинацию значений r:

$$\tau^{\alpha\beta} \to r = \varkappa + 1, \qquad (\tau^{\alpha 3}, \tau^{33}) \to r = \varkappa, \qquad (u_\alpha, W) \to r = \varkappa + 2 \tag{4.2}$$

Подставим (3.1), (4.2) в уравнения (2.2) и потребуем, чтобы в первых пяти из них обратились в нуль коэффициенты при самой низкой степени h^*, а в шестом и седьмом уравнениях (2.2) обратились в нуль коэффициенты при самой низкой и следующей за ней степенях h^*. Получим, учтя (2.3)

$$\nabla_\alpha'\tau_{(0)}^{\alpha\beta} + \frac{\partial\tau_{(0)}^{3\beta}}{\partial\zeta} = 0, \quad Rb_{\alpha\beta}\tau_{(0)}^{\alpha\beta} + \frac{\partial\tau_{(0)}^{33}}{\partial\zeta} = 0, \quad c_{\lambda\beta}\tau_{(0)}^{\lambda\beta} = 0, \quad \tau_{(0)}^{3\lambda} = \tau_{(0)}^{\lambda 3}$$

$$\frac{\partial W^{(0)}}{\partial\zeta} = 0, \quad \frac{\partial u_\alpha^{(0)}}{\partial\zeta} = 0, \quad \frac{\partial u_\alpha^{(1)}}{\partial\zeta} - \nabla_\alpha' W^{(0)} + Rb_\alpha^{\lambda}u_\lambda^{(0)} = 0$$

$$\frac{1}{2R}(\nabla_\beta' u_\alpha^{(0)} + \nabla_\alpha' u_\beta^{(0)} + 2Rb_{\alpha\beta}W^{(0)}) = 0$$

$$\frac{E}{2R}[\nabla_\beta' u_\alpha^{(1)} + \nabla_\alpha' u_\beta^{(1)} - Rb_\beta^{\lambda}\zeta(\nabla_\alpha' u_\lambda^{(0)} + Rb_{\lambda\alpha}W^{(0)}) -$$
$$- Rb_\alpha^{\lambda}\zeta(\nabla_\beta' u_\lambda^{(0)} + Rb_{\lambda\beta}W^{(0)})] = P_{\alpha\beta\lambda\mu}\tau_{(0)}^{\lambda\mu} \tag{4.3}$$

Выполнив интегрирование по ζ в этих уравнениях и приняв во внимание однородные условия на поверхностях (1.13), будем иметь

$$W^{(0)} = w^{(0)}(\xi^1, \xi^2), \qquad u_\alpha^{(0)} = v_\alpha^{(0)}(x^1, x^2), \qquad u_\alpha^{(1)} = \zeta(\nabla_\alpha' w^{(0)} - Rb_\alpha^{\lambda}v_\lambda^{(0)})$$

$$\nabla_\beta' v_\alpha^{(0)} + \nabla_\alpha' v_\beta^{(0)} + 2Rb_{\alpha\beta}w^{(0)} = 0$$

$$\frac{E\zeta}{2R}[\nabla_\beta'(\nabla_\alpha' w^{(0)} - Rb_\alpha^{\lambda}v_\lambda^{(0)}) + \nabla_\alpha'(\nabla_\beta' w^{(0)} - Rb_\beta^{\lambda}v_\lambda^{(0)}) -$$
$$- Rb_\beta^{\lambda}\zeta(\nabla_\alpha' v_\lambda^{(0)} + Rb_{\lambda\alpha}W^{(0)}) - Rb_\alpha^{\lambda}\zeta(\nabla_\beta' v_\lambda^{(0)} + Rb_{\lambda\beta}W^{(0)})] = P_{\alpha\beta\lambda\mu}\tau_{(0)}^{\lambda\mu}$$

$$\tau_{(0)}^{3\beta} = \frac{1}{2}(1-\zeta^2)\nabla_\alpha'\frac{\tau_{(0)}^{\alpha\beta}}{\zeta}, \qquad \tau_{(0)}^{33} = \frac{1}{2}(1-\zeta^2)Rb_{\alpha\beta}\frac{\tau_{(0)}^{\alpha\beta}}{\zeta} \tag{4.4}$$

Пятым равенством (4.4) тензор $\tau_{(0)}{}^{\alpha\beta}$ задается как однородная функция ζ. В п. 11 будет показано, что формулы (4.4) определяют напряженное состояние, тесно связанное с чисто моментным напряженным состоянием классической теории оболочек.

5. Введем в рассмотрение напряженные и деформированные состояния, которые быстро меняются не только по переменной x^3, но и по переменным x^1, x^2. Для этого вместо (2.1) применим замену независимых переменных

$$x^\alpha = \frac{R}{k_{(\alpha)}}\xi^\alpha, \qquad x^3 = h\zeta \tag{5.1}$$

и будем считать, что по (ξ^1, ξ^2, ζ) изменяемость искомого напряженного и деформированного состояния не слишком велика.

В формулах (5.1) $k_{(\alpha)}$ — большое (по сравнению с единицей) безразмерное число, с увеличением которого увеличивается и изменяемость рассматриваемого напряженного и деформированного состояния. Будет удобно, так же как это сделано в монографии [9], выразить $k_{(\alpha)}$ через h^* при помощи формулы

$$k_{(\alpha)} = (h^*)^{-t_\alpha}$$

в которой число t_α в терминах [9] есть показатель изменяемости в направлении x^α-линии.

В дальнейшем всегда считается, что t_α — рациональное число, равное p_α / q_α, где p_α, q_α — целые положительные.

Произведя замену переменных (5.1) в равенствах (1.9), получим

$$R\nabla_\lambda A^{\alpha\beta} = k_{(\lambda)}\nabla_\lambda{}^* A^{\alpha\beta}, \qquad R\nabla_\lambda A_\alpha = k_{(\lambda)}\nabla_\lambda{}^* A_\alpha, \ldots$$

где

$$\nabla_\lambda{}^* A^{\alpha\beta} = \partial_\lambda A^{\alpha\beta} + \frac{R}{k_{(\lambda)}}(\Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha} A^{\mu\beta} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\beta} A^{\alpha\mu})$$

$$\nabla_\lambda{}^* A_\alpha = \partial_\lambda A_\alpha - \frac{R}{k_{(\lambda)}}\Gamma_{\alpha\lambda}^{\mu} A_\mu, \ldots \tag{5.2}$$

а ∂_λ — символ обыкновенной (не ковариантной) производной по ξ^λ.

Учитывая это, можно представить уравнения равновесия (1.8) условия симметрии (1.7) и соотношения упругости (1.12) в виде

$$h^* k_{(\alpha)}\nabla_\alpha{}^*\tau^{\alpha\beta} - h^* R b_\alpha{}^\beta \tau^{\alpha 3} + \frac{\partial \tau^{3\beta}}{\partial\zeta} = 0, \qquad h^* k_{(\alpha)}\nabla_\alpha{}^*\tau^{\alpha 3} + h^* R b_{\alpha\beta}\tau^{\alpha\beta} + \frac{\partial\tau^{33}}{\partial\zeta} = 0$$

$$c_{\lambda\beta}(\tau^{\lambda\beta} - h^* R\zeta b_\alpha{}^\lambda \tau^{\alpha\beta}) = 0, \qquad \tau^{3\lambda} = \tau^{\lambda 3} - h^* R\zeta b_\mu{}^\lambda \tau^{\mu 3}$$

$$-\frac{E}{R}\sqrt{\frac{g}{a}}\frac{\partial W}{\partial\zeta} = h^*[\tau^{33} - \sigma\tau^{\alpha\beta}(a_{\alpha\beta} - h^* R\zeta b_{\alpha\beta})] \tag{5.3}$$

$$\frac{E}{2R}\sqrt{\frac{g}{a}}\left(-h^* k_{(\alpha)}\nabla_\alpha{}^* W + h^* R b_\alpha{}^\lambda u_\lambda + \frac{\partial u_\alpha}{\partial\zeta} - h^* R\zeta b_\alpha{}^\lambda\frac{\partial u_\lambda}{\partial\zeta}\right) = h^*(1+\sigma) g_{\lambda\alpha}\tau^{\lambda 3}$$

$$\frac{E}{2R}\sqrt{\frac{g}{a}}\{k_{(\beta)}\nabla_\beta{}^* u_\alpha + k_{(\alpha)}\nabla_\alpha{}^* u_\beta + 2Rb_{\alpha\beta}W -$$

$$- h^*\zeta\,[Rb_\beta{}^\lambda(k_{(\alpha)}\nabla_\alpha{}^* u_\lambda + Rb_{\lambda\alpha}W) + Rb_\alpha{}^\lambda(k_{(\beta)}\nabla_\beta{}^* u_\lambda + Rb_{\lambda\beta}W)]\} =$$

$$= (1+\sigma)\,g_{\alpha\lambda}(a_{\mu\beta} - h^* R\zeta b_{\mu\beta})\tau^{\lambda\mu} - \sigma g_{\alpha\beta}[(a_{\lambda\mu} - h^* R\zeta b_{\lambda\mu})\tau^{\lambda\mu} + \tau^{33}]$$

6. Исследование напряженных состояний с ненулевым показателем изменяемости начнем со случая одинаковой изменяемости в направлении обеих координатных линий. Пусть

$$k_{(1)} = k_{(2)} = k = (h^*)^{-\frac{p}{q}}, \qquad t_{(1)} = t_{(2)} = t = \frac{p}{q}$$

Введем обозначение

$$\eta = (h^*)^{-\frac{1}{q}} \quad \text{или} \quad h^* = \eta^{-q}, \qquad k = \eta^p \tag{6.1}$$

и будем искать решение системы (5.3) в виде [1]

$$\begin{gathered} \tau^{\alpha\beta} = \eta^r \Sigma \eta^{-s} \tau_{(s)}{}^{\alpha\beta}, \qquad \tau^{\alpha 3} = \eta^r \Sigma \eta^{-s} \tau_{(s)}{}^{\alpha 3}, \qquad \tau^{33} = \eta^r \Sigma \eta^{-s} \tau_{(s)}{}^{33} \\ u_\alpha = \eta^r \Sigma \eta^{-s} u_\alpha{}^{(s)}, \qquad W = \eta^r \Sigma \eta^{-s} W^{(s)} \end{gathered} \tag{6.2}$$

Здесь r — число, различное для различных искомых величин. Его надо подобрать так, чтобы после подстановки (6.2) в уравнения (5.3) и приравнивания в каждом уравнении нулю коэффициентов при всех степенях η, начиная с высшей, получалась непротиворечивая последовательность систем уравнений для определения коэффициентов разложений (6.2). Такие значения r будут называться непротиворечивыми.

При разыскании непротиворечивых значений r надо раздельно рассматривать случаи

$$t < 1/2, \qquad t = 1/2, \qquad t > 1/2$$

(они выявились и в монографии [9] в процессе асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений теории тонких оболочек).

Начнем со случая $t < 1/2$, т. е. будем считать, что

$$2p < q \tag{6.3}$$

тогда одним из вариантов непротиворечивых значений r будет

$$\begin{gathered} \tau^{\alpha\beta} \to r = \varkappa + q, \qquad \tau^{\alpha 3} \to r = \varkappa + p, \qquad \tau^{33} \to r = \varkappa \\ u_\alpha \to r = \varkappa - p, \qquad W \to r = \varkappa + q \end{gathered} \tag{6.4}$$

Он приводит описанным выше путем к последовательности систем уравнений, в которой головная система имеет вид

$$\begin{gathered} \partial_\alpha \tau_{(0)}{}^{\alpha\beta} + \frac{\partial \tau_{(0)}{}^{3\beta}}{\partial \zeta} = 0, \quad R b_{\alpha\beta} \tau_{(0)}{}^{\alpha\beta} + \frac{\partial \tau_{(0)}{}^{33}}{\partial \zeta} = 0, \quad c_{\lambda\beta} \tau_{(0)}{}^{\lambda\beta} = 0, \quad \tau_{(0)}{}^{3\lambda} = \tau_{(0)}{}^{\lambda 3} \\ \frac{\partial W^{(0)}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial u_\alpha{}^{(0)}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{E}{2R} \{\partial_\beta u_\alpha{}^{(0)} + \partial_\alpha u_\beta{}^{(0)} + 2 R b_{\alpha\beta} W^{(0)}\} = P_{\alpha\beta\lambda\mu} \tau_{(0)}{}^{\lambda\mu} \end{gathered} \tag{6.5}$$

При выводе этих уравнений надо в (5.3) заменить h^* и k по формулам (6.1), а затем воспользоваться разложениями (6.2), (6.4) и неравенством (6.3). В равенствах (6.5), так же как в последующих соотношениях первого приближения, символы ковариантного дифференцирования $\nabla_\alpha{}^*$ заменены символами простого дифференцирования ∂_α в силу формул (5.2).

[1] Разложения (6.2) являются обобщением разложений (3.1). Вторые получаются из первых при $p = 0$, $q = 1$.

Вторым вариантом непротиворечивых значений r в этом же случае будет

$$\begin{gathered}\tau^{\alpha\beta} \to r = \varkappa + q, \qquad \tau^{\alpha 3} \to r = \varkappa + p, \qquad \tau^{33} \to r = \varkappa \\ u_\alpha \to r = \varkappa + 2q - 3p, \qquad W \to r = \varkappa + 2q - 2p\end{gathered} \tag{6.6}$$

Он приводит к системе, для которой головные уравнения имеют вид

$$\begin{gathered}\partial_\alpha \tau_{(0)}{}^{\alpha\beta} + \frac{\partial \tau_{(0)}{}^{3\beta}}{\partial \zeta} = 0, \qquad Rb_{\alpha\beta}\tau_{(0)}{}^{\alpha\beta} + \frac{\partial \tau_{(0)}{}^{33}}{\partial \zeta} = 0, \qquad c_{\lambda\beta}\tau_{(0)}{}^{\lambda\beta} = 0, \qquad \tau_{(0)}{}^{3\lambda} = \tau_{(0)}{}^{\lambda 3} \\ \frac{\partial W^{(0)}}{\partial \zeta} = 0, \qquad \frac{\partial u_\alpha{}^{(0)}}{\partial \zeta} = 0, \qquad \frac{E}{2R}\{\partial_\beta u_\alpha{}^{(0)} + \partial_\alpha u_\beta{}^{(0)} + 2Rb_{\alpha\beta}W^{(0)}\} = 0 \\ \frac{\partial u_\alpha{}^{(0)}}{\partial \zeta} - \partial_\alpha W^{(0)} = 0, \qquad \frac{E\zeta}{R}\partial_\alpha\partial_\beta w^{(0)} = P_{\alpha\beta\lambda\mu}\tau_{(0)}{}^{\lambda\mu}\end{gathered} \tag{6.7}$$

7. В случае, когда

$$2p = q \qquad (t = 1/2) \tag{7.1}$$

непротиворечивая комбинация значений r записывается так

$$\begin{gathered}\tau^{\alpha\beta} \to r = \varkappa + 2p, \qquad \tau^{\alpha 3} \to r = \varkappa + p, \qquad \tau^{33} \to r = \varkappa \\ u_\alpha \to r = \varkappa + p, \qquad W \to r = \varkappa + 2p\end{gathered} \tag{7.2}$$

Ей соответствует последовательность систем уравнений, в которой головная система имеет вид

$$\begin{gathered}\partial_\alpha \tau_{(0)}{}^{\alpha\beta} + \frac{\partial \tau_{(0)}{}^{3\beta}}{\partial \zeta} = 0, \qquad \partial_\alpha \tau_{(0)}{}^{\alpha 3} + Rb_{\alpha\beta}\tau_{(0)}{}^{\alpha\beta} + \frac{\partial \tau_{(0)}{}^{33}}{\partial \zeta} = 0 \\ c_{\lambda\beta}\tau_{(0)}{}^{\lambda\beta} = 0, \qquad \tau_{(0)}{}^{3\beta} = \tau_{(0)}{}^{\beta 3} \\ \frac{\partial W^{(0)}}{\partial \zeta} = 0, \qquad \frac{\partial u_\alpha{}^{(0)}}{\partial \zeta} - \partial_\alpha W^{(0)} = 0 \\ \frac{E}{2R}\{\partial_\beta u_\alpha{}^{(0)} + \partial_\alpha u_\beta{}^{(0)} + 2Rb_{\alpha\beta}W^{(0)}\} = P_{\alpha\beta\lambda\mu}\tau_{(0)}{}^{\lambda\mu}\end{gathered} \tag{7.3}$$

Интегрирование этих уравнений по ζ не вызывает затруднений. Положив $\varkappa = 0$, считая, что в условиях на поверхности (1.13) величины x и X^α можно представить в виде

$$X^\alpha = \Sigma\eta^{-s} X_{(s)}{}^\alpha, \qquad x = \Sigma\eta^{-s} x_{(s)} \tag{7.4}$$

получим

$$W^{(0)} = w^{(0)}(\xi^1, \xi^2), \qquad u_\alpha{}^{(0)} = v_\alpha{}^{(0)}(\xi^1, \xi^2) + \zeta\partial_\alpha w^{(0)} \tag{7.5}$$

$$\tau_{(0)}{}^{\alpha\beta} = \tau_{0(0)}^{\alpha\beta}(\xi^1, \xi^2) + \zeta\tau_{1(0)}^{\alpha\beta}(\xi^1, \xi^2)$$

$$\frac{1}{2R}\{\partial_\beta v_\alpha{}^{(0)} + \partial_\alpha v_\beta{}^{(0)} + 2Rb_{\alpha\beta}w^{(0)}\} = P_{\alpha\beta\lambda\mu}\tau_{0(0)}^{\lambda\mu}, \qquad \frac{E}{R}\partial_\alpha\partial_\beta w^{(0)} = P_{\alpha\beta\lambda\mu}\tau_{1(0)}{}^{\lambda\mu}$$

$$\partial_\alpha \tau_{(0)}^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}X_{(0)}^\beta, \qquad Rb_{\alpha\beta}\tau_{0(0)}^{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\partial_\alpha\partial_\beta\tau_{1(0)}^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}x_{(0)}$$

$$\tau_{(0)}{}^{3\beta} = -\zeta\partial_\alpha\tau_{0(0)}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(1 - \zeta^2)\partial_\alpha\tau_{1(0)}^{\alpha\beta}$$

$$\tau_{(0)}{}^{33} = \frac{\zeta(1-\zeta^2)}{2}Rb_{\alpha\beta}\tau_{0(0)}^{\alpha\beta} + \frac{1-\zeta^2}{2}Rb_{\alpha\beta}\tau_{1(0)}^{\alpha\beta} + \frac{1}{4}(1-\zeta^2)\partial_\lambda X_{(0)}{}^\lambda + \frac{3\zeta}{4}\left(1 - \frac{\zeta^2}{3}\right)x_0$$

В этих формулах зависимость от ζ всюду записана явно. В частности, видно, что напряжения $\tau_{(0)}^{\alpha\beta}$ меняются по толщине оболочки по произвольному линейному закону. Это значит, что формулами (7.5) определяется смешанное напряженное состояние, в котором напряжения от усилий и моментов соизмеримы друг с другом.

8. В случае, когда выполняется неравенство

$$2p > q \qquad (t > 1/2) \tag{8.1}$$

могут быть указаны две непротиворечивые комбинации значений r.

Первая из них записывается так

$$\begin{gathered}\tau^{\alpha\beta} \to r = \varkappa + q, \quad \tau^{\alpha 3} \to r = \varkappa + p, \quad \tau^{33} \to r = \varkappa + 2p - q \\ u_\alpha \to r = \varkappa + q - p, \quad W \to r = \varkappa + 2q - 2p\end{gathered} \tag{8.2}$$

и приводит к последовательности систем, в которой головная система уравнений имеет вид

$$\begin{gathered}\partial_\alpha \tau_{(0)}^{\alpha\beta} + \frac{\partial \tau_{(0)}^{3\beta}}{\partial\zeta} = 0, \quad \partial_\alpha \tau_{(0)}^{\alpha 3} + \frac{\partial \tau_{(0)}^{33}}{\partial\zeta} = 0, \quad c_{\lambda\beta}\tau_{(0)}^{\lambda\beta} = 0, \quad \tau_{(0)}^{3\lambda} = \tau_{(0)}^{\lambda 3} \\ \frac{\partial W^{(0)}}{\partial\zeta} = 0, \quad \frac{\partial u_\alpha^{(0)}}{\partial\zeta} - \partial_\alpha W^{(0)} = 0, \quad \frac{E}{2R}(\partial_\beta u_\alpha^{(0)} + \partial_\alpha u_\beta^{(0)}) = P_{\alpha\beta\lambda\mu}\tau_{(0)}^{\lambda\mu}\end{gathered} \tag{8.3}$$

Второй непротиворечивой комбинацией значений r будет

$$\begin{gathered}\tau^{\alpha\beta} \to r = \varkappa + q, \quad \tau^{\alpha 3} \to r = \varkappa + p, \quad \tau^{33} \to r = \varkappa + 2p - q \\ u_\alpha \to r = \varkappa + q - p, \quad W \to \varkappa < r < \varkappa + 2q - 2p\end{gathered} \tag{8.4}$$

Она приводит к последовательности систем, в которой головная система уравнений записывается так:

$$\begin{gathered}\partial_\alpha \tau_{(0)}^{\alpha\beta} + \frac{\partial \tau_{(0)}^{3\beta}}{\partial\zeta} = 0, \quad \partial_\alpha \tau_{(0)}^{\alpha 3} + \frac{\partial \tau_{(0)}^{33}}{\partial\zeta} = 0, \quad c_{\lambda\beta}\tau_{(0)}^{\lambda 3} = 0, \quad \tau_{(0)}^{3\lambda} = \tau_{(0)}^{\lambda 3} \\ \frac{\partial W^{(0)}}{\partial\zeta} = 0, \quad \frac{\partial u_\alpha^{(0)}}{\partial\zeta} = 0, \quad \frac{E}{2R}(\partial_\beta u_\alpha^{(0)} + \partial_\alpha u_\beta^{(0)}) = P_{\alpha\beta\lambda\beta}\tau_{(0)}^{\lambda\mu}\end{gathered} \tag{8.5}$$

Область применимости уравнений (8.3) и (8.5) помимо (8.1) ограничена неравенством

$$p < q \qquad (t < 1) \tag{8.6}$$

Если $p = q$ $(t = 1)$, то непротиворечивая комбинация (8.2) значений r сохраняется, но ей будет соответствовать последовательность систем, головная система уравнений которой имеет вид

$$\begin{gathered}\partial_\alpha \tau_{(0)}^{\alpha\beta} + \frac{\partial \tau_{(0)}^{3\beta}}{\partial\zeta} = 0, \quad \partial_\alpha \tau_{(0)}^{\alpha 3} + \frac{\partial \tau_{(0)}^{33}}{\partial\zeta} = 0, \quad c_{\lambda\beta}\tau_{(0)}^{\lambda\beta} = 0, \quad \tau_{(0)}^{3\lambda} = \tau_{(0)}^{\lambda 3} \\ E\frac{\partial W^{(0)}}{\partial\zeta} = \tau_{(0)}^{33} - \sigma a_{\alpha\beta}\tau_{(0)}^{\alpha\beta}, \quad \frac{E}{2R}\left(\frac{\partial u_\alpha^{(0)}}{\partial\zeta} - \partial_\alpha W^{(0)}\right) = (1+\sigma)\, a_{\alpha\lambda}\tau_{(0)}^{\lambda 3} \\ \frac{E}{2R}(\partial_\beta u_\alpha^{(0)} + \partial_\alpha u_\beta^{(0)}) = P_{\alpha\beta\lambda\mu}\tau_{(0)}^{\lambda\mu} - \sigma a_{\alpha\beta}\tau^{33}\end{gathered} \tag{8.7}$$

Эти уравнения отличаются от общих уравнений теории упругости только тем, что, во-первых, в (8.7) отсутствуют члены, зависящие от тензора кривизны, и, во-вторых, символы ковариантного дифференцирования в (8.7) заменены символами простого дифференцирования. Это значит, что неравенством (8.6) устанавливается предел области применимости теории тонких оболочек в обычном понимании этой теории. Остаются возможными только упрощения, связанные с пренебрежением влияния кривизны срединной поверхности и с заменой ковариантных производных простыми.

9. Введем в рассмотрение напряженные состояния с неодинаковой изменяемостью в направлении x^1- и x^2-линий и покажем, что в случае, когда $\max(t_{(1)}, t_{(2)}) = 1$, существуют напряженные состояния, принципиально отличные от рассмотренных выше. Ограничимся случаем, когда срединная поверхность оболочки отнесена к ортогональным координатам и наименьший показатель изменяемости равен нулю. Тогда можно принять, что

$$k_{(1)} = h^{*-1} = \eta, \qquad k_{(2)} = \eta^\circ$$

(для определенности считается, что наибольшая изменяемость имеет место вдоль x^1-линии). В этом случае для решения вида (6.2) существуют две непротиворечивые комбинации значений r. Первой из них будет

$$(\tau^{11}, \tau^{22}, \tau^{33}, \tau^{13}, \tau^{31}) \to r = q - 1, \qquad (\tau^{12}, \tau^{21}, \tau^{23}, \tau^{32}) \to r = q$$
$$(u_1, W) \to r = q - 2, \qquad u_2 \to r = q - 1 \tag{9.1}$$

Головные уравнения соответствующей ей последовательности систем имеют вид (9.2)

$$\partial_1\tau_{(0)}{}^{11} + \partial_2\tau_{(0)}{}^{21} - Rb_2{}^1\tau_{(0)}{}^{23} + \frac{\partial\tau_{(0)}{}^{31}}{\partial\zeta} = 0, \qquad \partial_1\tau_{(0)}{}^{12} + \frac{\partial\tau_{(0)}{}^{32}}{\partial\zeta} = 0$$

$$\partial_1\tau_{(0)}{}^{13} + \partial_2\tau_{(0)}{}^{23} + R\,(b_{12}\tau_{(0)}{}^{12} + b_{21}\tau_{(0)}{}^{21}) + \frac{\partial\tau_{(0)}{}^{33}}{\partial\zeta} = 0$$

$$\tau_{(0)}{}^{12} = \tau_{(0)}{}^{21}, \qquad \tau_{(0)}{}^{31} = \tau_{(0)}{}^{13} - \zeta Rb_2{}^1\tau_{(0)}{}^{23}, \qquad \tau_{(0)}{}^{32} = \tau_{(0)}{}^{23}$$

$$-\frac{E}{R}\frac{\partial W^{(0)}}{\partial\zeta} = \tau_{(0)}{}^{33} - \sigma\,[a_{11}\tau_{(0)}{}^{11} + a_{22}\tau_{(0)}{}^{22} - \zeta Rb_{12}\tau_{(0)}{}^{12} - \zeta Rb_{21}\tau_{(0)}{}^{21}]$$

$$\frac{E}{2R}\left[-\partial_1 W^{(0)} + Rb_1{}^2u_2{}^{(0)} + \frac{\partial u_1{}^{(0)}}{\partial\zeta} - \zeta Rb_1{}^2\frac{\partial u_2{}^{(0)}}{\partial\zeta}\right] =$$
$$= (1 + \sigma)\, a_{11}\,(\tau_{(0)}{}^{13} - 2Rb_{12}\zeta\tau^{23})$$

$$\frac{E}{2R}\frac{\partial u_2{}^{(0)}}{\partial\zeta} = (1 + \sigma)\, a_{22}\tau_{(0)}{}^{23}$$

$$\frac{E}{R}\,[\partial_1 u_1{}^{(0)} - \zeta Rb_1{}^2\partial_1 u_2{}^{(0)}] = a_{11}a_{11}\tau_{(0)}{}^{11} - 2\zeta Ra_{11}b_{21}\tau_{(0)}{}^{12} -$$
$$- \sigma a_{11}a_{22}\tau_{(0)}{}^{22} - \sigma a_{11}\tau_{(0)}{}^{33}$$

$$\frac{E}{2R}\partial_1 u_2{}^{(0)} = (1 + \sigma)\, a_{11}a_{22}\tau_{(0)}{}^{12}$$

$$\frac{E}{R}\partial_2 u_2{}^{(0)} = a_{22}a_{22}\tau_{(0)}{}^{22} - \sigma a_{22}a_{11}\tau_{(0)}{}^{11} - \sigma a_{22}\tau_{(0)}{}^{33} - (3 + \sigma)\,\zeta Rb_{12}a_{22}\tau_{(0)}{}^{21}$$

Вторая непротиворечивая комбинация значений r записывается так:

$$(\tau^{11}, \tau^{22}, \tau^{33}, \tau^{13}, \tau^{31}) \to r + q, \qquad (\tau^{12}, \tau^{21}, \tau^{23}, \tau^{32}) \to r = q - 1$$
$$(u_1, W) \to r = q - 1, \qquad u_2 \to r = q - 2 \tag{9.3}$$

Головные уравнения соответствующей ей последовательности систем имеют вид (9.4)

$$\partial_1 \tau_{(0)}{}^{11} + \frac{\partial \tau_{(0)}{}^{31}}{\partial \zeta} = 0, \quad \partial_1 \tau_{(0)}{}^{12} + \partial_2 \tau_{(0)}{}^{22} - R b_1{}^2 \tau_{(0)}{}^{13} + \frac{\partial \tau_{(0)}{}^{32}}{\partial \zeta} = 0$$

$$\partial_1 \tau_{(0)}{}^{13} + \frac{\partial \tau_{(0)}{}^{33}}{\partial \zeta} = 0$$

$$c_{12} \tau_{(0)}{}^{12} + c_{21} \tau_{(0)}{}^{21} - \zeta R \left[c_{12} b_2{}^1 \tau_{(0)}{}^{22} + c_{21} b_1{}^2 \tau_{(0)}{}^{11} \right] = 0$$

$$\tau_{(0)}{}^{31} = \tau_{(0)}{}^{13}, \qquad \tau_{(0)}{}^{32} = \tau_{(0)}{}^{23} - \zeta R b_1{}^2 \tau_{(0)}{}^{13}$$

$$-\frac{E}{R} \frac{\partial W^{(0)}}{\partial \zeta} = \tau_{(0)}{}^{33} - \sigma \left[a_{11} \tau_{(0)}{}^{11} + a_{22} \tau_{(0)}{}^{22} \right]$$

$$\frac{E}{2R} \left(-\partial_1 W^{(0)} + \frac{\partial u_1{}^{(0)}}{\partial \zeta} \right) = (1 + \sigma)\, a_{11} \tau_{(0)}{}^{13}$$

$$\frac{E}{2R} \left(-\partial_2 W^{(0)} + R b_2{}^1 u_1{}^{(0)} + \frac{\partial u_2{}^{(0)}}{\partial \zeta} - \zeta R b_2{}^1 \frac{\partial u_1{}^{(0)}}{\partial \zeta} \right) =$$

$$= (1 + \sigma) \left(-2 \zeta R b_{12} \tau_{(0)}{}^{13} + a_{22} \tau_{(0)}{}^{23} \right)$$

$$\frac{E}{R} \partial_1 u_{1(0)} = a_{11} \left(a_{11} \tau_{(0)}{}^{11} - \sigma a_{22} \tau_{(0)}{}^{22} - \sigma \tau_{(0)}{}^{33} \right)$$

$$\frac{E}{2R} \left(\partial_2 u_1{}^{(0)} + \partial_1 u_2{}^{(0)} + 2 b_{12} W^{(0)} - \zeta R b_2{}^1 \partial_1 u_1{}^{(0)} \right) = -(1 - \sigma)\, \zeta R b_{12} a_{11} \tau_{(0)}{}^{11} +$$

$$+ (1 + \sigma)\, a_{11} a_{22} \tau_{(0)}{}^{12} - 2\zeta\, R b_{12} a_{22} \tau_{(0)}{}^{22} + 2\sigma \zeta R b_{12} \tau_{(0)}{}^{33}$$

$$0 = a_{22} a_{22} \tau_{(0)}{}^{22} - \sigma a_{11} a_{22} \tau_{(0)}{}^{11} - \sigma a_{22} \tau_{(0)}{}^{33}$$

В системе (9.2) второе, четвертое, шестое, девятое и одиннадцатое равенства образуют самостоятельную подсистему уравнений относительно пяти неизвестных: $\tau_{(0)}{}^{12}$, $\tau_{(0)}{}^{21}$, $\tau_{(0)}{}^{23}$, $\tau_{(0)}{}^{32}$, $u_2{}^{(0)}$. По смыслу они совпадают с уравнениями классической задачи кручения стержня относительно оси ξ^2. В системе (9.4) первое, третье, пятое, седьмое, восьмое, десятое и двенадцатое уравнения образуют самостоятельную подсистему уравнений относительно семи неизвестных:

$$\tau_{(0)}{}^{11}, \tau_{(0)}{}^{22}, \tau_{(0)}{}^{33}, \tau_{(0)}{}^{13}, \tau_{(0)}{}^{31}, u_1{}^{(0)}, W^{(0)}.$$

По смыслу они совпадают с уравнениями задачи о плоской деформации (в плоскости ξ^1, ζ).

Таким образом, напряженные состояния, соответствующие непротиворечивым комбинациям (9.1) и (9.3), имеют тот же смысл, что и напряженные состояния, полученные при помощи вспомогательных итерационных процессов в работе [1] при построении теории изгиба пластинок. Принципиальное отличие этих напряженных состояний от тех, которые строились в п. 3—8, заключается в том, что построение первых сводится к интегрированию дифференциальных уравнений по переменным (ξ^1, ζ), а построение вторых сводится к интегрированию дифференциальных уравнений по переменным (ξ^1, ξ^2).

10. Введем в рассмотрение тензор тангенциальных усилий $T^{\alpha\beta}$, тензор моментов $M^{\alpha\beta}$ и вектор перерезывающих усилий N^{α}

$$T^{\alpha\beta} = \int_{-h}^{+h} \tau^{\alpha\beta} dx^3, \qquad M^{\alpha\beta} = \int_{-h}^{+h} \tau^{\alpha\beta} x^3 dx^3, \qquad N^{\alpha} = \int_{-h}^{+h} \tau^{\alpha 3} dx^3 \qquad (10.1)$$

Заменим в (10.1) x^3 на ζ по формуле (2.1), внесем вместо $\tau^{\alpha\beta}$ и $\tau^{\alpha 3}$ разложения (6.2) и учтем формулы (6.1). Тогда (10.1) можно записать в виде

$$T^{\alpha\beta} = \eta^{r-q} \Sigma \eta^{-s} T_{(s)}{}^{\alpha\beta}, \qquad M^{\alpha\beta} = \eta^{r-q} \Sigma \eta^{-s} M_{(s)}{}^{\alpha\beta}, \qquad N^{\alpha} = \eta^{r-p} \Sigma \eta^{-s} N_{(s)}{}^{\alpha} \qquad (10.2)$$

где

$$T_{(s)}{}^{\alpha\beta} = R \int_{-1}^{+1} \tau_{(s)}{}^{\alpha\beta} d\zeta, \qquad M_{(s)}{}^{\alpha\beta} = R^2 \eta^{-q} \int_{-1}^{+1} \tau_{(s)}{}^{\alpha\beta} \zeta \, d\zeta = R^2 h^* \int_{-1}^{+1} \tau_{(s)}{}^{\alpha\beta} \zeta \, d\zeta$$

$$N_{(s)}{}^{\alpha} = R \eta^{-q+p} \int_{-1}^{+1} \tau_{(s)}{}^{\alpha 3} d\zeta = R h^* k \int_{-1}^{+1} \tau_{(s)}{}^{\alpha 3} d\zeta \qquad (10.3)$$

В (10.2) надо брать в первых двух формулах то значение r, которое оно принимает для $\tau^{\alpha\beta}$, а в третьей формуле то значение r, которое оно принимает для $\tau^{\alpha 3}$. Формулы (10.2) и (10.3) имеют силу как при $t > 0$, так и при $t = 0$; в последнем случае надо считать $p = 0$, $q = 1$, $k = 1$.

Введем величины $v_\alpha{}^{[s]}$, $w^{[s]}$ (верхние индексы в квадратных скобках), определив их формулами

$$v_\alpha{}^{(s)} = \eta^{-\rho q + p} v_\alpha{}^{[s]} = h^{*\rho} k v_\alpha{}^{[s]}, \qquad w^{(s)} = \eta^{-\rho q} w^{[s]} = h^{*\rho} w^{[s]} \qquad (10.4)$$

Входящее сюда число ρ в разных случаях выбирается по-разному.

В п. 11 будет показано, что если $T_{(0)}{}^{\alpha\beta}$, $M_{(0)}{}^{\alpha\beta}$, $N_{(0)}{}^{\alpha}$, $v_\alpha{}^{[0]}$, $w^{[0]}$ отождествить соответственно с тензором тангенциальных усилий тензором моментов, вектором перерезывающих усилий, вектором тангенциальных смещений и нормальным смещением, то выведенным выше головным уравнениям различных итерационных процессов можно дать простое физическое истолкование, тесно связанное с результатами, полученными в [9] при помощи асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений классической теории тонких упругих оболочек.

11. Рассмотрим уравнения (3.3), т. е. головную систему уравнений итерационного процесса, описанного в п. 3. Проинтегрировав первое, второе, третье и седьмое из этих уравнений по ζ в интервале $(-1, +1)$, получим

$$\nabla_\alpha T_{(0)}{}^{\alpha\beta} + X_{(0)}{}^{\beta} = 0, \qquad b_{\alpha\beta} T_{(0)}{}^{\alpha\beta} + x_{(0)} = 0, \qquad c_{\alpha\beta} T_{(0)}{}^{\alpha\beta} = 0$$

$$2Eh \frac{1}{2} (\nabla_\beta v_\alpha{}^{[0]} + \nabla_\alpha v_\beta{}^{[0]} + 2 b_{\alpha\beta} w^{[0]}) = P_{\alpha\beta\lambda\mu} T_{(0)}{}^{\lambda\mu} \qquad (11.1)$$

Преобразования, приводящие к этим равенствам, заключаются в следующем. Интегралы по ζ либо заменяются по формулам (10.3), либо выполняется интегрирование и при подстановке пределов используются условия на поверхностях (1.13). Величины $u_\alpha{}^{(0)}$, $W^{(0)}$ выражаются через $v_\alpha{}^{(0)}$, $w^{(0)}$ согласно (3.6), а $v_\alpha{}^{(0)}$, $w^{(0)}$ выражаются через $v_\alpha{}^{[0]}$, $w^{[0]}$ по формулам (10.4) при $\rho = 1$, $k = 1$. Наконец, ∇_α', соответствующее переменным ξ^α, заменяется на $R\nabla_\alpha$, соответствующее переменным x^α.

Равным образом из (4.3) вытекают равенства

$$\nabla_\beta v_\alpha^{[0]} + \nabla_\alpha v_\beta^{[0]} + 2Rb_{\alpha\beta}w^{[0]} = 0$$

$$\frac{2Eh^3}{3}\frac{1}{2}[\nabla_\beta(\nabla_\alpha w^{[0]} - b_\alpha^\lambda v_\lambda^{[0]}) + \nabla_\alpha(\nabla_\beta w^{[0]} - b_\beta^\lambda v_\lambda^{[0]}) - \tag{11.2}$$

$$-b_\beta^\lambda(\nabla_\alpha v_\lambda^{[0]} + b_{\lambda\alpha}w^{[0]}) - b_\alpha^\lambda(\nabla_\beta v_\lambda^{[0]} + b_{\lambda\beta}w^{[0]})] = P_{\alpha\beta\lambda\mu}M_{(0)}^{\alpha\beta}$$

Первое из них получается непосредственно из восьмого равенства (4.3), а второе — из девятого равенства (4.3), которое надо предварительно помножить на ζ и проинтегрировать в интервале $(-1, +1)$. Преобразование выполняется по прежней схеме с использованием формул (4.4), (10.2), (10.4), причем в последних принимается $\rho = 2$, $k = 1$.

Из уравнений (7.3) вытекают равенства

$$\frac{\partial T_{(0)}^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} + kX_{(0)}^\beta = 0, \quad b_{\alpha\beta}T_{(0)}^{\alpha\beta} + \frac{\partial N_{(0)}^\alpha}{\partial x^\alpha} + x = 0, \quad c_{\lambda\beta}T_{(0)}^{\lambda\beta} = 0$$

$$\frac{\partial M_{(0)}^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} - N_{(0)}^\alpha = 0 \tag{11.3}$$

$$2Eh\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial v_\beta^{[0]}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial v_\alpha^{[0]}}{\partial x^\beta} + 2b_{\alpha\beta}w^{[0]}\right\} = P_{\alpha\beta\lambda\mu}T_{(0)}^{\lambda\mu}, \qquad \frac{2Eh^3}{3}\frac{\partial^2 w^{[0]}}{\partial x^\alpha \partial x} = P_{\alpha\beta\lambda\mu}M_{(0)}^{\alpha\beta}$$

Они получаются следующим образом. Первое, второе, третье и седьмое равенства (7.3) интегрируются по ζ в интервале $(-1, +1)$ и, кроме того, первое и седьмое равенства (7.3) множатся на ζ и интегрируются по ζ в интервале $(-1, +1)$. Полученные равенства преобразовываются описанным выше способом. При использовании формул (10.4) принимается $\rho = 1$, учитывается, что равенства (7.3) имеют место, когда $k_{(1)} = k_{(2)} = k = (h^*)^{-1/2}$, и что (7.3) согласно (5.1)

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} = \frac{R}{k}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

Для сравнения соотношений (11.1) — (11.3) с уравнениями классической теории оболочек запишем последние так.

Уравнения равновесия

$$\nabla_\lambda T^{\lambda\alpha} - b_\lambda^\alpha N^\lambda + X^\alpha = 0, \quad b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} + \nabla_\lambda N^\lambda + x = 0, \quad \nabla_\lambda M^{\alpha\lambda} - N^\alpha = 0$$

$$c_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} - c_\alpha^\lambda b_{\lambda\beta}M^{\alpha\beta} = 0 \tag{11.4}$$

Формулы деформации-смещения

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha v_\beta + b_{\alpha\beta}w + c_{\beta\alpha}\delta, \qquad \mu_{\alpha\beta} = \nabla_\beta(\nabla_\alpha w - b_\alpha^\lambda v_\lambda) - c_{\lambda\alpha}b_\beta^\lambda\delta$$

$$\delta = -\frac{1}{2}c^{\alpha\beta}b\nabla_\alpha v_\beta \tag{11.5}$$

Формулы деформации-усилия, моменты

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2Eh}(P_{\alpha\beta\lambda\mu}T^{\lambda\mu} + Q_{\alpha\beta\lambda\mu}M^{\lambda\mu}), \qquad \mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2Eh}\left(R_{\alpha\beta\lambda\mu}M^{\lambda\mu} + \frac{h^2}{3}S_{\alpha\beta\lambda\mu}T^{\lambda\mu}\right)$$

$$P_{\alpha\beta\lambda\mu} = R_{\alpha\beta\lambda\mu} = a_{\alpha\lambda}a_{\beta\mu} - \sigma c_{\alpha\lambda}c_{\beta\mu} \tag{11.6}$$

Эти равенства заимствованы из обзорной статьи [12] (x в уравнениях равновесия заменен на $-x$ в соответствии с принятым здесь правилом знаков). В ней тензоры усилий и моментов вводятся при помощи равенств

$$T^{\alpha\beta} = \int_{-h}^{+h} (\tau^{\alpha\beta} - x^3 b_\lambda{}^\alpha \tau^{\lambda\beta}) \sqrt{\frac{g}{a}}\, dx^3,$$

$$M^{\alpha\beta} = \int_{-h}^{+h} (\tau^{\alpha\beta} - x^3 b_\lambda{}^\alpha \tau^{\lambda\beta}) \sqrt{\frac{g}{a}}\, x^3 dx^3, \qquad N^\alpha = \int_{-h}^{+h} \tau^{3\alpha} \sqrt{\frac{g}{a}}\, dx^3$$

(отброшен ошибочно поставленный в [12] минус в формуле для $M^{\alpha\beta}$). Учитывая (1.5), можно убедиться, что они совпадают с равенствами (10.1).

Первые три уравнения (11.1) тождественны уравнениям равновесия безмоментной теории, которые получаются из (11.4) при $M^{\alpha\lambda} = N^\alpha = 0$.

Формулу для тензора тангенциальной деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}$ в (11.5) можно преобразовать к виду

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\nabla_\beta v_\alpha + \nabla_\alpha v_\beta + 2 b_{\alpha\beta} w)$$

а формулу для $P_{\alpha\beta\lambda\mu}$ в (11.6) — к виду (3.4). Таким образом, в (11.6) тензор $P_{\alpha\beta\lambda\mu}$ имеет такой же смысл, как и в других формулах этой статьи, а следовательно, четвертое равенство (11.1) эквивалентно соотношениям упругости, принимаемым в безмоментной теории.

Итак, итерационный процесс, полученный в п. 3, в первом приближении эквивалентен безмоментной теории.

Из формул (11.5) вытекает, что

$$2\mu_{\alpha\beta} - b_\alpha{}^\lambda \varepsilon_{\lambda\beta} - b_\beta{}^\lambda \varepsilon_{\lambda\alpha} = \nabla_\beta (\nabla_\alpha w - b^\lambda{}_\alpha v_\lambda) + \nabla_\alpha (\nabla_\beta w - b_\beta{}^\lambda v_\lambda) -$$
$$- b_\beta{}^\lambda (\nabla_\alpha v_\lambda + b_{\lambda\alpha} w) - b_\alpha{}^\lambda (\nabla_\beta v_\lambda + b_{\lambda\beta} w)$$

Левая часть этого равенства при $\varepsilon_{\alpha\beta} = 0$ совпадает с $2\mu_{\alpha\beta}$, а выражение, стоящее в правой части, тождественно выражению, взятому в квадратные скобки во втором равенстве (11.2).

Отсюда следует, что итерационный процесс, описанный в п. 4, определяет напряженное состояние, которое в первом приближении эквивалентно чисто моментному напряженному состоянию.

Первое из равенств (11.2) будет эквивалентно равенству $\varepsilon_{\alpha\beta} = 0$ и представляет собой уравнения бесконечно малых изгибаний, а второе равенство с точностью до величин порядка h^2 совпадает для такого напряженного состояния со вторым соотношением деформации-усилия, моменты (11.6).

Итерационный процесс, построенный в п.7, в первом приближении совпадает с теорией напряженных состояний с большой изменяемостью. Действительно, связанные с этим процессом соотношения (11.3) получаются из соотношений классической теории оболочек после

(а) отбрасывания тензора N^α в первом из уравнений равновесия (11.4),

(б) отбрасывания тангенциальных перемещений в выражении для тензора деформации $\mu_{\alpha\beta}$, (в) принятия простейшего варианта формул деформации-усилия, моменты,

(г) замены ковариантного дифференцирования простым.

Это и составляет известные гипотезы теории напряженного состояния с большой изменяемостью.

Нетрудно дать физическую интерпретацию и для головных уравнений итерационных процессов, построенных в п. 6 и 8.

Уравнения (6.5) и (6.7) отличаются, соответственно, от уравнений (3.3) и (4.3) только тем, что в первых из них символы ковариантного дифференцирования ∇_α' заменены символами простого дифференцирования ∂_α и; в последнем равенстве (6.7) в левой части оставлены только члены, содержащие вторые производные от нормального прогиба. Такие же упрощения получатся, если строить методом асимптотического интегрирования безмоментные и чисто моментные напряженные состояния с ненулевой изменяемостью и оставлять в уравнениях только члены, необходимые для получения первого приближения. Таким образом, уравнения (6.5) и (6.7) соответствуют уравнениям первого асимптотического приближения безмоментной и чисто моментной теорий напряженных состояний с ненулевой изменяемостью.

Также можно показать, что уравнения (8.3) и (8.5) соответствуют теории напряженных состояний с большой ($t > {}^1/_2$) изменяемостью. Уравнения (8.3) соответствуют (в терминах монографии [9]) изгибному напряженному состоянию, сходному с напряженным состоянием изгиба пластинки. Уравнения (8.5) соответствуют тангенциальному напряженному состоянию, сходному с обобщенным плоским напряженным состоянием.

12. В п. 3—8 сформулированы итерационные процессы для построения напряженных состояний, которые в нулевом приближении эквивалентны: безмоментному напряженному состоянию (п. 3,6), чисто моментному напряженному состоянию (п. 4, 6) и напряженному состоянию с большим показателем изменяемости (п. 7—8). Нетрудно сформулировать итерационные процессы и для построения напряженных состояний, соответствующих простым и обобщенным краевым эффектам. Они получатся при интегрировании уравнений (5.3) при помощи разложений (6.2), если должным образом подобрать значения r.

Интегралы, соответствующие всем перечисленным напряженным состояниям, получаются и непосредственно из уравнений классической теории оболочек методом асимптотического интегрирования [9]. В совокупности они содержат достаточно произволов, чтобы можно было для широкого класса задач выполнить все четыре граничных условия классической теории оболочек (вопрос обсуждался в работах [9,13-15]). Для этого класса задач теории оболочек описанные здесь итерационные процессы в совокупности играют ту же роль, что и основной итерационный процесс в теории изгиба пластинок [1], в том смысле, что в них исходное приближение эквивалентно классической теории. В то же время в п. 9 сформулированы итерационные процессы, эквивалентные двум вариантам вспомогательного итерационного процесса работы [1]. Один из них соответствует напряженному состоянию краевого скручивания, а другой — напряженному состоянию краевой плоской деформации. По аналогии с теорией изгиба пластинок можно рассчитывать, что, комбинируя итерационные процессы п. 3—8 с итерационными процессами п. 9, можно для упомянутого здесь класса задач теории оболочек выполнять с произвольной точностью краевые условия трехмерной теории упругости. В статье [1] этот вопрос рассмотрен для пластинок в случаях, соответствующих свободному, жестко заделанному и шарнирно опертому краю.

13. В предлагаемой статье для всех итерационных процессов приводятся только головные системы уравнений. Построение уравнений, определяющих n-е члены разложений, не представляет труда (они отличаются от выписанных выше уравнений только свободными членами), но было бы слишком громоздко выписывать их здесь.

Представляет интерес оценка остаточных членов и формулировка тех условий, при выполнении которых итерационные процессы этой статьи имеют асимптотический характер. Здесь встретятся математические трудности, но можно надеяться, что они не будут слишком велики.

Условия, обеспечивающие асимптотическую сходимость рассматриваемых процессов, определяют область применимости изложенных результатов. Некоторые из этих условий ясны и без математического анализа.

Одно из них заключается в том, что уравнения, определяющие исходные приближения, должны иметь ограниченные решения при данных граничных условиях. Оно выполняется не во всех практически важных случаях. В частности, уравнения безмоментной теории (11.1) не имеют ограниченных решений:

(а) для бесконечно длинной цилиндрической оболочки, для конической оболочки, содержащей вершину, и вообще для оболочки с острием;

(б) для оболочки, касающейся плоскости вдоль замкнутой кривой (например, тор).

Такие оболочки и оболочки, мало отличающиеся от них (например, весьма длинная цилиндрическая оболочка), в монографии [9] были названы оболочками с особой срединной поверхностью. Для них трехмерные уравнения теории упругости надо сводить к двухмерным другими итерационными процессами.

Не будут иметь решения уравнения (11.1) и в случае, когда $b_{\alpha\beta} = 0$. Это значит, что особо должен быть рассмотрен и вопрос о пологих оболочках. Он, очевидно, решится при помощи итерационного процесса, описанного в п. 7.

Поступила 15 I 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 4.
2. Reiss E. L. A theory for the small ratationally symmetric deformations of cylindrical shells. Communications. Pure and Appl. Math. 1960, vol. XIII.
3. Reiss E. L., Stanley L. On the theory of plane streses. Quart. Appl. Math., 1961, vol. XIX, No. 3.
4. Friedrichs K. O., Dressler R. F. A boundary-layer theory for elastic plates. Communications. Pure and Appl. Math., 1961, vol. XIV, No. 1.
5. Green A. E. On the linear theory of thiu elastic shells. Proc. Roy. Soc. A, 1962, vol. 266, No 1325.
6. Green A. E. Boundary-layer equations in the linear theory of thin elastic shells. Proc. Roy. Soc. A, 1962, vol. 269, № 1339.
7. Friedrichs K. O. The edge effect in the bending of plates. Reissner Anniv, vol. J. W. Edwards, Ann. Arbos. Mich., 1949.
8. Friedrichs K. O. Kurchoff's boundary conditions and the edge effect for elastic plates. Proc. Sympos. Appl. Math., 1950, vol. 3.
9. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, 1953.
10. Green A. E., Zerna W. Theoretical elastiqity. Oxford University Press, 1954.
11. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. ОНТИ, 1934.
12. Гольденвейзер А. Л., Лурье А. И. О математической теории равновесия упругих оболочек, ПММ, 1947, т. XI, вып. 5.
13. Гольденвейзер А. Л. Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений в частных производных с краевыми условиями, зависящими от параметра. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 5.
14. Гольденвейзер А. Л. Асимптотическое интегрирование линейных дифференциальных уравнений в частных производных с малой главной частью. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 1..
15. Гольденвейзер А. Л. Некоторые математические проблемы линейной теории упругих тонких оболочек. Успехи матем. наук, 1960, т. XV, вып. 5