К ТЕОРИИ СЖИМАЕМЫХ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД

Д. Д. Ивлев, Т. Н. Мартынова (Воронеж)

Пластическое деформирование сплошных сред может сопровождаться изменением объема. Ассоциированный закон течения [1] определяет необратимое изменение объема в зависимости от вида поверхности текучести.

«Ассоциированная» сжимаемость материала является следствием сдвиговых деформаций и никак не определяется изменением объема при гидростатическом давлении.

Грунты и другие физические среды изменяют необратимым образом свой объем при всестороннем сжатии; это обстоятельство учитывалось, например, в [2]. В заметке [3] рассматривалось видоизменение теоремы Мизеса, согласно которой удалось определить соотношения между первыми инвариантами тензоров деформаций и напряжений независимо от вида поверхности текучести. Однако соотношения закона связи между напряжениями и деформациями, предложенные в [3], обладают существенным недостатком: характеристические многообразия уравнений, определяющих напряженное и деформированное состояния, оказываются в общем случае различными и, следовательно, граничные условия, заданные на данной части поверхности тела, определяют различные области существования решений для напряжений и скоростей перемещения. Эти области, согласно [3], совпадают лишь для материалов, условие текучести которых не зависит от первого инварианта тензора напряжений.

Ниже выводятся общие соотношения между напряженным и деформированным состояниями для произвольных изотропных идеально пластических сред, приводящие к наперед заданной зависимости пластической объемной деформации от гидростатического давления, и для которых характеристические многообразия уравнений, определяющих напряженное и деформированное состояния, совпадают между собой.

1. Предположим, что предельное условие состояния материала задано в виде

$$\Phi_i(\sigma, \Sigma_2, \Sigma_3) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

где σ — первый инвариант тензора напряжений, Σ_2, Σ_3 — соответственно второй и третий инварианты девиатора напряжений.

Согласно ассоциированному закону течения Мизеса имеем

$$de_{ij} = d\lambda_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda_k \left[\frac{1}{3}\frac{\partial \Phi_k}{\partial \sigma} + \frac{\partial \Phi_k}{\partial \Sigma_2}\frac{\partial \Sigma_2}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial \Phi_k}{\partial \Sigma_3}\frac{\partial \Sigma_3}{\partial \sigma_{ij}}\right] \tag{1.2}$$

где e_{ij} — компоненты тензора деформаций, и в (1.2) имеет место суммирование по индексу k. Из условия (1.2) можно найти

$$de_{ij}' = d\lambda_k \left[\frac{\partial \Phi_k}{\partial \Sigma_2}\frac{\partial \Sigma_2}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial \Phi_k}{\partial \Sigma_3}\frac{\partial \Sigma_3}{\partial \sigma_{ij}}\right] \tag{1.3}$$

$$de = \frac{1}{3} d\lambda_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial \sigma}, \qquad e = \frac{1}{3}(e_{11} + e_{22} + e_{33}) \tag{1.4}$$

здесь и всюду компонентам девиатора приписан штрих наверху. Отметим, что

$$d\lambda_k = 0 \quad \text{при } \Phi_k < 0 \tag{1.5}$$

Согласно [3], если дана зависимость $e = \varphi(\sigma)$, то соотношения закона связи $e_{ij} - \sigma_{ij}$ при условии (1.1) могут быть записаны в виде

$$de_{ij}' = d\lambda_k \left[\frac{\partial \Phi_k}{\partial \Sigma_2}\frac{\partial \Sigma_2}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial \Phi_k}{\partial \Sigma_3}\frac{\partial \Sigma_3}{\partial \sigma_{ij}}\right], \qquad e = \varphi(\sigma) \qquad \left(de = \frac{d\varphi}{d\sigma} d\sigma\right) \tag{1.6}$$

Таким образом, различие в зависимости $e_{ij} - \sigma_{ij}$ в обоих случаях состоит в определении закона сжимаемости (1.4) и (1.6).

В дальнейшем удобно использовать выражения для компонент скоростей деформации

$$\varepsilon_{ij} = \frac{de_{ij}}{dt}, \qquad \mu_k = \frac{d\lambda_k}{dt}$$

Известно, что характеристические многообразия уравнений, определяющих напряженное и деформированное состояния согласно (1.3) и (1.4), совпадают между собой.

Однако в случае соотношений (1.3) и (1.6) характеристические многообразия уравнений, определяющих деформированное состояние, совпадают с характеристическими многообразиями системы уравнений, определяющих напряженное состояние, лишь в случае, когда функции Φ_k не зависят от σ.

Покажем это на примере напряженного и деформированного состояний, соответствующих в пространстве главных напряжений σ_1, σ_2, σ_3 ребру криволинейной пирамиды, уравнение которой задано в виде

$$\Phi \equiv \max |\Psi(\tau_\nu, \sigma_\nu)| = 0 \qquad (1.7)$$

где τ_ν, σ_ν — соответственно касательное и нормальное напряжения, действующие на площадке с нормалью ν.

Рассмотрим некоторое ребро, уравнение которого запишем в виде [4]

$$\sigma_1 = \sigma_2, \qquad \sigma_3 = f(\sigma_1) \qquad (1.8)$$

Переходя к компонентам в декартовой системе координат, запишем соотношения (1.8) в виде

$$[\sigma_x - g(\sigma)][\sigma_y - g(\sigma)] - \tau_{xy}^2 = 0$$
$$[\sigma_y - g(\sigma)][\sigma_z - g(\sigma)] - \tau_{yz}^2 = 0$$
$$[\sigma_z - g(\sigma)][\sigma_x - g(\sigma)] - \tau_{zx}^2 = 0 \qquad (1.9)$$

причем

$$\sigma_1 = g(\sigma), \qquad 2\sigma_1 + f(\sigma_1) = 3\sigma$$

Используя соотношения (1.9) в качестве пластического потенциала, найдем

$$\varepsilon_x' = {}^1/_3\mu_1(2\sigma_y - \sigma_x - g) - {}^1/_3\mu_2(\sigma_y + \sigma_z - 2g) + {}^1/_3\mu_3(2\sigma_z - \sigma_x - g)$$
$$\varepsilon_y' = {}^1/_3\mu_1(2\sigma_x - \sigma_y - g) + {}^1/_3\mu_2(2\sigma_z - \sigma_y - g) - {}^1/_3\mu_3(\sigma_z + \sigma_x - 2g)$$
$$\varepsilon_z' = -{}^1/_3\mu_1(\sigma_x + \sigma_y - 2g) + {}^1/_3\mu_2(2\sigma_y - \sigma_z - g) + {}^1/_3\mu_3(2\sigma_x - \sigma_z - g)$$
$$\varepsilon_{xy} = -\mu_1\tau_{xy}, \qquad \varepsilon_{yz} = -\mu_2\tau_{yz}, \qquad \varepsilon_{zx} = -\mu_3\tau_{zx} \qquad (1.10)$$
$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (1 - dg/d\sigma)[\mu_1(\sigma_x + \sigma_y - 2g) + \mu_2(\sigma_y + \sigma_z - 2g) + {}$$
$$+ \mu_3(\sigma_z + \sigma_x - 2g)]$$

Исключая неопределенные множители μ_i и переходя к компонентам скоростей перемещений u, v, w, запишем соотношения (1.10) в виде

$$2\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{n_2}{n_1} - \frac{n_1}{n_2}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\frac{n_3}{n_2} - \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{n_3}{n_1} = 0$$
$$2\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{n_1}{n_2} - \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\left(\frac{n_3}{n_2} - \frac{n_2}{n_3}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{n_1}{n_3} = 0 \qquad (1.11)$$
$$2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \left(1 - \frac{dg}{d\sigma}\right)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{n_1}{n_2} + \frac{n_2}{n_1}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\left(\frac{n_2}{n_3} + \frac{n_3}{n_2}\right) + {}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{n_1}{n_3} + \frac{n_3}{n_1}\right)\right] = 0 \qquad (1.12)$$

Характеристические многообразия $\chi(x, y, z)$ системы уравнений (1.11), (1.12) удовлетворяют уравнению

$$F\left[\left(1 + \frac{\partial f}{\partial \sigma_1}\right)F^2 - (\operatorname{grad}\chi)^2\right] = 0, \qquad F = \frac{\partial \chi_i}{\partial x} n_i \qquad (1.13)$$

Здесь n_i — направляющие косинусы третьего главного напряжения σ_3 в пространстве главных напряжений.

Очевидно, для случая связи $\varepsilon_{ij} - \sigma_{ij}$, определяемой соотношениями (1.6), имеют место соотношения (1.11), а вместо условий (1.12) будет иметь место

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{d\varphi}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt} \qquad (1.14)$$

Характеристические многообразия $\chi(x, y, z)$ системы уравнений (1.11), (1.14) удовлетворяют уравнению

$$F[2F^2 - (\operatorname{grad}\chi)^2] = 0 \qquad (1.15)$$

2. Необходимо отметить, что сжимаемость, определяемая выражениями (1.4) и (1.6), имеет совершенно различный характер происхождения. Сжимаемость, определяемая соотношением (1.4), существенно связана с формоизменением материала. В самом деле, в соотношениях (1.3), (1.4) величина $d\lambda_k \neq 0$ только в случае, если $\Phi_k = 0$, $d\Phi_k / dt = 0$. Следовательно, если материал подвергнуть только гидростатическому давлению, то всегда $\Phi_k < 0$, $d\lambda_k = 0$, и материал, следующий соотношениям (1.3), (1.4), не может приобрести остаточное изменение объема.

Сжимаемость, определяемая соотношением (1.6), наоборот, никак не связана с формоизменением и определяется из экспериментов на всестороннее равномерное сжатие.

Из рассмотрения соотношений (1.12) и (1.14) следует, что соотношение (1.4) существенно влияет на вид характеристических поверхностей $\chi(x, y, z)$. Напротив, вид функции $\varphi(\sigma)$ в (1.6) никак не влияет на вид характеристических поверхностей и влияет лишь на вид соотношений вдоль характеристик. Зависимости (1.4) и (1.6) имеют инвариантный характер. Если определить сжимаемость материала в виде

$$de = d\lambda_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial \sigma} + \frac{d\varphi}{d\sigma} d\sigma \tag{2.1}$$

и присоединить это соотношение к уравнениям (1.3), то полученные соотношения, во-первых, будут определять при всестороннем равномерном давлении зависимость $e = \varphi(\sigma)$, а во-вторых, характеристические многообразия уравнений, определяющих напряженное и деформированное состояния, будут совпадать. Для рассмотренного выше случая ребра криволинейной пирамиды к условиям (1.11) следует присоединить, согласно (2.1), условие (2.2)

$$\varepsilon = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{dg}{d\sigma}\right)\left[\varepsilon_{xy}\left(\frac{n_1}{n_2} + \frac{n_2}{n_1}\right) + \varepsilon_{yz}\left(\frac{n_2}{n_3} + \frac{n_3}{n_2}\right) + \varepsilon_{zx}\left(\frac{n_1}{n_3} + \frac{n_3}{n_1}\right)\right] + \frac{1}{3}\frac{d\varphi}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt} = 0$$

Легко видеть, что добавочный член $(d\varphi / d\sigma)\, d\sigma$ влияет лишь на соотношения вдоль характеристик.

Сделаем несколько замечаний. Для упруго-пластических сред следует принять

$$de_{ij} = de_{ij}^{e} + de_{ij}^{p} \tag{2.3}$$

где индексы e и p соответственно приписаны компонентам упругой и пластической деформации.

Компоненты упругой деформации удовлетворяют закону Гука. Изменение объема будет также складываться из двух составляющих

$$de = de^{e} + de^{p} \tag{2.4}$$

Отметим далее, что в случае пренебрежения в теле упругими деформациями при потере несущей способности $d\sigma / dt = 0$, поэтому наличие сжимаемости (1.6) в соотношении (2.1) не сказывается на величине предельных нагрузок.

Отметим, что выражение $e_1 + e_2 + e_3$ представляет собой скалярное произведение вектора деформации $e = e_1\mathbf{i} + e_2\mathbf{j} + e_3\mathbf{k}$ на вектор $r = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, направленный по прямой, равнонаклоненной к осям главных деформаций e_1, e_2, e_3. Здесь $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы, направленные вдоль осей e_1, e_2, e_3. Аналогично для приращений и скоростей деформаций.

Из соотношения (2.1) следует: для идеально пластических сред, материал которых способен приобретать необратимое изменение объема при всестороннем равномерном сжатии, вектор скорости пластической деформации не ортогонален к поверхности текучести.

Как известно, постулат Драккера [5,6] приводит к градиентальному направлению вектора скорости пластической деформации к поверхности текучести. Но вывод Драккера существенно основан на предположении, что в зоне, ограниченной поверхностью текучести, имеют место лишь упругие деформации. В данном случае предполагается, что необратимые пластические деформации могут возникнуть вне зависимости от того, соответствует ли напряженное состояние поверхности текучести или нет.

Если сформулировать постулат Драккера только по отношению к компонентам девиатора скоростей деформации и исходить из приращения работы $\delta W = \sigma_{ij}\delta e_{ij}'$, то можно получить как следствие, что компоненты девиатора скоростей деформации пропорциональны частным производным по компонентам напряжений при условии текучести, зависящей от второго и третьего инварианта девиатора напряжений (первый инвариант σ в этом случае входит в условие текучести как параметр). Это обстоятельство выражается равенствами (1.3).

Поступила 24 I 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Mises R. Mechanik der plastischen Formaenderung von Kristallen, ZAMM, 8, 1928, 161—185.
2. Гениев Г. А. Вопросы динамики сыпучих сред. ЦНИИСК, научное сообщение. Госстройиздат, 1958, вып. 2.
3. Ивлев Д. Д., Мартынова Т. Н. Об учете сжимаемости идеально пластических сред. ПММ, 1961 т. XXV, вып. 6.
4. Ивлев Д. Д. К теории разрушения твердых тел. ПММ, 1959, XXIII, вып. 3.
5. Drucker D. C. Some implications of work hardening and ideal plasticity, Quart. Appl. Math., 1950, 7, p. 411—418.
6. Drucker D. C. A more fundamental approach to plastic stress-strain relations, Proc. First U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1952, p. 487—491.

ИСПРАВЛЕНИЯ К СТАТЬЕ Г. С. ГОЛИЦЫНА «РАСЧЕТ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ СВЯЗЕЙ В ЛОКАЛЬНО ИЗОТРОПНОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ» (ПММ, 1963, XXVII, вып. 1)

По вине автора формулы (4.2)—(4.5) написаны неправильно. Должно быть

$$Q_{ll}(r) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 D_{ll}(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial D_{nn}(r)}{\partial r} + \frac{2}{r^2}[D_{ll}(r) - D_{nn}(r)] \tag{4.2}$$

$$Q_{nn}(r) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 D_{ll}(r)}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 D_{nn}(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial D_{ll}(r)}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2}[D_{nn}(r) - D_{ll}(r)] \tag{4.3}$$

$$Q_{ll} = Q_{nn} = \frac{\langle\varepsilon\rangle}{3\nu} \tag{4.4}$$

$$Q_{ll} = \frac{11}{12}C^2\langle\varepsilon\rangle^{2/3}r^{-4/3}, \qquad Q_{nn} = \frac{11}{36}C^2\langle\varepsilon\rangle^{2/3}r^{-4/3} \tag{4.5}$$

Исправления следовало бы также внести в фиг. 3 в функции, нанесенные пунктиром, именно, функция q_{ll} должна быть несколько опущена, а q_{nn} — приподнята, однако в масштабе, используемом в данной фигуре, эти исправления были бы практически незаметны. Остальные результаты этого пункта сохраняются, в частности, формулы (4.6) и (4.7) фактически были получены при помощи спектральных представлений без использования неправильных формул (4.2) и (4.3). Приношу благодарность А. М. Обухову, указавшему мне на эти ошибки.

Г. С. Голицын

Т-06080 Подписано к печати 27/V—1963 г. Тираж 3100 экз. Зак. 1999
Формат бум. 70×108¹/₁₆ Печ. л. 17,12 Бум. л. 6¹/₄ Уч.-изд. листов 17,4

2-я типография Издательства Академии наук СССР Москва, Шубинский пер., 10