О ПРИМЕНЕНИИ СИМВОЛИЧЕСКОГО МЕТОДА А. И. ЛУРЬЕ К АНАЛИЗУ НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЙ И ДВУМЕРНЫХ ТЕОРИЙ УПРУГИХ ПЛИТ

У. К. Нигул (Таллин)

На основе символического метода А. И. Лурье [1,2] исследуются напряженные состояния плиты, антисимметричные относительно срединной поверхности. Анализируются возможности сепаративного построения основных напряженных состояний без учета краевых эффектов Сен-Венана. Устанавливается, что существуют краевые задачи, при которых уточненные двумерные теории [3–8] дают лишь кажущиеся уточнения основного напряженного состояния, построенного по теории Кирхгоффа.

Ляв [9] рассматривал построение основного напряженного состояния, которое имеет следующие свойства: а) точно удовлетворяет всем уравнениям теории упругости; б) точно удовлетворяет условиям, заданным на торцовых поверхностях ($z = \pm h$) плиты; в) имеет произволы, содержащиеся в бигармонической функции; г) отличается от теории Кирхгоффа по поправочным членам порядка a^2 (здесь $a = h/l$ — относительная толщина плиты). Пользуясь на каждом краю двумя условиями, Ляв [9] сепаративно определил основное напряженное состояние, не анализируя погрешность.

А. И. Лурье [1,2] развивал теорию основного напряженного состояния и доказал [1], что все другие напряженные состояния являются быстроизменяющимися. При некоторых дополнительных условиях они образуют краевые эффекты типа Сен-Венана, локализованные у краев плиты и в местах разрыва нагрузки или ее производных.

Применяя символическую теорию А. И. Лурье [1] с несколько видоизмененными разрешающими функциями, удалось установить, что по краевым условиям можно различать три класса задач, при которых основное напряженное состояние определяется сепаративно с асимптотической (при $a \to 0$) погрешностью: класс А — порядка $\vartheta \sim a$, класс В — порядка $\vartheta \sim a^2$, класс С — порядка $\vartheta \leqslant a^3$.

К классу А принадлежат защемленные плиты и балки плиты, а также плита, имеющая край, на котором равняются нулю напряжения изгиба (σ_{11}), напряжения сдвига, параллельные плоскости плиты (σ_{12}), и нормальные перемещения (u_3). К классу В относится свободно опертая плита (на краю $\sigma_{11} = u_2 = u_3 = 0$). К классу С принадлежат свободно опертая полоса и балка (на краях $\sigma_{11} = u_3 = 0$), а также формальные задачи, при которых вначале задаются на краях два интегральных условия и определяется основное напряженное состояние без учета краевых эффектов, а затем считают заданными перемещения или напряжения, полученные на краях.

При сепаративном построении основного напряженного состояния задач классов А и В нет смысла применять более точную теорию, чем теория Кирхгоффа. Приближенный учет одного краевого эффекта (из трех бесконечных последовательностей), рассматриваемого в двумерных теориях [3–8], может здесь иметь существенное значение только в исключительных случаях. Поэтому уточненные двумерные теории [3–8], вообще говоря, не гарантируют уточнение основного напряженного состояния задач классов А и В. При задачах класса С они дают менее точные результаты, чем теория сепаративного построения основного напряженного состояния [2,9] и метод усеченных степенных рядов [10]. Отметим, что аналогичные результаты были недавно получены А. Л. Гольденвейзером[1] на основе его метода асимптотических процедур [11].

Различие между методом А. Л. Гольденвейзера [11] и асимптотическими рассуждениями данной статьи заключается в том, что по методу А. Л. Гольденвейзера с самого начала ищутся по очереди приближения с асимптотической погрешностью порядка a, a^2, a^3,.., а по символическому методу А. И. Лурье вначале составляется формально точное решение, которое потом может быть разложено в ряд по малому параметру a. При помощи такого разложения можно восстановить теорию Кирхгоффа, а также формулы различных приближений метода усеченных степенных рядов [10] и метода асимптотических процедур [11,12]. При численном решении задач с учетом краевых эффектов такое разложение не является необходимым.

---

[1] Об этом А. Л. Гольденвейзер сообщил автору в частной беседе в декабре 1962 г.

1. Основные обозначения и исходные символические формулы. Пусть E — модуль упругости, μ — коэффициент Пуассона, $2h$ — толщина плиты, l — характерный размер срединной поверхности плиты (в случае синусоидальной нагрузки — не более длины полуволны), $a = h / l$ — относительная толщина плиты; ξ, η, ζ — безразмерные (деленные на h) декартовы координаты, из которых ξ, η выбраны на срединной поверхности ($\zeta = 0$) плиты; u_i ($i = 1, 2, 3$) безразмерные (деленные на h) перемещения в направлениях ξ, η, ζ, соответственно; σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) — безразмерные (умноженные на $(1 + \mu)E^{-1}$) напряжения; U_i ($i = 1, 2, 3$) — интегральные перемещения, M_{kr} ($k, r = 1, 2$) — безразмерные моменты, Q_r — безразмерные поперечные силы. При этом

$$U_r = \frac{3}{2}\int_{-1}^{+1} u_r\,\zeta\,d\zeta, \quad U_3 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} u_3\,d\zeta, \quad M_{kr} = \int_{-1}^{+1} \sigma_{kr}\,\zeta d\zeta, \quad Q_r = \int_{-1}^{+1} \sigma_{r3}\,d\zeta \qquad (k, r = 1, 2) \tag{1.1}$$

Следуя [1], принимаем обозначения для символов дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial\xi} = \partial_1, \qquad \frac{\partial}{\partial\eta} = \partial_2, \qquad \partial_1^2 + \partial_2^2 = \Delta, \qquad q = \sqrt{\Delta} \tag{1.2}$$

Предположим, что на торцовых поверхностях плиты заданы антисимметричные нагрузки, так что

$$\sigma_{r3}(\xi, \eta, \pm 1) = p_r, \qquad \sigma_{33}(\xi, \eta, \pm 1) = \pm p_3, \qquad p_i = p_i(\xi, \eta)$$
$$(r = 1, 2; \ i = 1, 2, 3) \tag{1.3}$$

Символический метод А. И. Лурье [1, 2] позволяет построить следующие формулы для перемещений:

$$\begin{gathered}
u_r = \partial_r\left[-\frac{q}{2-2\mu}(\zeta \sin q \cos q\zeta - \cos q \sin q\zeta) - \sin q \sin q\zeta\right]\varphi_1 - \\
- 2(-1)^r(\partial_1 + \partial_2 - \partial_r)\frac{\sin q\zeta}{q}\varphi_2 + \\
+ \partial_r\left[-\frac{\zeta}{2-2\mu}\cos q \cos q\zeta - \frac{1-2\mu}{2-2\mu}\cos q\frac{\sin q\zeta}{q} - \frac{1}{2-2\mu}\sin q \sin q\zeta\right]\varphi_3 \\
u_3 = \left[\frac{q^2}{2-2\mu}(\zeta \sin q \sin q\zeta + \cos q \cos q\zeta) + \frac{1-2\mu}{2-2\mu} q \sin q \cos q\zeta\right]\varphi_1 + \\
+ \left[-\frac{q}{2-2\mu}(\sin q \cos q\zeta - \zeta \cos q \sin q\zeta) + \cos q \cos q\zeta\right]\varphi_3
\end{gathered} \tag{1.4}$$

Выражения для безразмерных напряжений и относительных деформаций могут быть получены по формулам

$$\sigma_{jj} = \varepsilon_{jj} + \frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon, \qquad \sigma_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{1.5}$$

$$\varepsilon_{rr} = \partial_r u_r, \qquad \varepsilon_{33} = \frac{\partial}{\partial\zeta}u_3, \qquad \varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \tag{1.6}$$

$$\varepsilon_{12} = \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1, \qquad \varepsilon_{r3} = \partial_r u_3 + \frac{\partial}{\partial\zeta}u_r \qquad (r = 1, 2)$$

Условия (1.3) удовлетворяются, если определить разрешающие функции φ_i ($i = 1, 2, 3$) из уравнений

$$\begin{gathered}
-D\partial_1\varphi_1 + \cos q\,(\partial_2\varphi_2) = p_1, \\
-D\partial_2\varphi_1 - \cos q\,(\partial_1\varphi_2) = p_2
\end{gathered} \qquad -D\varphi_3 = p_3 \qquad \left(D = \frac{\Delta}{2-2\mu}\left[\frac{\sin 2q}{2q} - 1\right]\right) \tag{1.7}$$

В (1.4), (1.7) следует понимать тригонометрические функции от q и $q\zeta$ как символическую (условную) запись дифференциальных выражений бесконечного порядка, появляющихся при их раскрытии в виде степенных рядов [1, 2]. В развернутом виде дифференциальные выражения содержат лишь целочисленные степени Δ.

2. Элементарные напряженные состояния. Для краткости ограничиваемся случаем

$$p_s = P_s \cos m\eta, \qquad p_2 = P_2 \sin m\eta, \qquad P_i = P_i(\xi)$$
$$\varphi_s = \Phi_s \cos m\eta, \qquad \varphi_2 = \Phi_2 \sin m\eta, \qquad (s = 1, 3;\ i = 1, 2, 3) \tag{2.1}$$

где по определению a вещественный параметр m удовлетворяет условию

$$m \leqslant a. \tag{2.2}$$

На основе (2.1) имеем

$$\triangle = \partial_1^2 - m^2 \tag{2.3}$$

Решение уравнений (1.7) можно построить [1] в форме

$$\varphi_i = \varphi_i^* + \varphi^\circ_i + \psi_i \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{2.4}$$

Здесь φ_i^* обозначают частные интегралы, соответствующие заданным нагрузкам p_i, φ_i° являются решениями уравнений

$$\frac{\partial_1\triangle\triangle}{3-3\mu}\varphi_1^\circ + \partial_2\varphi_2^\circ = 0, \qquad \frac{\partial_2\triangle\triangle}{3-3\mu}\varphi_1^\circ - \partial_1\varphi_2^\circ = 0, \qquad \triangle\triangle\varphi_3^\circ = 0 \tag{2.5}$$

и ψ_i обозначают суммы

$$\psi_i = \psi_{i1} + \psi_{i2} + \psi_{i3} + \cdots \tag{2.6}$$

частных решений, удовлетворяющих условиям вида

$$\Delta\psi_{sj} = k_j^2\,\psi_{sj}, \qquad \Delta\psi_{2j} = \lambda_j^2\,\psi_{2j} \qquad (s = 1, 3;\ j = 1, 2, \ldots, \infty) \tag{2.7}$$

где k_j — ненулевые корни уравнения

$$\sin 2k = 2k \tag{2.8}$$

и λ_j — корни уравнения

$$\cos\lambda = 0 \tag{2.9}$$

Ненулевые корни уравнения (2.8) комплексные и распадаются на пары, различающиеся по знаку. Запишем корни с отрицательной вещественной частью в форме

$$k_j = -k_j^{(1)} + ik_j^{(2)}, \qquad \bar{k}_j = -k_j^{(1)} - ik_j^{(2)} \tag{2.10}$$

Для первых значений $k_j^{(1)}$, $k_j^{(2)}$ вычисления дают [1] (2.11)

$k_1^{(1)} = 3.749$, $k_2^{(1)} = 6.950$, $k_3^{(1)} = 10.119$, $k_1^{(2)} = 1.384$, $k_2^{(2)} = 1.676$, $k_3^{(2)} = 1.858$

С увеличением порядкового номера j величины $k_j^{(1)}$, $k_j^{(2)}$ определяются все более точно по приближенным формулам

$$k_j^{(1)} = j\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}R_j, \qquad k_j^{(2)} = R_j k_j^{(1)}, \qquad R_j = \frac{\ln(4j\pi + \pi)}{2j\pi + {}^1/_2\,\pi} \tag{2.12}$$

Уравнение (2.9) имеет отрицательные корни

$$\lambda_j = -\pi\,(j - {}^1/_2) \tag{2.13}$$

1°. *Основное напряженное состояние* строится при помощи φ_i^*, φ_i°. В частном случае

$$P_1 = 0, \qquad P_2 = 0, \qquad P_3 = \text{const}, \qquad m = 0 \tag{2.14}$$

можно подобрать

$$\varphi_1^* = 0, \qquad \varphi_2^* = 0, \qquad \varphi_3^* = \frac{1-\mu}{8}P_3\xi^4 \tag{2.15}$$

и для перемещений получим из (1.4) формулы (2.16)

$$u_1^* = P_3\xi\zeta\left[-\frac{1-\mu}{2}\xi^2 - \frac{3\mu}{2} + \frac{2-\mu}{2}\zeta^2\right], \qquad u_2^* = 0$$

$$u_3^* = P_3\left\{\frac{1-\mu}{8}\xi^4 - \frac{3}{4}\xi^2(2-\mu-\mu\zeta^2) + \frac{1}{8}\left[3-\mu+6(1-\mu)\zeta^2-(1+\mu)\zeta^4\right]\right\}$$

Объем заметки не позволяет рассматривать других примеров, поэтому ограничимся ссылкой на [1, 2].

Для анализа напряженных состояний, вычисляемых по φ_i°, исключим φ_2° из (1.4), при помощи первых двух уравнений системы (2.5), раскроем символические тригонометрические выражения в виде степенных рядов и учтем, что $\Delta\Delta\Delta\varphi_1^\circ = 0$, $\Delta\Delta\varphi_3^\circ = 0$. Получим формулы, выражающие u_2° через $\Delta\varphi_1^\circ$, φ_3° и их производные до третьего порядка включительно. Оказывается, что напряженные состояния, построенные при помощи $\Delta\varphi_1^\circ$, могут быть получены как линейные комбинации напряженных состояний, соответствующих функции φ_3°. Поэтому достаточно рассматривать зависимость искомых величин от φ_3°. Для перемещений имеем формулы

$$u_r^\circ = \left[-1 - \frac{\mu}{2-2\mu}\Delta + \frac{2-\mu}{6-6\mu}\zeta^2\Delta\right]\partial_r\zeta\,\varphi_3^\circ$$

$$u_3^\circ = \left[1 - \frac{2-\mu}{2-2\mu}\Delta + \frac{\mu}{2-2\mu}\zeta^2\Delta\right]\varphi_3^\circ \qquad (2.17)$$

Здесь на основе (2.1)

$$\varphi_3^\circ = (A_1e^{m\xi} + A_2e^{m\xi} + A_3\xi e^{-m\xi} + A_4\xi e^{-m\xi})\cos m\eta \qquad \text{при } m \neq 0 \qquad (2.18)$$

$$\varphi_3^\circ = A_1' + A_2'\xi + A_3'\xi^2 + A_4'\xi^3 \qquad \text{при } m = 0 \qquad (2.19)$$

Основное напряженное состояние строится в виде суммы

$$u_i^1 = u_i^* + u_i^\circ, \qquad \sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^\circ \qquad (i, j = 1, 2, 3) \qquad (2.20)$$

2°. *Краевые эффекты типа Сен-Венана.* Предположим, что m в достаточной мере меньше величин $k_1^{(1)}$ и $|\lambda_1|$, например $m \leqslant 1$, тогда ψ_{ij} являются быстро убывающими (или возрастающими) функциями от ξ, определяющими краевые эффекты типа Сен-Венана. Если предполагать, что плита достаточно тонкая, и ввести координату ξ_*, направленную с края во внутренность плиты, то можно определить ψ_{ij} по формулам

$$\psi_{sj} = \Psi_{sj}\cos m\eta, \qquad \psi_{2j} = \Psi_{2j}\sin m\eta \qquad (s = 1, 3;\ j = 1, 2, \ldots, \infty) \qquad (2.21)$$

$$\Psi_{sj} = C_{sj}e^{-\varkappa_j\xi_*} + \overline{C}_{sj}e^{-\overline{\varkappa}_j\xi_*}, \qquad \Psi_{2j} = B_je^{-\delta_j\xi_*}$$

$$\varkappa_j = +\sqrt{(k_j)^2 + m^2}, \qquad \overline{\varkappa}_j = +\sqrt{(\overline{k}_j)^2 + m^2}, \qquad \delta_j = +\sqrt{\lambda_j^2 + m^2} \qquad (2.22)$$

Здесь C_{sj}, $\overline{C}_{sj}$ — сопряженные комплексные, а B_j — вещественные постоянные.

На основе (2.21) нетрудно получить из (1.4) формулы для перемещений краевых эффектов ($u_i^{(2)}$). Затем на основе (1.5), (1.6) могут быть получены формулы для напряжений и на основе (1.1) — для интегральных величин. Например

$$M_{11}^{(2)} = 2m\cos m\eta\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{\mu m}{1-\mu}(G_{1j} + \overline{G}_{1j} + G_{3j} + \overline{G}_{3j}) - 2\delta_j\frac{\sin\lambda_j}{\lambda_j^3}\Psi_{2j}\right\}$$

$$Q_1^{(2)} = 2m\cos m\eta\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin\lambda_j}{\lambda_j}\Psi_{2j} \qquad (2.23)$$

где

$$G_{1j} = \left(\frac{\sin^2 k_j}{k_j^2} - 1\right)C_{1j}e^{-\varkappa_j\xi_*}, \qquad G_{3j} = \frac{\sin^2 k_j}{k_j^2}C_{3j}e^{-\varkappa_j\xi_*} \qquad (2.24)$$

а формулы для $\overline{G}_{1j}$, $\overline{G}_{3j}$ получают из (2.24), заменяя k_j, $\varkappa_j$, C_{1j}, C_{3j} сопряженными величинами $\overline{k}_j$, $\overline{\varkappa}_j$, $\overline{C}_{1j}$, $\overline{C}_{3j}$. В случае $m = 0$ имеем

$$M_{11}^{(2)} \equiv 0, \qquad Q_1^{(2)} \equiv 0 \qquad (2.25)$$

но интегральные перемещения не равняются нулю. Поэтому сепаративное определение основного напряженного состояния удается (при $m = 0$) точнее в статически определенных задачах, где M_{11} и Q_1 являются известными на краях.

Полное напряженное состояние (в зонах краевых эффектов) определяется в виде сумм

$$u_i = u_i^{(1)} + u_i^{(2)}, \qquad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} \qquad (2.26)$$

3. Пример. Предельная асимптотическая точность сепаративного определения основного напряженного состояния. Нагрузка вида (2.14). На краях

$$\xi = \pm\,\xi_0 = \frac{l}{2h} = a^{-1} \gg 1 \tag{3.1}$$

заданы условия

$$u_s(\xi_0, \zeta) = 0 \qquad (s = 1,\ 3) \tag{3.2}$$

из которых следует, что также

$$U_s(\xi_0) = 0 \qquad (s = 1,\ 3) \tag{3.3}$$

В силу симметрии задачи в (2.19)

$$A_2' = A_4' = 0 \tag{3.4}$$

На основе формул предыдущих пунктов имеем

$$u_1 = u_1{}^* - 2\xi\zeta A_3' + \sum_{j=1}^{\infty} (K_{1j} + \overline{K}_{1j} + K_{3j} + \overline{K}_{3j})$$

$$u_3 = u_3{}^* + A_3'\left(\xi^2 - \frac{2-\mu}{1-\mu} + \frac{\mu}{1-\mu}\zeta^2\right) + A_1' + \sum_{j=1}^{\infty} (L_{1j} + \overline{L}_{1j} + L_{3j} + \overline{L}_{3j}) \tag{3.5}$$

$$U_1 = P_3\xi\left[-\frac{1-\mu}{2}\xi^2 + \frac{3}{5}(1-3\mu)\right] - 2\xi A_3' + \sum_{j=1}^{\infty} (S_{1j} + \overline{S}_{1j} + S_{3j} + \overline{S}_{3j})$$

$$U_3 = P_3\left[\frac{1-\mu}{8}\xi^4 - \frac{3-2\mu}{2}\xi^2 + \frac{3-2\mu}{5}\right] + A_1' + A_3'\left[\xi^2 - \frac{6-4\mu}{3-3\mu}\right] + \sum_{j=1}^{\infty} (T_{1j} + \overline{T}_{1j} + T_{3j} + \overline{T}_{3j})$$

Здесь $u_1{}^*$, $u_3{}^*$ определяются по формулам (2.16) и

$$K_{1j} = k_j C_{1j} e^{k_j\xi_*}\left[-\frac{k_j}{2-2\mu}(\zeta\sin k_j\cos k_j\zeta - \cos k_j \sin k_j\zeta) - \sin k_j \sin k_j\zeta\right]$$

$$K_{3j} = k_j C_{3j} e^{k_j\xi_*}\left[-\frac{\zeta}{2-2\mu}\cos k_j \cos k_j\zeta - \frac{1-2\mu}{2-2\mu}\cos k_j \frac{\sin k_j\zeta}{k_j} - \frac{1}{2-2\mu}\sin k_j \sin k_j\zeta\right]$$

$$L_{1j} = C_{1j} e^{k_j\xi_*}\left[\frac{k_j{}^2}{2-2\mu}(\zeta\sin k_j \sin k_j\zeta + \cos k_j \cos k_j\zeta) + \frac{1-2\mu}{2-2\mu} k_j \sin k_j\zeta \cos k_j\zeta\right]$$

$$L_{3j} = C_{3j} e^{k_j\xi_*}\left[-\frac{k_j}{2-2\mu}(\sin k_j \cos k_j\zeta - \zeta\cos k_j \sin k_j\zeta) + \cos k_j \cos k_j\zeta\right] \tag{3.6}$$

$$S_{1j} = \frac{3\mu}{1-\mu} k_j C_{1j} e^{k_j\xi_*}\left(\frac{\sin^2 k_j}{k_j{}^2} - 1\right), \qquad T_{1j} = C_{1j} e^{k_j\xi_*}\sin^2 k_j$$

$$S_{3j} = \frac{3\mu}{1-\mu} k_j C_{3j} e^{k_j\xi_*}\frac{\sin^2 k_j}{k_j{}^2}, \quad T_{3j} = C_{3j} e^{k_j\xi_*}$$

Сопряженные величины $\overline{K}_{1j}$, $\overline{K}_{3j}$, $\overline{L}_{1j}$, ... получают из (3.6), заменяя k_j, C_{1j}, C_{3j} величинами $\overline{k}_j$, $\overline{C}_{1j}$, $\overline{C}_{3j}$. На основе (2.8) легко проверить, что величины K_{3j}, L_{3j},... отличаются соответственно от K_{1j}, L_{1j}, ... лишь постоянным множителем и следовательно без уменьшения общности можно полагать $C_{3j} = \overline{C}_{3j} = 0$.

На основе (3.5), (3.6) легко составить выражения для перемещений на краях плиты, где $\xi = \pm\,\xi_0$ и $\xi_* = 0$. Условие

$$u_3(\xi_0, \zeta) - U_3(\xi_0) = 0 \tag{3.7}$$

выполняется при $\mu \neq 0$ только в том случае, если существуют C_{1j}, $\overline{C}_{1j}$, имеющие порядок величины $P_3\xi_0{}^2$. Поэтому сепаративное определение коэффициентов A_1', A_3'— например их вычисление из условий (3.3) без учета краевых эффектов — связано с асимптотической (при $a \to 0$) погрешностью порядка a.

Для основного напряженного состояния имеем формулы (3.8)

$$u_1^{(1)} = \frac{1-\mu}{2} P_3 \xi_0^2 \, \xi\zeta \left[1 - \frac{\xi^2}{\xi_0^2} + O(a)\right], \qquad \sigma_{13}^{(1)} = -\frac{3}{2} P_3 \xi (1 - \zeta^2)$$

$$u_3^{(1)} = \frac{1-\mu}{8} P_3 \xi_0^4 \left[\left(1 - \frac{\xi^2}{\xi_0^2}\right)^2 + O(a)\right], \qquad \sigma_{11}^{(1)} = \frac{1}{2} P_3 \xi_0^2 \zeta \left[1 - \frac{3\xi^2}{\xi_0^2} + O(a)\right]$$

$$M_{11}^{(1)} = M_{11} = \frac{1}{3} P_3 \xi_0^2 \left[1 - \frac{3\xi^2}{\xi_0^2} + O(a)\right], \quad \sigma_{33}^{(1)} = \frac{3}{2} P_3 \zeta \left(1 - \frac{1}{3}\zeta^2\right)$$

$$Q_1^{(1)} = Q_1 = -2P_3\xi$$

Формулы (3.8) (без оценок погрешности и выражений для $\sigma_{13}^{(1)}$, $\sigma_{33}^{(1)}$) представляют собой решение теории Кирхгоффа. Уточнения порядка a^2, предлагаемые уточненными теориями [3-8], в данном случае бесполезны. Результаты и выводы были бы такими же, если заменить однородные краевые условия (3.2) функциями $f_1(\zeta)$, $f_3(\zeta)$, которые вместе с их производными имеют порядок не более $P_3\xi_0^2$. Принципиально возможно подобрать такие быстро изменяющиеся (по ζ) функции $f_1(\zeta)$, $f_3(\zeta)$, при которых совсем не удается сепаративно определить основное напряженное состояние. С возрастанием j краевые эффекты становятся более быстро изменяющимися по ζ, а коэффициенты C_{1j}, $\bar{C}_{1j}$ уменьшаются. Поэтому в конкретных задачах достаточно ограничиваться учетом конечного числа краевых эффектов (коэффициентов C_{1j}, $\bar{C}_{1j}$), хотя в смысле асимптотики $a \to 0$ они все «одинакового порядка».

Решение (3.8) можно уточнить также по методу асимптотических процедур [11-13], на каждом этапе уточнения приходится конструировать краевые эффекты подобно изложенному выше.

Если, например, заменить первое из условий (3.2) с условием $\sigma_{11}(\xi_0, \zeta) = 0$, то $u_1^{(1)}$ и все напряжения основного напряженного состояния сепаративно определяются точно, а $u_3^{(1)}$ — с асимптотической погрешностью порядка a^4. Это связано свойством (2.25) краевых эффектов и создает сравнительно благоприятные условия для уточненных двумерных теорий. Аналогично обстоит дело для статически определенной задачи расчета круглой плиты на равномерно распределенную нагрузку, рассмотренной Рейссом ([13], поэтому результат Рейсса относительно точности теории Рейсснера не противоречит данным выводам.

Поступила 14 II 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. К теории толстых плит. ПММ, 1942, т. VI, стр. 151.
2. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. Гостехиздат, 1955.
3. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates. J. Math. and Phys., 1944, vol. 23.
4. Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. J. Appl. Mech., 1945, vol. 12, № 1.
5. Reissner E. On bending of elastic plates. Quart. Appl. Math., 1947, vol. 5, 1.
6. Schäfer M. Über eine Verfeinerung der klassischen Theorie dünner schwach gebogener Platten. Z. angew. Math. und Mech., 1952. Bd. 32, Nr. 6.
7. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, 1961.
8. Гольденвейзер А. Л. О теории изгиба пластинок Рейсснера. Изв. АН СССР. Отд. техн. н., 1958, №. 4.
9. Love A. E. H. A treatise on the mathematical theory of elasticity, Cambridge University Press, 1934.
10. Кильчевский Н. А. Обобщение современной теории оболочек. ПММ, 1939, т. II, вып. 4.
11. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 4.
12. Friedrichs K. O., Dressler R. F. A boundarylayer theory for elastic plates. Communications Pure and Appl. Math., 1961, vol. XIV, No. 1.
13. Reiss E. L. Symmetric bending of thick circular plates. J. Soc. Industr. Appl. Math., 1962, vol. 10, No. 4.