

## МЕТОД УПРАВЛЕНИЯ ПОВОРОТОМ ПЛОСКОСТИ КРУГОВОЙ ОРБИТЫ СПУТНИКА

Ю. П. Гуськов (Москва)

1. Рассмотрим движение орбитального аппарата в центральном поле тяготения в процессе изменения плоскости круговой орбиты под действием ускорения  $W$ , вектор которого в любой момент времени направлен по бинормали к возмущенной траектории. Известно, что такому типу возмущенного движения соответствует вращение оскулирующей орбиты [1] относительно центра тяготения, причем форма орбиты остается неизменной. нас будет интересовать целенаправленный маневр, в результате которого осуществляется переход спутника в заданную плоскость движения. Цель такого маневра будет достигнута, если в конце активного участка полета плоскость оскулирующей орбиты совмещается с заданной.

Проведем анализ движения оскулирующей орбиты под действием ускорения  $W$ .

Свяжем с плоскостью невозмущенной орбиты  $\Pi$  правую прямоугольную систему координат  $Oxyz$  с началом (фиг. 1) в центре тяготения так, что ось  $x$  направлена в точку  $C$  орбиты, в которой находится спутник в момент начала маневра  $t_0$ , а ось  $y$  — по перпендикуляру к оси  $x$  в плоскости орбиты в сторону движения спутника.

В результате маневра триэдр осей  $Oxyz$  займет положение  $Ox'y'z'$ . Новое положение триэдра относительно исходного может быть охарактеризовано (фиг. 1) эйлеровыми углами  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ . Скорости изменения эйлеровых углов от действия ускорения  $W$  в общем случае определяются дифференциальными уравнениями оскулирующих элемен-

тов [1]; в частном случае круговой орбиты, когда параметр орбиты  $p = r$  — модуль радиуса-вектора спутника, имеем

$$\frac{d\psi}{dt} = W \sqrt{\frac{r}{\mu}} \frac{\sin u}{\sin \theta}, \quad \frac{d\theta}{dt} = W \sqrt{\frac{r}{\mu}} \cos u$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -W \sqrt{\frac{r}{\mu}} \sin u \operatorname{ctg} \theta \quad (1.1)$$

Здесь  $\mu$  — гравитационная постоянная  $u$  — аргумент широты.

Обозначим через  $\omega$  вектор угловой скорости триэдра  $Ox'y'z'$  относительно осей  $Oxyz$ . Найдем проекции  $\omega$  на оси прямоугольной системы координат с началом в центре масс спутника  $C'$ , составленной радиусом-вектором спутника, вектором его скорости и бинормалью к траектории. Для этого спроектируем на указанные оси (фиг. 1) вектора

угловых скоростей  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\theta}$  и  $\dot{\varphi}$ , определяемых системой (1.1). Получаем

$$\omega_r = W \sqrt{r/\mu}, \quad \omega_v = 0, \quad \omega_n = 0 \quad (1.2)$$

где  $\omega_r$ ,  $\omega_v$  и  $\omega_n$  — проекции  $\omega$  соответственно на радиус-вектор, вектор скорости и бинормаль.

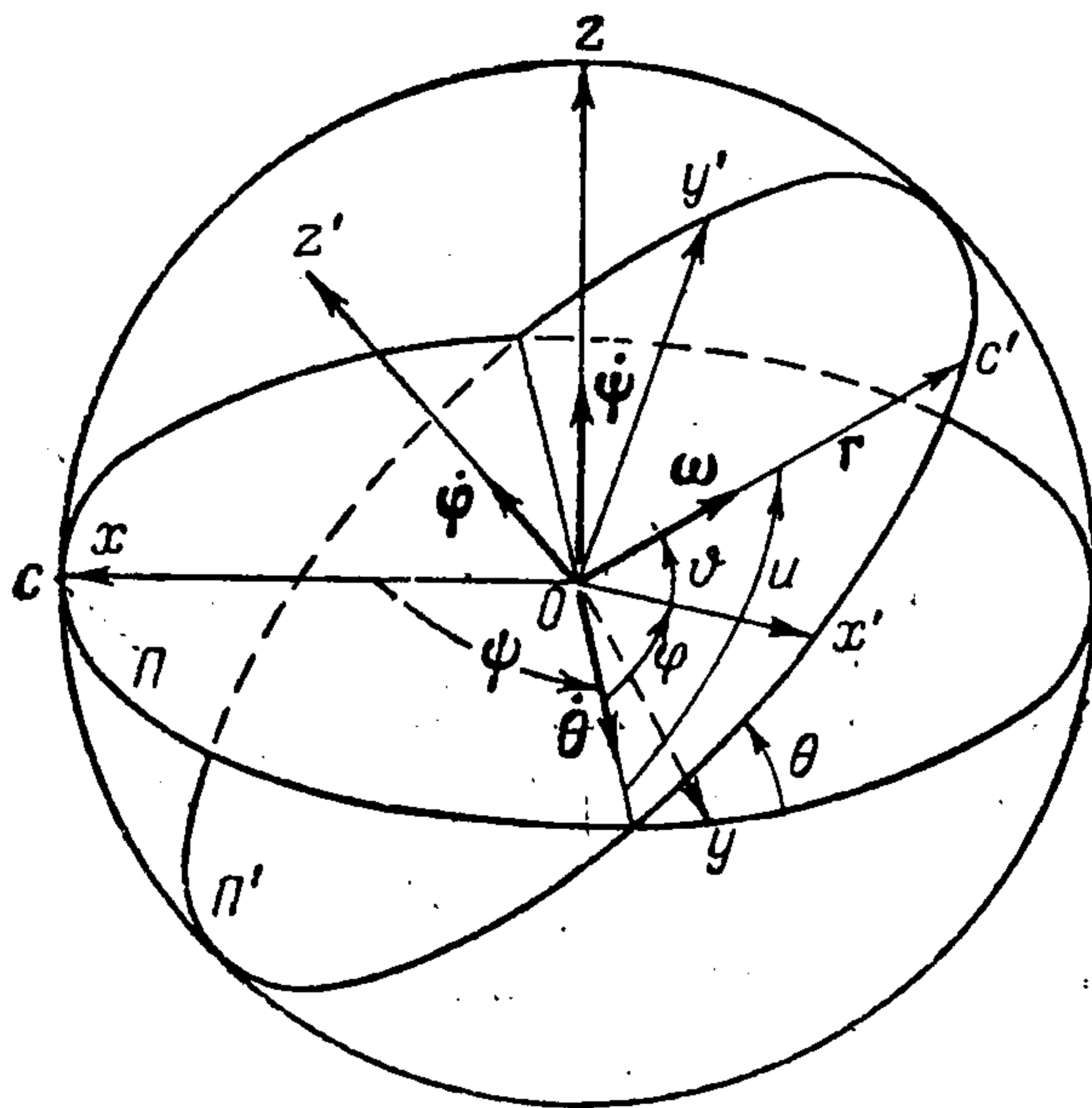
(отношения (1.2) указывают на то, что в возмущенном движении триэдр  $x'y'z'$ , скрепленный с оскулирующей орбитой, вращается с угловой скоростью  $\omega = W \sqrt{r/\mu}$  вокруг мгновенной оси, совпадающей с радиусом-вектором аппарата.

Положение радиуса-вектора  $r$ , находящегося всегда в плоскости  $x'y'$ , будем определять углом  $\vartheta$ , отсчитываемым от оси  $x'$ . Для рассматриваемого класса маневров [2]

$$d\vartheta = \Omega dt, \quad \text{или} \quad \vartheta = \Omega (t - t_0) \quad \left( \Omega = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu}{r}} \right) \quad (1.3)$$

где  $\Omega$  — угловая скорость спутника на круговой орбите радиуса  $r$ . Из фиг. 1 имеем

$$u = \varphi + \vartheta \quad (1.4)$$



Фиг. 1

2. Используем для определения законов изменения переменных  $\psi, \theta$  и  $u$  методы теории конечных поворотов. Пусть  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  — проекции вектора угловой скорости  $\omega$  на оси  $x', y'$  и  $z'$ , связанные с оскулирующей орбитой. Тогда имеем систему [3]

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{i\omega_z}{2}\alpha + \frac{i}{2}(\omega_x - i\omega_y)\beta, \quad \frac{d\beta}{dt} = -\frac{i\omega_z}{2}\beta + \frac{i}{2}(\omega_x + i\omega_y)\alpha \quad (i = \sqrt{-1}) \quad (2.1)$$

Здесь  $\alpha, \beta$  — параметры Кейли — Клейна, которые выражаются через параметры Родрига — Гамильтона  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , и эйлеровы углы [3]

$$\alpha = \lambda_0 + i\lambda_3 = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi + \varphi}{2} + i \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi + \varphi}{2} \quad (2.2)$$

$$\beta = -\lambda_2 + i\lambda_1 = -\sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi - \varphi}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi - \varphi}{2}$$

Для проекций  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  имеем

$$\omega_x = \omega \cos \vartheta = W \sqrt{r/\mu} \cos \vartheta, \quad \omega_y = \omega \sin \vartheta = W \sqrt{r/\mu} \sin \vartheta, \quad \omega_z = 0 \quad (2.3)$$

В системе (2.1) удобно перейти к независимой переменной  $\vartheta$  согласно соотношению (1.3). Произведя замену переменных, получаем с учетом (2.3)

$$\frac{d\alpha}{d\vartheta} = \frac{i}{2} n e^{-i\vartheta} \beta, \quad \frac{d\beta}{d\vartheta} = \frac{i}{2} n e^{i\vartheta} \alpha \quad \left( n = \frac{Wr^2}{\mu} \right) \quad (2.4)$$

Здесь  $n$  — боковая перегрузка на высоте орбитального аппарата, которую будем считать постоянной в процессе маневра. Начальные условия системы (2.4) определяем, исходя из нулевых начальных значений эйлеровых углов при  $t = t_0$

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0 \quad \text{при } \vartheta = 0 \quad (2.5)$$

Система (2.4) приводится к одному линейному уравнению второго порядка относительно  $\alpha$ . Его решение при начальных условиях (2.5) имеет вид

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} \right) \exp \left[ \frac{i}{2} (-1 + \sqrt{n^2 + 1}) \vartheta \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} \right) \exp \left[ -\frac{i}{2} (1 + \sqrt{n^2 + 1}) \vartheta \right] \quad (2.6)$$

Продифференцировав (2.6) по  $\vartheta$  и подставив результат в первое уравнение системы (2.4), находим решение для  $\beta$

$$\beta = \frac{n}{2\sqrt{n^2 + 1}} \left\{ \exp \left[ \frac{i}{2} (1 + \sqrt{n^2 + 1}) \vartheta \right] - \exp \left[ \frac{i}{2} (1 - \sqrt{n^2 + 1}) \vartheta \right] \right\} \quad (2.7)$$

Выделяя действительные и мнимые части (2.6) и (2.7), имеем согласно (2.2)

$$\lambda_0 = \left( \cos^2 \tau + \frac{\sin^2 \tau}{n^2 + 1} \right)^{1/2} \cos \frac{2\rho_0 - \vartheta}{2}, \quad \lambda_1 = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} \sin \tau \cos \frac{\vartheta}{2} \quad (2.8)$$

$$\lambda_3 = \left( \cos^2 \tau + \frac{\sin^2 \tau}{n^2 + 1} \right)^{1/2} \sin \frac{2\rho_0 - \vartheta}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} \sin \tau \sin \frac{\vartheta}{2}$$

$$\tau = \frac{1}{2} \sqrt{n^2 + 1} \vartheta = \frac{\Omega}{2} \sqrt{n^2 + 1} (t - t_0), \quad \rho_0 = \text{arctg} \frac{\text{tg } \tau}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

Из (2.2) имеем

$$\lambda_0 = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi + \varphi}{2}, \quad \lambda_1 = \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi - \varphi}{2} \quad (2.9)$$

$$\lambda_3 = \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi + \varphi}{2}, \quad \lambda_2 = \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi - \varphi}{2}$$

Сравнивая выражения (2.8) с выражениями (2.9), заключаем

$$\psi + \varphi = 2\rho_0 - \vartheta, \quad \psi - \varphi = \vartheta, \quad \frac{\theta}{2} = \text{arc sin} \frac{n \sin \tau}{\sqrt{n^2 + 1}} \quad (2.10)$$

Следует отметить, что аналогичная формула для  $\theta$  получена в работе [4]. Из первых двух равенств системы (2.10) и (1.4) находим  $\psi = \rho_0, \varphi = \rho_0 - \vartheta, u = \rho_0$ .

Итак, имеем следующую группу формул (2.11)

$$\psi = u = \arctg \frac{\operatorname{tg} \tau}{\sqrt{n^2 + 1}}, \quad \theta = -2 \arcsin \frac{n \sin \tau}{\sqrt{n^2 + 1}}, \quad \tau = \frac{\Omega \sqrt{n^2 + 1}}{2} (t - t_0)$$

Формулы (2.11) определяют угловые координаты спутника в процессе маневра как с положительными, так и с отрицательными перегрузками. Однако нужно иметь в виду, что при  $n < 0$  отсчет углов  $\psi$ ,  $\theta$  и  $u$  производится относительно линии нисходящего узла. Анализ формул показывает, что в возмущенном движении наклонение оскулирующей орбиты к исходной плоскости не превышает значения, равного

$$\theta_1 = 2 \arcsin \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = 2 \arctg n \quad (2.12)$$

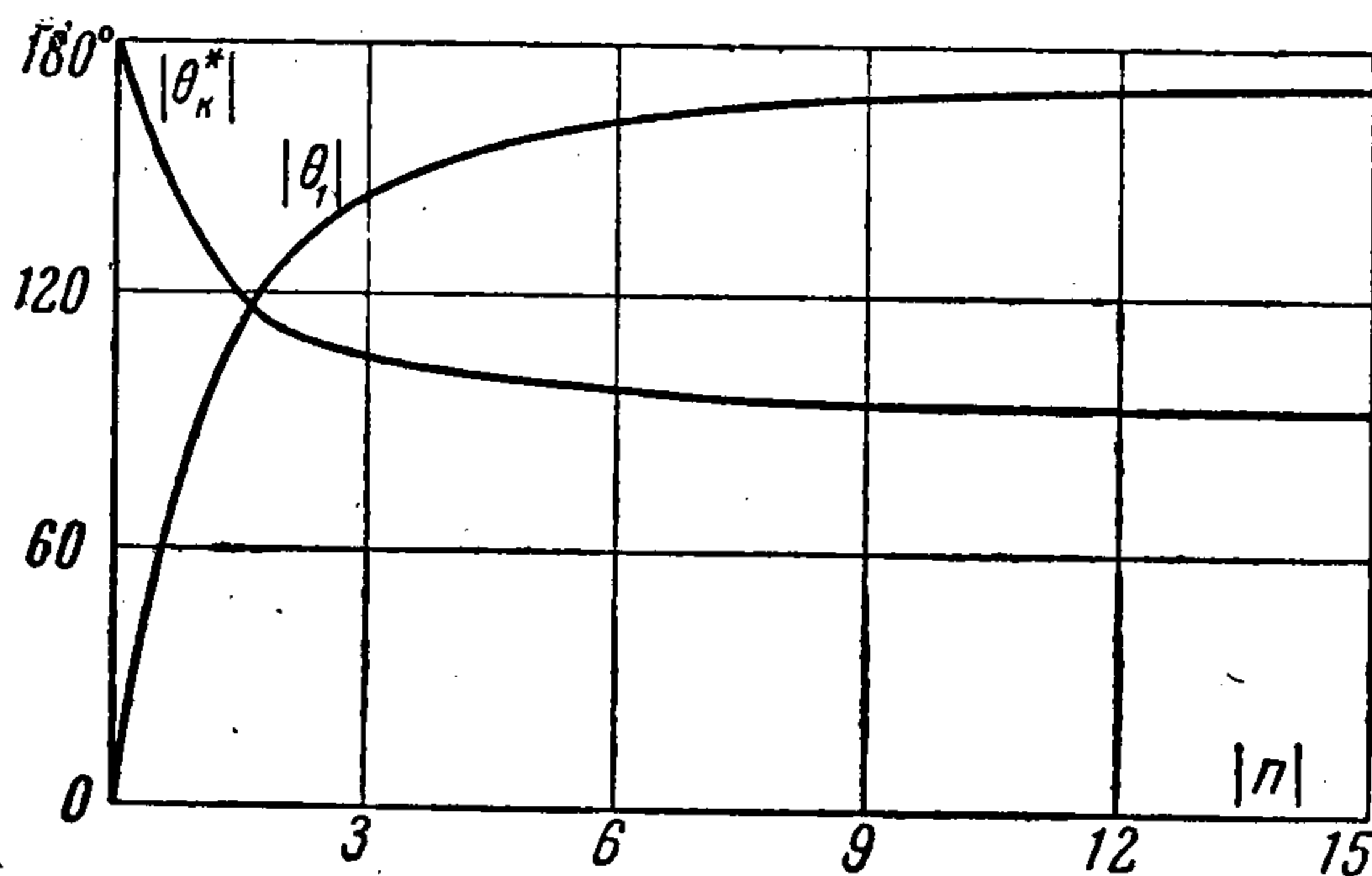
Из (2.12), в частности, следует, что поворот плоскости орбиты на угол  $\theta = \pi$  возможен только при бесконечно большом значении перегрузки  $n$  (импульсное приложение тяги).

Зависимость угла  $\theta_1$  от перегрузки показана на фиг. 2.

Максимальное наклонение  $\theta_1$  получается при  $\tau = \frac{1}{2} \pi$ . Ниже приведены значения всех переменных, соответствующие этому моменту

$$\theta = \theta_1 = 2 \arctg n, \quad \psi = u = \frac{\pi}{2}$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{\sqrt{n^2 + 1}} \quad \text{при} \quad \tau = \frac{\pi}{2}$$



Фиг. 2

В работах [4, 5] показано, что при рассматриваемом маневре возмущенная траектория орбитального аппарата находится в плоскости малого круга, наклоненной к плоскости невозмущенной орбиты под углом  $\theta_1 / 2 = \arctg n$ . При  $\tau = \frac{1}{2} \pi$  оскулирующая орбита касается возмущенной траектории в ее наивысшей по отношению к плоскости исходной орбиты точке.

3. Для получения угла поворота плоскости орбиты, большего, чем  $\theta_1 = 2 \arctg n$ , необходимо, как это следует из второго уравнения системы (1.1), сохранять знак произведения  $W \cos u$  постоянным, изменяя направление действия ускорения  $W$  на противоположное в моменты перехода  $\cos u$  через нуль. На целесообразность периодической перемены направления тяги на противоположное указывалось в целом ряде работ; здесь отметим [4, 6]. Применим метод, изложенный выше, для исследования маневра с переменной знака перегрузки. Рассмотрим участок возмущенной траектории, который спутник проходит со знаком постоянной перегрузкой после  $k$ -ой перемены знака  $n$ . Знак перегрузки на рассматриваемом участке определяется соотношением

$$\operatorname{sign} n \operatorname{sign} \theta = (-1)^k \quad \left( k = 1, \dots, m; m = \operatorname{ent} \frac{\pi}{2 \arctg |n|} \right)$$

Очевидно, что для рассматриваемого участка справедлива система (2.4). Начальными условиями ее являются значения параметров в момент  $k$ -ой перемены знака  $n$ . Значения всех переменных, соответствующие этому моменту, будем отмечать индексом  $k$ . Основываясь на результатах п. 2, можно установить

$$u_k = \frac{\pi}{2} + (k-1)\pi, \quad \tau_k = k \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta_k = \frac{k\pi}{\sqrt{n^2 + 1}} \quad (3.1)$$

$$\psi_k = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_k = 2k \arctg n(0), \quad \varphi_k = \frac{\pi}{2} + (k-1)\pi + \vartheta_k \quad (3.2)$$

Здесь  $n(0)$  — перегрузка в начале маневра.

Подставляя (3.2) в выражения (2.2), при  $\vartheta = \vartheta_k$  определяем

$$\alpha = \cos \frac{\vartheta_k}{2} \exp \left[ \frac{i}{2} (k\pi - \vartheta_k) \right], \quad \beta = -\sin \frac{\vartheta_k}{2} \exp \left[ -\frac{i}{2} (k\pi - \vartheta_k) \right] \quad (3.3)$$

Решим систему (2.4) при начальных условиях (3.3), находим (3.4)

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \cos \frac{\theta_k}{2} \left[ \cos^2 \left( \tau - k \frac{\pi}{2} \right) + \frac{(|n| \operatorname{tg} \Theta^{(k)} - 1)^2}{n^2 + 1} \sin^2 \left( \tau - k \frac{\pi}{2} \right) \right]^{1/2} \cos \left( k \frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2} - \rho \right) \\ \lambda_3 &= \cos \frac{\theta_k}{2} \left[ \cos^2 \left( \tau - k \frac{\pi}{2} \right) + \frac{(|n| \operatorname{tg} \Theta^{(k)} - 1)^2}{n^2 + 1} \sin^2 \left( \tau - k \frac{\pi}{2} \right) \right]^{1/2} \sin \left( k \frac{\pi}{2} + \frac{\vartheta}{2} - \rho \right) \\ \lambda_1 &= \sin \frac{\theta_k}{2} \left[ \cos^2 \left( \tau - k \frac{\pi}{2} \right) + \frac{(|n| \operatorname{ctg} \Theta^{(k)} + 1)^2}{n^2 + 1} \sin^2 \left( \tau - k \frac{\pi}{2} \right) \right]^{1/2} \cos \left( \varepsilon - k \frac{\pi}{2} + \frac{\vartheta}{2} \right) \\ \lambda_2 &= \sin \frac{\theta_k}{2} \left[ \cos^2 \left( \tau - k \frac{\pi}{2} \right) + \frac{(|n| \operatorname{ctg} \Theta^{(k)} + 1)^2}{n^2 + 1} \sin^2 \left( \tau - k \frac{\pi}{2} \right) \right]^{1/2} \sin \left( \varepsilon - k \frac{\pi}{2} + \frac{\vartheta}{2} \right)\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\rho &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[ \frac{|n| \operatorname{tg} \Theta^{(k)} - 1}{\sqrt{n^2 + 1}} \operatorname{tg} \left( \tau - k \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ \varepsilon &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[ \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{|n| \operatorname{ctg} \Theta^{(k)} + 1} \operatorname{ctg} \left( \tau - k \frac{\pi}{2} \right) \right]\end{aligned} \quad \left( \Theta^{(k)} = \frac{|\theta_k|}{2} \right) \quad (3.5)$$

Сравнивая выражения (3.4) с выражениями (2.9), заключаем

$$\psi + \varphi = k\pi - \vartheta - 2\rho, \quad \psi - \varphi = 2\varepsilon - k\pi + \vartheta \quad (3.6)$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\theta_k}{2} \left[ \cos^2 \left( \tau - k \frac{\pi}{2} \right) + \frac{(|n| \operatorname{ctg} \Theta^{(k)} + 1)^2}{n^2 + 1} \sin^2 \left( \tau - k \frac{\pi}{2} \right) \right]^{1/2} \quad (3.7)$$

Из системы (3.6) определяем

$$\psi = \varepsilon - \rho, \quad \varphi = k\pi - (\varepsilon + \rho) - \vartheta \quad \text{или} \quad u = k\pi - (\varepsilon + \rho)$$

Подставив сюда выражения (3.5), получаем окончательно

$$\psi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left\{ \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{|n| (\operatorname{tg} \Theta^{(k)} + \operatorname{ctg} \Theta^{(k)})} \left[ \frac{1 - n^2 + 2|n| \operatorname{ctg} 2\Theta^{(k)}}{n^2 + 1} \operatorname{tg} \left( \tau - k \frac{\pi}{2} \right) + \operatorname{ctg} \left( \tau - k \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\} \quad (3.8)$$

$$u = k\pi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left\{ \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{2(|n| \operatorname{ctg} 2\Theta^{(k)} + 1)} \left[ \frac{1 - n^2 + 2|n| \operatorname{ctg} 2\Theta^{(k)}}{n^2 + 1} \operatorname{tg} \left( \tau - k \frac{\pi}{2} \right) - \operatorname{ctg} \left( \tau - k \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\} \quad (3.9)$$

Формулы (3.7), (3.8), (3.9) определяют угловые координаты летательного аппарата на любом интервале времени, в течение которого перегрузка постоянна и в начале которого значения переменных удовлетворяют соотношениям (3.1), (3.2); когда маневр начинается с отрицательной перегрузкой ( $n(0) < 0$ ), углы  $\psi$ ,  $\theta$  и  $u$ , определяемые формулами, отсчитываются относительно линии нисходящего узла.

На фиг. 3 в качестве иллюстрации приведены зависимости углов  $\psi$ ,  $\theta$  и  $u$  от  $\tau$  в процессе маневра с перегрузкой  $|n| = 0.5$ . Начальный участок маневра просчитывался по формулам (2.11), последующие — по формулам (3.7), (3.8), (3.9).

Обратимся к формуле (3.7). Приведем ее к виду

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\theta_k}{2} \left\{ 1 + \frac{n^2}{n^2 + 1} \left[ \operatorname{ctg}^2 \frac{|\theta_k|}{2} + \frac{2}{|n|} \operatorname{ctg} \frac{|\theta_k|}{2} - 1 \right] \sin^2 \left( \tau - k \frac{\pi}{2} \right) \right\}^{1/2} \quad (3.10)$$

Из (3.10) следует, что рост угла  $\theta$  с увеличением  $\tau$  происходит до тех пор, пока квадратный трехчлен (в квадратных скобках) остается определенно-положительным. Положительный корень этого трехчлена, определяющий критическое значение  $\theta_k^*$  угла  $\theta_k$ , равен

$$\operatorname{ctg} \frac{|\theta_k^*|}{2} = \frac{-1 + \sqrt{n^2 + 1}}{|n|}, \quad \text{или} \quad |\theta_k^*| = \pi - \operatorname{arc} \operatorname{tg} |n| \quad (3.11)$$

При значениях  $|\theta_k| \geq |\theta_k^*|$  дальнейшее увеличение наклона оскулирующей орбиты невозможно. Как следует из (3.11), критическому случаю соответствует возмущенное движение спутника в плоскости малого круга, параллельного исходной плоскости.

При маневре, проиллюстрированном фиг. 3, значение  $\theta$  в момент третьей перемены знака перегрузки превышает критическое, поэтому при  $\tau > 270^\circ$  наблюдается уменьшение наклона оскулирующей орбиты.

Зависимость критического угла  $\theta_k^*$  от перегрузки представлена на фиг. 2.

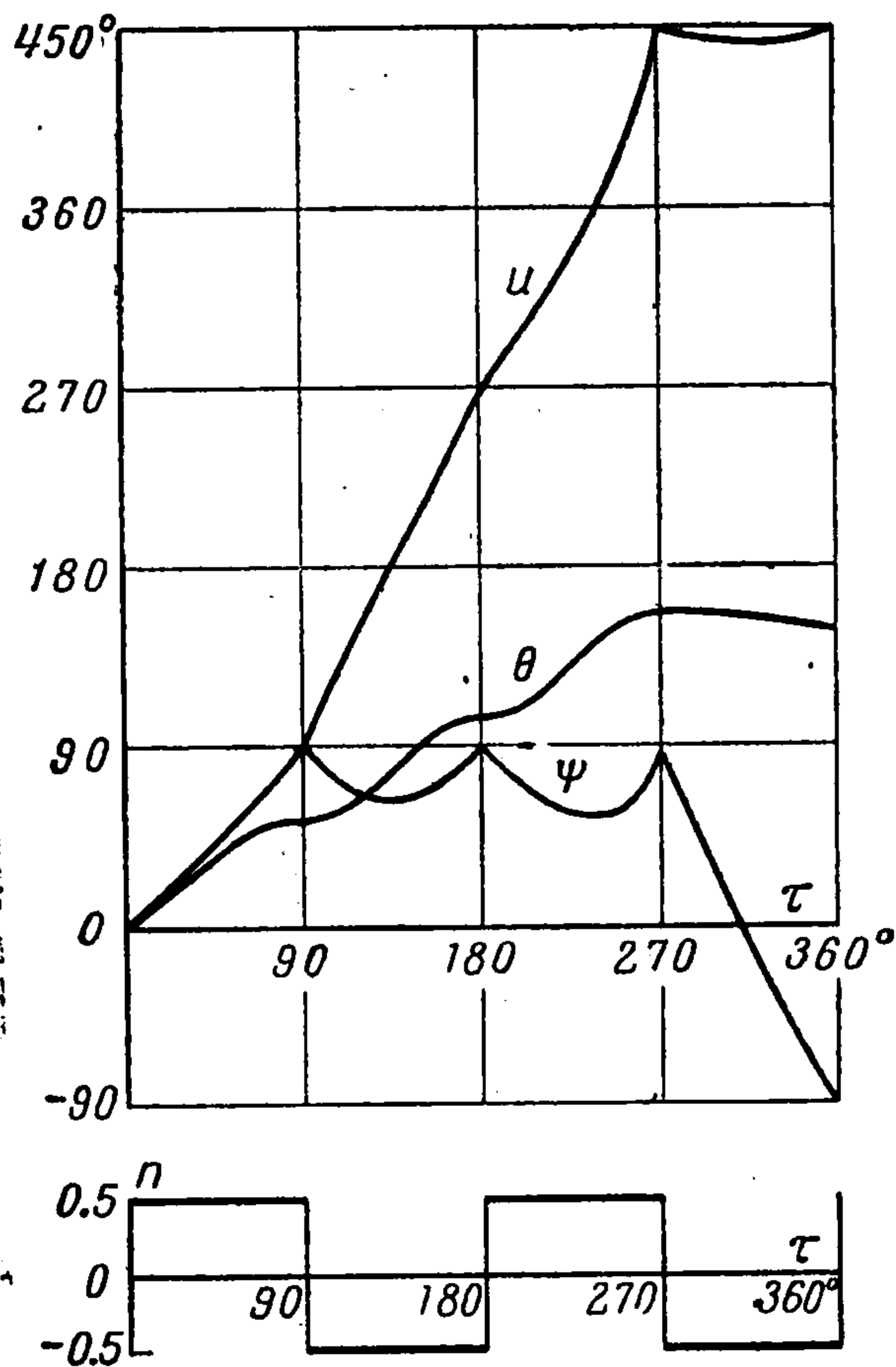
4. Проведенный анализ позволяет построить маневр перевода спутника из исходной плоскости в заданную. При выбранном значении боковой перегрузки управление маневром сводится к обеспечению требуемой продолжительности действия перегрузки и требуемого положения спутника на орбите в момент начала маневра.

Продолжительность маневра определяется при помощи формулы для  $\theta$ , исходя из значения параметра  $\tau$ , при котором достигается заданный угол между плоскостями. В случае маневра с изменением направления тяги на противоположное потребное значение  $\tau$  определяется в два приема. Сначала находится число  $k$  перемен знака перегрузки как целая часть отношения

$$\frac{\theta}{2 \arctg n(0)}$$

где  $\theta$  — заданное значение угла между плоскостями. Затем, после определения  $\theta_k$ , при помощи формулы (3.10) устанавливается потребное значение  $\tau$  и продолжительность маневра

$$t - t_0 = \frac{2\tau}{\Omega \sqrt{n^2 + 1}}$$



Фиг. 3

При известном значении  $\tau$  в конце маневра определяется уход линии узлов оскулирующей орбиты к концу активного участка относительно оси  $x$  исходной плоскости. Ось  $x$  совпадает с положением радиуса-вектора спутника в момент начала маневра, поэтому полученное значение угла  $\psi$  определяет требуемое положение спутника в момент  $t_0$  относительно заданной линии пересечения исходной и конечной плоскости орбиты.

В заключение отметим, что для обеспечения перпендикулярности вектора ускорения  $W$  к плоскости оскулирующей орбиты вектор тяги должен вращаться с угловой скоростью  $\omega = W \sqrt{r/\mu}$  вокруг радиуса-вектора спутника.

Поступила 16 XI 1962

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дубошин Г. Н. Введение в небесную механику. М.—Л., ОНТИ, 1938.
2. Охочимский Д. Е., Энеев Т. М., Таратынова Г. П. Определение времени существования искусственного спутника Земли и исследования вековых возмущений его орбиты. УФН, 1957, т. 63, № 1, стр. 36—37.
3. Лурье А. И. Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
4. Илларионов В. Ф., Шкадов Л. М. Поворот плоскости круговой орбиты спутника. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 1.
5. Lass Harry, Solloway Carleton B. Motion of a Satellite under the Influence of a Constant Normal Thrust. ARS Journal, 1962, vol. 32, № 1.
6. Rider L. Low Thrust Correction of Orbital Orientation. ARS Journal, 1960, vol. 30, № 7.