Можно доказать, что, как и в классическом случае [3], условия теоремы Штекеля будут необходимыми для представимости полного интеграла Леви в форме

$$\int dx \int_0^{z(x)} F(z, x) dz(x)$$

Применение теоремы Лиувилля, как и теоремы Штеккеля, непосредственно в данных формулировках, ограничено задачами, в которых потенциальная энергия системы не зависит от производной искомой функции по x. Как правило, это требование не выполняется, и следует, если это возможно, вводить такие обобщенные координаты, в которых оно соблюдается. Для бесконечной струны, например, такой координатой может служить трансформанта Фурье от искомой функции $z(x, y)$; соответственным образом определяется и канонически сопряженный импульс.

Поступила 14 I 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье К. А. О методе Гамильтона—Якоби в вариационных задачах с частными производными. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 2.
2. Свидзинский А. В. Криволинейный интеграл в функциональном пространстве. Изв. высш. учебн. завед., Математика, 1959, № 1 (8).
3. Лурье А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, М., 1961.

О МАКСИМАЛЬНОЙ ДЛИНЕ ПОЛЕТА РАКЕТЫ В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Г. Лейтманн (Калифорния, США)

Рассматривается оптимальное управление тягой ракетного корабля для достижения максимальной длины полета в горизонтальной плоскости. Гравитационное ускорение постоянно; аэродинамическое сопротивление аппроксимируется параболической полярой [1]. Показано, что оптимальная программа управления тягой состоит не больше чем из трех режимов. Доказана единственность, т. е. глобальность максимума.

Уравнения движения имеют вид

$$\dot V + \frac{D}{m} + \frac{c\dot m}{m} = 0, \qquad \dot x - V = 0 \tag{1}$$

$$t = 0, \quad x = 0, \quad m = m_1, \quad V = V_1; \qquad t = t_2, \quad m = m_2, \quad V = V_2, \quad x(t_2) = \max$$

Здесь g — ускорение силы тяжести (постоянно), m — масса, x — пройденный путь V — скорость, D — сопротивление, c — скорость истечения (постоянная).

Параболическую поляру сопротивления принимаем в виде

$$D = AV^2 + BL^2 \qquad (L = mg, A = \text{const}, \ B = \text{const}) \tag{2}$$

Здесь L — подъемная сила. Тяговую силу $T = -c\dot m$ считаем ограниченной

$$0 \leqslant -c\dot m \leqslant T_{\max} \tag{3}$$

и притом так, что $T_{\max}$ достаточно велико:

$$T_{\max} \geqslant D_{\max} \tag{4}$$

В безразмерных переменных

$$\tau = \frac{g}{c} t, \qquad \xi = \frac{g}{c^2} x, \qquad \mu = \frac{m}{m_1}, \qquad v = \frac{V}{c} \tag{5}$$

уравнения движения принимают вид

$$v' + \frac{D(\mu, v)}{\mu} - \frac{\beta}{\mu} = 0, \qquad \xi' - v = 0, \qquad \mu' + \beta = 0 \tag{6}$$

$$\tau = 0, \quad \xi = 0, \quad \mu = 1, \quad v = v_1 \qquad \tau = \tau_2, \quad \mu = \mu_2, \quad v = v_2, \quad \xi(\tau_2) = \max$$

---

[1] Эта же задача рассматривалась ранее [1] для сопротивления в виде

$$D = AV^2 + BL^2 / V^2 \qquad (A, B = \text{const})$$

«Особая» часть решения найдена также в работе [2].

Здесь
$$D = \frac{Ac^2}{m_1 g} v^2 + B m_1 g \mu^2 = a v^2 + b \mu^2 \qquad (7)$$

Штрихи означают дифференцирование по безразмерному времени. Неравенство (3) принимает вид
$$0 \leqslant \beta \leqslant \beta_{\max} \qquad (8)$$

Задача состоит в определении оптимальной тяги $\beta(\tau)$ так, чтобы $\xi(\tau_2)$ было максимальным, т. е. величина $G = -\xi(\tau_2)$ была бы минимумом [3, 4].

1°. *Присоединенные уравнения*
$$\lambda_v' - \lambda_v \frac{D_v}{\mu} + \lambda_\xi = 0, \qquad \lambda_\xi' = 0, \qquad \lambda_\mu' + \lambda_v \left(\frac{D-\beta}{\mu^2} - \frac{D_\mu}{\mu}\right) = 0 \qquad (9)$$

2. *Оптимальное управление*
$$\max_\beta H, \qquad H = \lambda_v v' + \lambda_\xi \xi' + \lambda_\mu \mu' = \beta\left(\frac{\lambda_v}{\mu} - \lambda_\mu\right) - \lambda_v \frac{D}{\mu} + \lambda_\xi v \qquad (10)$$

Функция H линейная относительно β; функция переключения имеет вид
$$K \equiv \frac{\lambda_v}{\mu} - \lambda_\mu \qquad (11)$$
так что
$$\beta = \beta_{\max} \text{ при } K > 0, \qquad \beta = 0 \text{ при } K < 0, \qquad \beta = \beta(\tau) \text{ при } K \equiv 0 \qquad (12)$$

«Особая» дуга $K \equiv 0$ будет допустимой, если будет допустимой соответствующая функция $\beta(\tau)$, т. е. будет удовлетворяться условие (8).

3. *Условие трансверсальности*
$$-d\xi(\tau_2) + [\lambda_v\, dv + \lambda_\xi d\xi + \lambda_\mu d_\mu - H\, d\tau]_1^2 = 0 \qquad (13)$$

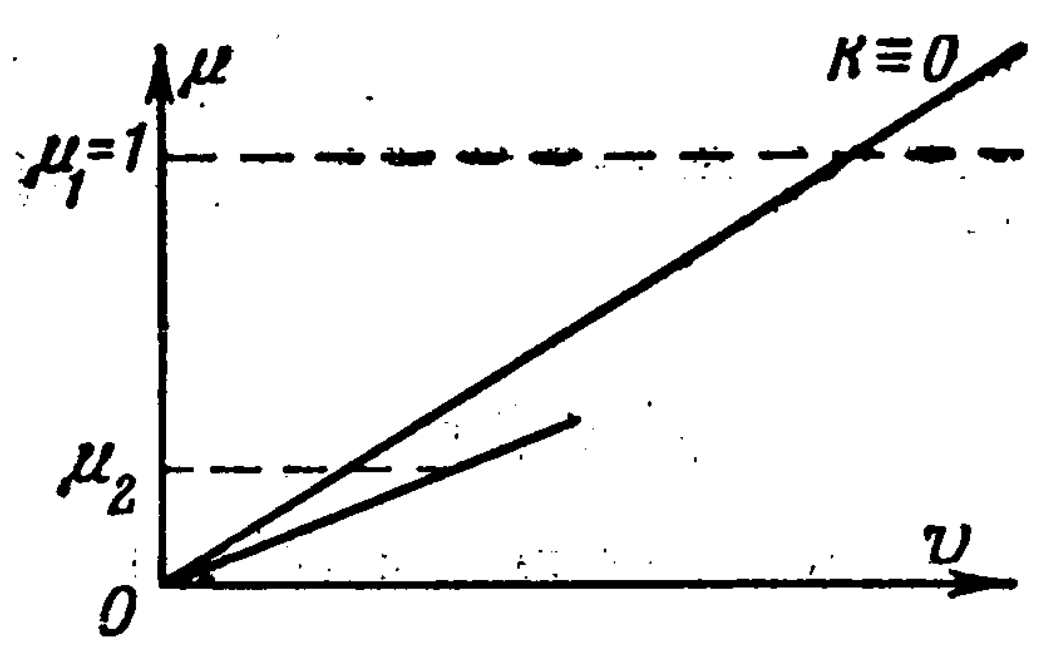
В силу граничных условий имеем
$$d\xi(0) = dv(0) = dv(\tau_2) = d\mu(0) = d\mu(\tau_2) = d\tau_1 = 0 \qquad (14)$$
так что
$$\lambda_\xi(\tau_2) = 1, \qquad H(\tau_2) = 0 \qquad (15)$$

4. *Первый интеграл.* Так как уравнения (6) автономны, а функция H непрерывна, то
$$H \equiv 0 \qquad (16)$$
представляет собой первый интеграл; он может заменить любое из присоединенных уравнений (9).

5. *Условия в угловых точках*: функции H и λ_i — непрерывны.

6. *Синтез оптимального управления.* Первоначально исследуем «особое» решение $K \equiv 0$. Для этого решения имеем также
$$K' = 0 \qquad (17)$$

Дифференцируя теперь K и используя (7) при $K = 0$, а именно
$$-\lambda_v \frac{1}{\mu D} + \lambda_\xi v = 0 \qquad (18)$$
а также первое равенство (15) и (9) получим
$$K' = \frac{v}{\mu} - \frac{1}{\mu} + \frac{v}{\mu}\frac{D_v}{D} - \frac{D_\mu}{D} \qquad (19)$$



Фиг. 1

Для сопротивления в виде (6) имеем
$$K' = \frac{D}{\mu}(v + 1)(av^2 - b\mu^2) \qquad (20)$$

Таким образом для $v > 0$ из (17) найдем
$$\mu = \sqrt{a/b}\; v \qquad (21)$$

Это решение представлено на фиг. 1. В силу принятого предположения (4)

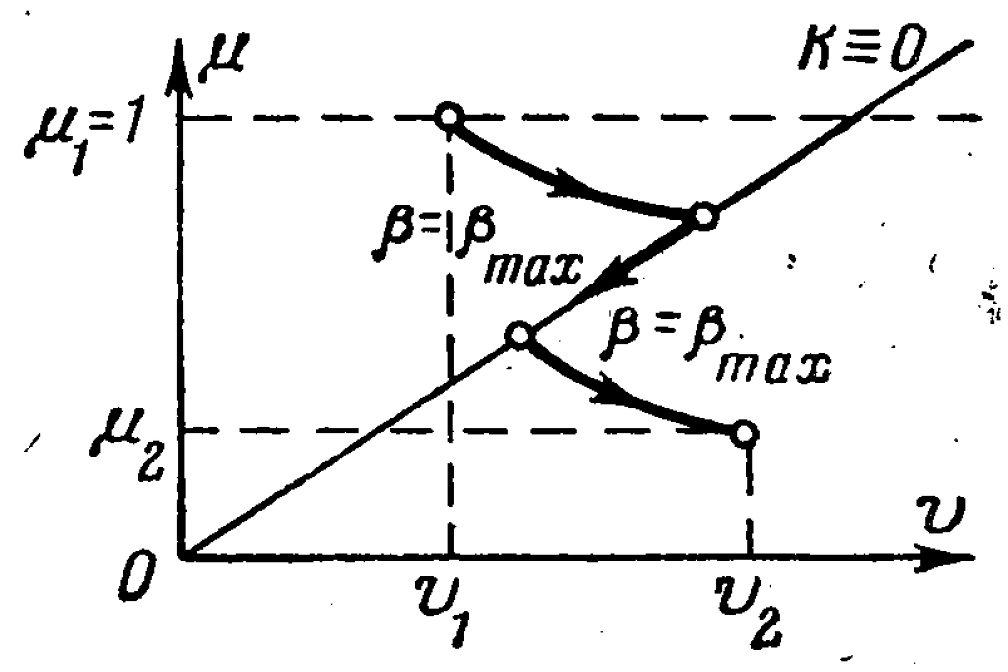
$$\beta_{\max} \geqslant D_{\max} \qquad (22)$$

Особое решение, конечно, удовлетворяет неравенству (8), так как

$$\mu' = -\beta = \sqrt{\frac{a}{b}}\, v' = \sqrt{\frac{a}{b}}\, \frac{\beta - D}{\mu} \qquad (23)$$

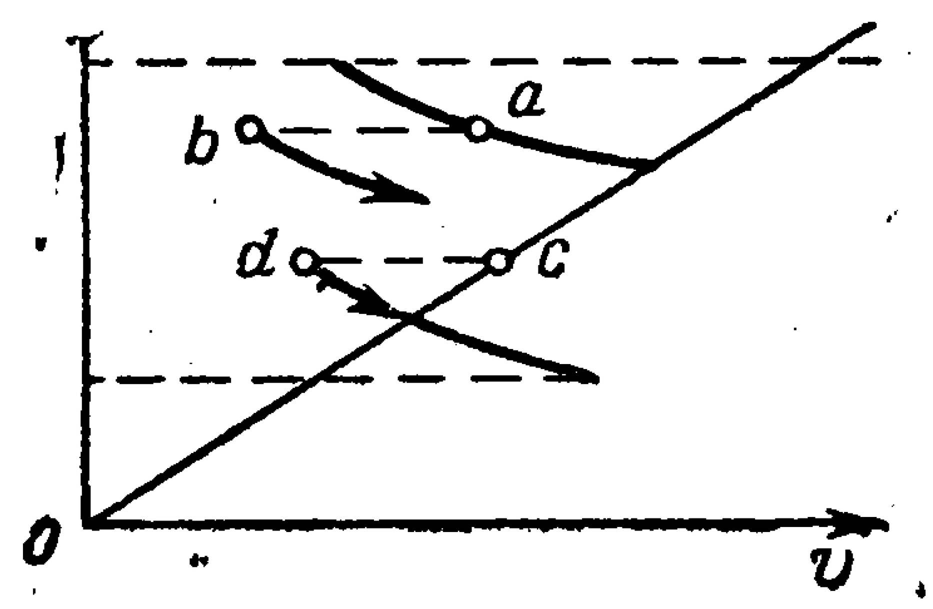
и следовательно

$$0 < \beta = \left(\mu + \sqrt{\frac{a}{b}}\right)^{-1} D \leqslant \beta_{\max} \qquad (24)$$



Фиг. 2

Граничные условия могут быть таковы, что начальная и конечная точки будут лежать либо левее, либо правее «особой» дуги $K \equiv 0$. На фиг. 2 представлен один из таких случаев вместе с «граничными дугами», соединяющими «особую» дугу с концевыми точками. Можно полагать, что это есть решение; однако, нужно показать, что оно единственное из допустимых. На фиг. 3 приведены другие возможности; легко показать, что эти решения не будут допустимыми.



Фиг. 3

Действительно в угловых точках в силу непрерывности $K = 0$. Следовательно, в угловых точках a и b имеем

$$a) \qquad K' < 0, \quad \text{или} \quad av^2 - b\mu^2 < 0 \qquad (25)$$

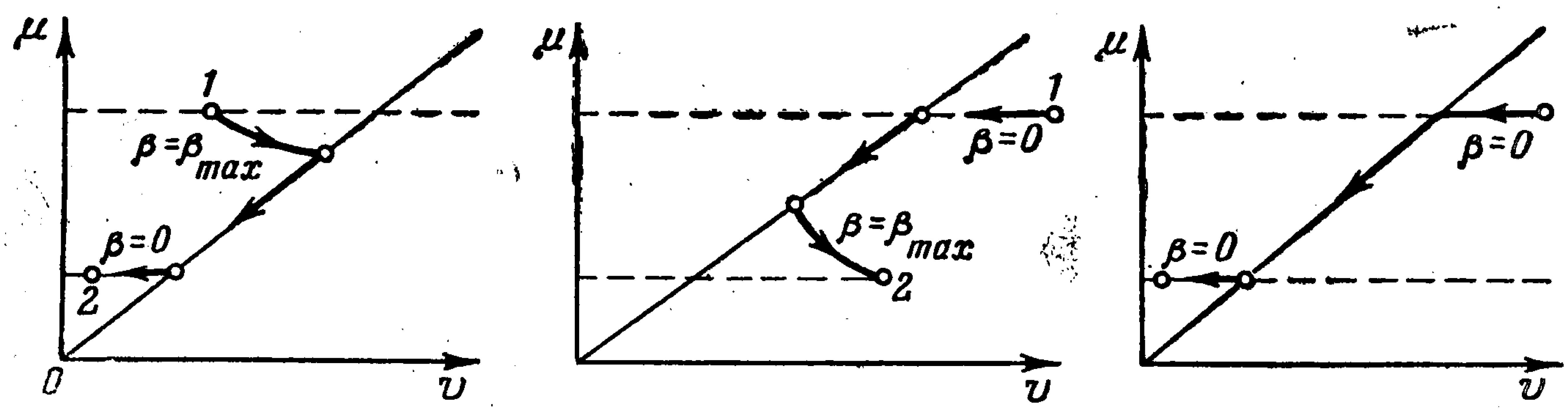
$$b) \qquad K' > 0, \quad \text{или} \quad av^2 - b\mu^2 > 0 \qquad (26)$$

Но

$$\mu(a) = \mu(b), \qquad v(a) > v(b) \qquad (27)$$

Последнее противоречит (25) и (26). Аналогичное рассуждение можно провести в отношении угловых точек c и d, а также в отношении других угловых точек.

Наконец, на фиг. 4 показано решение для других граничных условий.



Фиг. 4

В заключение заметим, что полученное решение состоит не больше чем из трех режимов. Так как решение для локального максимума единственно, то оно приводит к глобальному максимуму (см. [5] гл. 3).

Поступила 25 I 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Hibbs A. R. Optimum Burning Program for Horizontal Flight. J. Amer. Rocket Soc., 1952, 22, p. 204.
2. Ross S. Minimality for Problems in Vertical and Horizontal Rocket Flight. Jet Prop., 1958, 28, p. 55.
3. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
4. Leitmann G. An Elementary Derivation of the Optimal Control Conditions. 12th Int. Astronaut. Cong., Washington, 1961.
5. Miele A. Chapter 3 of Optimization Techniques, ed. G. Leitmann, Academic Press, 1962.