ТЕОРЕМЫ ЛИУВИЛЛЯ И ШТЕККЕЛЯ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

К. А. Лурье (Ленинград)

В работе [1] было показано, что метод Гамильтона — Якоби интегрирования канонической системы допускает распространение на случай гиперболических вариационных проблем. Ниже рассматривается обобщение известных условий интегрируемости уравнения Гамильтона — Якоби, а именно, теорем Лиувилля и Штеккеля.

1. Обобщенная теорема Лиувилля. Пусть кинетическая и потенциальная энергии системы (Лиувилля) имеют соответственно вид

$$T = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} A(z, x)\,dx \int_{x_0}^{x_1} B(z, x)\, z_y^2\, dx, \qquad \pi = \left[\int_{x_0}^{x_1} A(z, x)\,dx\right]^{-1} \int_{x_0}^{x_1} \Pi(z, x)\,dx \tag{1.1}$$

Тогда уравнение Гамильтона — Якоби [1]

$$\frac{\partial S}{\partial y} + H\left(z;\ \frac{\delta S}{\delta z}\right) = 0 \tag{1.2}$$

интегрируется в квадратурах.

Доказательство. Для системы Лиувилля канонический импульс q равен

$$q = \frac{\delta(T - \pi)}{\delta z_y} = B(z, x)\, z_y \int_{x_0}^{x_1} A(z, x)\,dx \tag{1.3}$$

Отсюда

$$z_y = q\left[B(z, x)\int_{x_0}^{x_1} A(z, x)\,dx\right]^{-1} \tag{1.4}$$

По функционалу

$$H = \frac{1}{2}\left(\int_{x_0}^{x_1} A(z, x)\,dx\right)^{-1} \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{q^2}{B(z, x)} + 2\Pi(z, x)\right] dx$$

составляем уравнение Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\int_{x_0}^{x_1} A(z, x)\,dx\right)^{-1} \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{1}{B(z, x)}\left(\frac{\delta S}{\delta z}\right)^2 + 2\Pi(z, x)\right] dx = 0 \tag{1.5}$$

Разыскиваем функционал S в виде

$$S = W - Ey \qquad (E = \text{const}) \tag{1.6}$$

Это возможно, так как H не зависит явно от y. Для W получаем уравнение

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{1}{B(z, x)}\left(\frac{\delta W}{\delta z}\right)^2 + 2\left(\Pi(z, x) - EA(z, x)\right)\right] dx = 0 \tag{1.7}$$

Получаем уравнение в функциональных производных [1]

$$\left(\frac{\delta W}{\delta z}\right)^2 = -2B(z, x)\left[\Pi(z, x) - EA(z, x) - \sigma(x)\right] \tag{1.8}$$

---

[1] То обстоятельство, что в уравнение (1.7) кроме $\delta W / \delta z$ входят функции от z, x, позволяет искать W в виде

$$\int_{x_0}^{x_1} w(z, x)\,dx$$

где w — функция своих аргументов. При этом $\delta W / \delta z = \partial w / \partial z$; обращение в нуль интеграла (1.7) должно быть тождественным относительно z. Отсюда заключаем, что подынтегральное выражение не зависит от z, значит, оно есть функция от x, откуда и следует (1.8).

при добавочном условии

$$\int_{x_0}^{x_1} \sigma(x)\, dx = 0 \tag{1.9}$$

Функционал W определится из (1.8) в форме функционального интеграла

$$W = \int dx \int_0^{z(x)} \sqrt{2B(z, x)\,[EA(z, x) + \sigma(x) - \Pi(z, x)]}\, dz(x) \tag{1.10}$$

Очевидно, что условие симметричности будет выполнено

$$\frac{\delta}{\delta z(\xi)} \sqrt{2B(z, \eta)\,[EA(z, \eta) + \sigma(\eta) - \Pi(z, \eta)]} =$$

$$= \frac{\delta}{\delta z(\eta)} \sqrt{2B(z, \xi)\,[EA(z, \xi) + \sigma(\xi) - \Pi(z, \xi)]} \tag{1.11}$$

Поэтому функциональный интеграл (1.10) сводится к обычному [2]; получаем [1]

$$W = \int dx \int_0^1 \sqrt{2B(zt, x)\,[EA(zt, x) + \sigma(x) - \Pi(zt, x)]}\, zdt \tag{1.12}$$

Варьируя функционал $S = W - Ey$ по σ и z, придем, согласно теореме Якоби [1], к конечным уравнениям движения.

2. Обобщенная теорема Штеккеля. Как и в классическом случае, теорема Лиувилля есть частный случай более общего результата; именно, справедлива обобщенная теорема Штеккеля. Пусть кинетическая и потенциальная энергии системы (Штеккеля) заданы:

$$T = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} \frac{z_y^2\, dx}{\psi\,[z, x]}, \qquad \pi = \int_{x_0}^{x_1} \psi\,[z, x]\,\Pi(z, x)\, dx$$

где $\psi\,[z, x]$ — функционал; введем функцию $\varphi(z, x; \zeta)$ соотношением

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(z, x; \zeta)\,\psi\,[z, x]\, dx = \begin{cases} 0 & (x_0 \leqslant \zeta < x_1) \\ 1 & (\zeta = x_1) \end{cases} \tag{2.1}$$

Тогда уравнение Гамильтона — Якоби интегрируется в квадратурах. Записывая полный интеграл Леви в форме (1.6), придем, как и выше, к уравнению типа (1.7)

$$\int_{x_0}^{x_1} \psi\,[z; x] \left\{\frac{1}{2} q^2\,[z; x] + \Pi(z, x)\right\} dx = E$$

Имея в виду условие (2.1), найдем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\delta W}{\delta z}\right)^2 = -\,\Pi(z, x) + \int_{x_0}^{x_1} \rho(\zeta)\,\varphi(z, x; \zeta)\, d\zeta + E\varphi(z, x; x_1)$$

где $\rho(\zeta)$ — параметрическая функция [1]. Правая часть последнего уравнения представляет собой функцию (а не функционал) от z; как при доказательстве теоремы Лиувилля, находим, что функциональный интеграл

$$W = \int dx \int_0^{z(x)} \left(2\left[E\varphi(z, x; x_1) + \int_{x_0}^{x_1} \rho(\zeta)\,\varphi(z, x; \zeta)\, d\zeta - \Pi(z, x)\right]\right)^{1/2} dz(x)$$

сводится к обычному.

Для полноты доказательства этой теоремы (как, впрочем, и предыдущей) следует убедиться в том, что полученное выше решение уравнения Гамильтона — Якоби будет полным интегралом Леви. С этой целью проще всего обратиться к конечномерным аналогам проделанных действий, где сделанное утверждение несомненно; переход к пределу «бесконечного числа степеней свободы» завершит доказательство.

---

[1] Этот результат легко было предвидеть (см. сноску в предыдущем разделе).

Можно доказать, что, как и в классическом случае [3], условия теоремы Штеккеля будут необходимыми для представимости полного интеграла Леви в форме

$$\int dx \int_0^{z(x)} F(z, x)dz(x)$$

Применение теоремы Лиувилля, как и теоремы Штеккеля, непосредственно в данных формулировках, ограничено задачами, в которых потенциальная энергия системы не зависит от производной искомой функции по x. Как правило, это требование не выполняется, и следует, если это возможно, вводить такие обобщенные координаты, в которых оно соблюдается. Для бесконечной струны, например, такой координатой может служить трансформанта Фурье от искомой функции $z(x, y)$; соответственным образом определяется и канонически сопряженный импульс.

Поступила 14 I 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье К. А. О методе Гамильтона—Якоби в вариационных задачах с частными производными. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 2.
2. Свидзинский А. В. Криволинейный интеграл в функциональном пространстве. Изв. высш. учебн. завед., Математика, 1959, № 1 (8).
3. Лурье А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, М., 1961.

О МАКСИМАЛЬНОЙ ДЛИНЕ ПОЛЕТА РАКЕТЫ В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Г. Лейтманн (Калифорния, США)

Рассматривается оптимальное управление тягой ракетного корабля для достижения максимальной длины полета в горизонтальной плоскости. Гравитационное ускорение постоянно; аэродинамическое сопротивление аппроксимируется параболической полярой [1]. Показано, что оптимальная программа управления тягой состоит не больше чем из трех режимов. Доказана единственность, т. е. глобальность максимума.

Уравнения движения имеют вид

$$\dot V + \frac{D}{m} + \frac{c\dot m}{m} = 0, \qquad \dot x - V = 0 \tag{1}$$

$$t = 0, \quad x = 0, \quad m = m_1, \quad V = V_1; \qquad t = t_2, \quad m = m_2, \quad V = V_2, \quad x(t_2) = \max$$

Здесь g — ускорение силы тяжести (постоянно), m — масса, x — пройденный путь V — скорость, D — сопротивление, c — скорость истечения (постоянная).

Параболическую поляру сопротивления принимаем в виде

$$D = AV^2 + BL^2 \qquad (L = mg, A = \text{const}, \ B = \text{const}) \tag{2}$$

Здесь L — подъемная сила. Тяговую силу $T = -c\dot m$ считаем ограниченной

$$0 \leqslant -c\dot m \leqslant T_{\max} \tag{3}$$

и притом так, что $T_{\max}$ достаточно велико:

$$T_{\max} \geqslant D_{\max} \tag{4}$$

В безразмерных переменных

$$\tau = \frac{g}{c}t, \qquad \xi = \frac{g}{c^2}x, \qquad \mu = \frac{m}{m_1}, \qquad v = \frac{V}{c} \tag{5}$$

уравнения движения принимают вид

$$v' + \frac{D(\mu, v)}{\mu} - \frac{\beta}{\mu} = 0, \qquad \xi' - v = 0, \qquad \mu' + \beta = 0 \tag{6}$$

$$\tau = 0, \quad \xi = 0, \quad \mu = 1, \quad v = v_1 \qquad \tau = \tau_2, \quad \mu = \mu_2, \quad v = v_2, \quad \xi(\tau_2) = \max$$

---

[1] Эта же задача рассматривалась ранее [1] для сопротивления в виде

$$D = AV^2 + BL^2 / V^2 \qquad (A, B = \text{const})$$

«Особая» часть решения найдена также в работе [2].