О СХОДИМОСТИ РЯДОВ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТЕЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

К. Г. Валеев (Ленинград)

1. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (\lambda - \mu a(t))\, y = 0 \tag{1.1}$$

Здесь $a(t)$ — вещественная периодическая функция t периода π определяется разложением

$$a(t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_s e^{2ist}, \qquad a_{-s} = \bar{a}_s, \qquad \operatorname{Im} a_0 = 0 \tag{1.2}$$

Предположим, что методом малого параметра ([1], стр. 321) найдены несколько первых членов разложений, определяющих границу области неустойчивости на плоскости параметров μ, λ, где $\lambda_{n1}(\mu) \geqslant \lambda_{n2}(\mu)$

$$\begin{aligned} \lambda_{n1}(\mu) &= n^2 + \mu b_1 + \mu^2 b_2 + \ldots + \mu^r b_r + \varepsilon_1(\mu) \\ \lambda_{n2}(\mu) &= n^2 + \mu c_1 + \mu^2 c_2 + \ldots + \mu^r c_r + \varepsilon_2(\mu) \end{aligned} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.3}$$

попытаемся получить оценки функций $\varepsilon_1(\mu)$, $\varepsilon_2(\mu)$ в зависимости от коэффициентов a_s ряда Фурье (1.2) и уже известных коэффициентов b_s, c_s разложений (1.3).

2. На границе области неустойчивости уравнения (1.1) существует периодическое решение периода 2π вида [1]

$$y = e^{nit} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2ikt} y_k \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в уравнение (1.1), находим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для отыскания величин y_k

$$[\lambda - (n + 2k)^2]\, y_k - \mu \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_{k-s} y_s = 0 \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{2.2}$$

Условие существования ненулевого периодического решения уравнения (1.1) периода 2π дает уравнение, определяющее границу области неустойчивости. В явном виде это условие можно получить, если приравнять нулю бесконечный определитель Хилла. Последний можно преобразовать в определитель конечного порядка [2]. Более естественным представляется способ ([3], стр. 164—168), уже использованный для уравнения (1.1) в [4]. Этот способ применяется ниже и приводит к уравнению, совпадающему с уравнением в работе [2].

Исключим временно из рассмотрения два уравнения (2.2) при $k = 0, -n$ (при $n = 0$ исключаем только одно уравнение при $k = 0$). Величины y_k ($k \neq 0, -n$) выразим через комплексно-сопряженные величины y_0, y_{-n}. Полученные выражения для y_k ($k \neq 0, -n$) подставим в оставшиеся два уравнения (при $n = 0$ одно уравнение) для отыскания y_0, y_{-n}. Условие существования ненулевого решения y_0 определит границу области неустойчивости.

3. Рассмотрим нулевую область неустойчивости $n = 0$. Введем обозначение

$$d_n(k) = [\lambda + (n + 2k)^2]^{-1} \tag{3.1}$$

Уравнения (2.2) при $k \neq 0$ можно записать в виде

$$y_k = \mu \sum_{s=-\infty}^{\infty}{}' d_0(k)\, a_{k-s} y_s + \mu d_0(k)\, a_k y_0 \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{3.2}$$

Штрих в сумме здесь и далее обозначает, что при суммировании выпускаются слагаемые, соответствующие значению индексов $0, -n$ (здесь $-n = 0$).

Методом последовательных приближений ([3], стр. 160) получаем

$$y_k = \left[\mu d_0(k)\, a_k + \mu^2 \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty}{}' d_0(k)\, a_{k-\alpha}\, d_0(\alpha)\, a_k + \ldots\right] y_0 \tag{3.3}$$

Подставляя (3.3) в (2.2) при $k = 0$ и сокращая на $y_0 \neq 0$, получим

$$\lambda = \mu a_0 + \mu^2 \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty}{}' a_{-\alpha}\, d_0(\alpha)\, a_\alpha + \mu^3 \sum_{\alpha,\,\beta=-\infty}^{\infty}{}' a_{-\alpha}\, d_0(\alpha)\, a_{\alpha-\beta}\, d_0(\beta)\, a_\beta +$$

$$+ \mu^4 \sum_{\alpha,\,\beta,\,\gamma=-\infty}^{\infty}{}' a_{-\alpha}\, d_0(\alpha)\, a_{\alpha-\beta}\, d_0(\beta)\, a_{\beta-\gamma}\, d_0(\gamma)\, a_\gamma + \ldots \equiv \Psi(\mu, \lambda) \tag{3.4}$$

4. Из уравнения (3.4) можно получить $\lambda_0(\mu)$ в виде ряда по степеням μ. Построим мажорантный ряд для правой части $\Psi(\mu, \lambda)$ уравнения (3.4) работы [5].

Пусть ряд для $f_1(\mu)$ по степеням μ (или ряд для $\varphi_1(\mu, \lambda)$ по степеням μ, λ) мажорируется рядом для $f_2(\mu)$ (или $\varphi_2(\mu, \lambda)$). Будем это обозначать так:

$$f_1(\mu) \ll f_2(\mu), \qquad \varphi_1(\mu, \lambda) \ll \varphi_2(\mu, \lambda) \tag{4.1}$$

Введем обозначения

$$\gamma_1 = \sum_{\substack{s=-\infty \\ s\neq 0}}^{\infty} |a_s|, \qquad \gamma_2 = \max_s |a_s|, \qquad q(\lambda) = (4-\lambda)^{-1} \tag{4.2}$$

При $|\lambda| < 4$ получим для $d_0(k)$ (3.1)

$$d_0(k) \equiv (\lambda - 4k^2)^{-1} \ll (4-\lambda)^{-1} = q(\lambda) \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{4.3}$$

Если рассмотреть систему уравнений (3.2) в линейном нормированном пространстве m, то система уравнений (3.2) будет вполне регулярной ([3], стр. 67, 167) при $\mu\gamma_1 q(\lambda) < 1$. При этом правая часть (3.4) $\Psi(\mu, \lambda)$ мажорируется рядом

$$\Psi(\mu, \lambda) \ll \mu\gamma_2 + \mu\gamma_2(\mu\gamma_1 q) + \mu\gamma_2(\mu\gamma_1 q)^2 + \ldots = \mu\gamma_2(1-\mu\gamma_1 q)^{-1} \tag{4.4}$$

Решая относительно λ уравнение

$$\lambda = \mu\gamma_2\,[1 - \mu\gamma_1(4-\lambda)^{-1}]^{-1} \tag{4.5}$$

получим функцию $\lambda(\mu)$, мажорирующую [5] решение $\lambda_0(\mu)$ уравнения (3.4)

$$\lambda(\mu) = 2 + 0.5\mu(\gamma_2 - \gamma_1) - \sqrt{4 - 2\mu(\gamma_1+\gamma_2) + 0.25\mu^2(\gamma_1-\gamma_2)^2} =$$

$$= 2 + 0.5\mu(\gamma_2-\gamma_1) - 2\sqrt{[1 - 0.25\mu(\sqrt{\gamma_1}+\sqrt{\gamma_2})^2]\,[1 - 0.25\mu(\sqrt{\gamma_1}-\sqrt{\gamma_2})^2]} \tag{4.6}$$

Введем обозначения, использующие величины γ_1, γ_2 определение (4.2)

$$h_1 = 0.25(\sqrt{\gamma_1}+\sqrt{\gamma_2})^2, \qquad h_2 = 0.25(\sqrt{\gamma_1}-\sqrt{\gamma_2})^2 \tag{4.7}$$

Легко проверяется мажорирование

$$\sqrt{(1-h_1\mu)(1-h_2\mu)} \ll (1-h_1\mu)^{-1}(1-h_2\mu)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{h_1-h_2}\left(\frac{h_1}{1-\mu h_2} - \frac{h_2}{1-\mu h_1}\right) = \frac{1}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k\,(h_1^{k+1} - h_2^{k+1}) \tag{4.8}$$

Вычисляя непосредственно в (4.6) коэффициенты при степенях μ^0, μ^1 и отбрасывая члены с h_2 в (4.8), получаем ряд, мажорирующий $\lambda_0(\mu)$ — решение уравнения (3.4)

$$\lambda_0(\mu) \ll \mu\gamma_2 + 2h_1(\gamma_1\gamma_2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=2}^{\infty} (\mu h_1)^k, \qquad h_1 = 0.25(\sqrt{\gamma_1}+\sqrt{\gamma_2})^2 \tag{4.9}$$

Окончательно получили теорему.

Теорема 4.1. Разложение функции $\lambda_0(\mu)$ по степеням μ, определяющее границу нулевой области неустойчивости ($\lambda_0(\mu) \to 0$ при $\mu \to 0$) решений уравнения (1.1), мажорируется рядом (4.9), который сходится при

$$|\mu| \leqslant \mu_1 \equiv h_1^{-1} \equiv 4\,(\sqrt{\gamma_1} + \sqrt{\gamma_2})^{-2} \tag{4.10}$$

Замечание 4.1. Так как $\gamma_1 > \gamma_2$ (4.2), то $h^{-1} > \gamma_1^{-1}$. Поэтому ряд, определяющий $\lambda_0(\mu)$, заведомо сходится при

$$|\mu| \leqslant \mu_2 \equiv \gamma_1^{-1} = \Big(\sum_{s=-\infty,\ s\neq 0}^{\infty} |a_s|\Big)^{-1} \tag{4.11}$$

Замечание 4.2. Введем в (3.4) новый параметр $\lambda' = \lambda - \mu a_0$; тогда можно построить другую мажорантную функцию для $\Psi(\mu, \lambda)$ (3.4), не содержащую членов $O(\mu)$. Это дает новое условие сходимости ряда, определяющего $\lambda_0(\mu)$

$$|\mu| < \mu_3 \equiv 4\gamma_1^{-1/2}(\sqrt{\gamma_1} + 2\sqrt{\gamma_2})^{-1}, \qquad \mu_3 > \mu_1 > \mu_2 \tag{4.12}$$

Замечание 4.3. Из сходимости разложений $\lambda_{n1}(\mu)$, $\lambda_{n2}(\mu)$ (1.3) следует сходимость разложений по степеням μ самих периодических решений уравнения (1.1).

Пример 4.1. Найдем условие сходимости ряда, определяющего $\lambda_0(\mu)$ — границу нулевой области неустойчивости уравнения Матье ([6], стр. 18, 25)

$$d^2y\,/\,dt^2 + (\lambda - 2\mu\cos 2t)\,y = 0 \tag{4.13}$$

Из (1.2) находим $a_1 = a_{-1} = 1$. Из (4.2), (4.10) — (4.12) находим

$$\gamma_1 = 2, \qquad \gamma_2 = 1, \qquad \mu_1 \approx 0.69, \qquad \mu_2 = 0.5, \qquad \mu_3 \approx 0.83 \tag{4.14}$$

Ряд для $\lambda_0(\mu)$ ([6], стр. 25)

$$\lambda_0(\mu) = -\frac{1}{2}\mu^2 + \frac{7}{128}\mu^4 - \frac{29}{2304}\mu^6 + \frac{68687}{18874368}\mu^8 + \ldots \tag{4.15}$$

заведомо сходится при $|\mu| < 0.83$.

Пример 4.2. Для дифференциального уравнения

$$d^2y\,/\,dt^2 + [\lambda + \mu\,(1 + 2\cos 2t + 4\cos 4t)]\,y = 0 \tag{4.16}$$

Методом малого параметра ([1], стр. 321) имеем

$$\lambda_0(\mu) = -\mu - \mu^2 + \varepsilon(\mu), \qquad \varepsilon(\mu) = O(\mu^3) \tag{4.17}$$

Из (4.2), (4.7), (1.2) находим (4.18)

$$a_0 = -1, \qquad a_1 = a_{-1} = -1, \qquad a_2 = a_{-2} = -2, \qquad \gamma_1 = 7, \qquad \gamma_2 = 2, \qquad h_1 \approx 4.07$$

Из (4.9) находим оценку для $\varepsilon(\mu)$ при $|\mu| < 0.245$

$$|\varepsilon(\mu)| < \frac{2h_1}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}} \sum_{k=3}^{\infty} (\mu h_1)^k \approx \frac{159\,\mu^3}{1 - 4.07\mu} \tag{4.19}$$

5. Рассмотрим случай $n \neq 0$; $n = 1, 2, \ldots$ Уравнения (2.2) примем в виде

$$y_k = \mu \sum_{s=-\infty}^{\infty}{}' d_n(k)\, a_{k-s}\, y_s + \mu d_n(k)\,(a_k y_0 + a_{k+n} y_{-n}) \tag{5.1}$$

Метод последовательных приближений [3] дает при $k \neq 0, -n$

$$y_k = \mu\Big[d_n(k)\, a_k + \mu \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty}{}' d_n(k)\, a_{k-\alpha}\, d_n(\alpha)\, a_\alpha + \ldots\Big] y_0 +$$
$$+ \mu\Big[d_n(k)\, a_{k+n} + \mu \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty}{}' d_n(k)\, a_{k-\alpha}\, d_n(\alpha)\, a_{\alpha+n} + \ldots\Big] y_{-n} \tag{5.2}$$

Подставляя y_k ($k \neq 0, -n$) из (5.2) в оставшиеся два уравнения (2.2) при $k = 0, -n$, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными y_0, y_{-n}

$$f_1(\mu, \lambda)\, y_0 + f_2(\mu, \lambda)\, y_{-n} = 0, \qquad \bar{f}_2(\mu, \lambda)\, y_0 + \bar{f}_1(\mu, \lambda)\, y_{-n} = 0 \tag{5.3}$$

Черта означает комплексную сопряженность, имеет вид функции f_1, f_2 имеют вид

$$f_1(\mu, \lambda) = \lambda - n^2 + \mu a_0 + \mu^2 \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty}{}' a_{-\alpha} d_n(\alpha) a_\alpha + \ldots$$
$$f_2(\mu, \lambda) = \mu a_n + \mu^2 \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty}{}' a_{-\alpha} d_n(\alpha) a_{\alpha+n} + \ldots \tag{5.4}$$

Условие существования ненулевого решения системы (5.3) дает уравнение границы

$$|f_1(\mu, \lambda)|^2 - |f_2(\mu, \lambda)|^2 = 0 \tag{5.5}$$

Считая λ, μ вещественными, введем обозначения при $\lambda = z + n^2$

$$\operatorname{Re} f_1(\mu, \lambda) = \lambda - n^2 + \mu a_0 + \mu^2 R_1(\mu, z), \qquad \operatorname{Im} f_1(\mu, \lambda) = \mu^2 R_2(\mu, z)$$
$$\operatorname{Re} f_2(\mu, \lambda) = \mu \operatorname{Re} a_n + \mu^2 R_3(\mu, z), \qquad \operatorname{Im} f_2(\mu, \lambda) = \mu \operatorname{Im} a_n + \mu^2 R_4(\mu, z) \tag{5.6}$$

Уравнение (5.5), разрешенное относительно $z = \lambda - n^2$, (5.7)

$$z = -\mu a_0 + \mu^2 R_1 \pm \sqrt{\mu^2 |a_n|^2 + 2\mu^3 (\operatorname{Re} a_n R_3 + \operatorname{Im} a_n R_4) + \mu^4 (R_3^2 + R_4^2 - R_2^2)}$$

Следует оценить область сходимости ряда, определяющего решение $\lambda_n(\mu)$ уравнения (5.7). Приведем вспомогательную лемму ([5], стр. 52).

Лемма 5.1. Пусть $z(\mu)$ — неявная функция μ, определяемая уравнением

$$z = g_{10}\mu + g_{20}\mu^2 + g_{11}\mu z + g_{02}z^2 + \ldots \equiv \Psi(\mu, z) \tag{5.8}$$

где правая часть $\Psi(\mu, z)$ — голоморфная и ограниченная функция при

$$|\mu| < r, \qquad |z| < \rho, \qquad |\Psi(\mu, z)| < M \tag{5.9}$$

В этом случае $z(\mu)$ определяется рядом, сходящимся при

$$|\mu| < r^* = r\rho^2 (\rho + 2M)^{-2} \tag{5.10}$$

и мажорируется при (5.10) рядом

$$\frac{\rho^2 (\rho + 2M)^2}{8M(\rho + M)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\mu}{r^*}\right)^k \gg z(\mu) \tag{5.11}$$

Доказательство. Решаем вспомогательное уравнение с правой частью мажорирующей $\Psi(\mu, z)$ ([5], стр. 52)

$$z = M(1 - \mu r^{-1})^{-1}(1 - z\rho^{-1})^{-1} - M - Mz\rho^{-1} \tag{5.12}$$

Из (5.12) имеем

$$z = \frac{\rho^2}{2(\rho + M)} \left\{1 - \left[1 - \frac{\mu}{r}\left(\frac{\rho + 2M}{\rho}\right)^2\right]^{1/2} \left[1 - \frac{\mu}{r}\right]^{-1/2}\right\} \ll$$
$$\ll \frac{\rho^2}{2(\rho + M)} \left\{\left[1 - \frac{\mu}{r}\left(\frac{\rho + 2M}{\rho}\right)^2\right]^{-1} \left[1 - \frac{\mu}{r}\right]^{-1} - 1\right\} \ll$$
$$\ll \frac{\rho^2 (\rho + 2M)^2}{8M(\rho + M)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\mu}{r}\right)^k \left(\frac{\rho + 2M}{\rho}\right)^{2k} \tag{5.13}$$

Утверждения леммы следуют из (5.13).

6. Рассмотрим случай $a_n \neq 0$, т. е. случай, когда ширина области неустойчивости имеет $O(\mu)$. Из (5.7) в первом приближении получаем

$$\lambda_n = n^2 - \mu a_0 \pm \mu |a_n| + O(\mu^2), \qquad 0.5(b_1 - c_1) = |a| \neq 0 \tag{6.1}$$

Оценим функции $R_1, \ldots, R_4$ (5.6). Из (3.1), (4.2) имеем мажорирование по степеням $z = \lambda - n^2$

$$d_n(k) = [\lambda - (n + 2k)^2]^{-1} = [\lambda - n^2 - 4n(n + k)]^{-1} \ll q(z) \tag{6.2}$$

где

$$z = \lambda - n^2, \qquad q(z) = (4 - z)^{-1}, \qquad |z| < 4 \tag{6.3}$$

Аналогично (4.4) из (5.4), (5.6) получаем оценки

$$
\begin{aligned}
R_1 + iR_2 &\ll \gamma_1\gamma_2 q(z)\,(1 - \mu\gamma_1 q(z))^{-1} \equiv R(\mu, z) \\
R_3 + iR_4 &\ll \gamma_1\gamma_2 q(z)\,(1 - \mu\gamma_1 q(z))^{-1} \equiv R(\mu, z)
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

где подобно (4.2) обозначено

$$\gamma_1 = \sum_{\substack{r=-\infty \\ s\neq 0,\, -n}}^{\infty} |a_s|, \qquad \gamma_2 = \max_s |a_s| \qquad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{6.5}$$

Радикал в (5.7), будет голоморфной функцией μ, z (6.3) в области

$$|\mu| < r, \qquad |z| < \rho, \qquad 0 < \rho < 4 \tag{6.6}$$

если в области (6.6) выполнено неравенство

$$|2\mu|a_n|^{-2}(\operatorname{Re} a_n R_3 + \operatorname{Im} a_n R_4) + \mu^2 |a_n|^{-2}(R_3^2 + R_4^2 - R_2^2)| < 1 \tag{6.7}$$

Неравенство (6.7) при помощи очевидного неравенства

$$|a + bi|\cdot|c + di| = |(a + bi)(c - di)| = |ac + db + i(bc - ad)| \geqslant |ac + db| \tag{6.8}$$

и обозначения $R(\mu, z)$ (6.4) преобразуется к виду

$$2r|a_n|^{-1}R(r, \rho) + r^2|a_n|^{-2}R^2(r, \rho) < 1 \tag{6.9}$$

или

$$r|a_n|^{-1}R(r, \rho) < \sqrt{2} - 1, \qquad 0 \leqslant \rho < 4 - r\gamma_1[(\sqrt{2} + 1)\gamma_2|a_n|^{-1} + 1] \tag{6.10}$$

При выполнении неравенства (6.10) функция, представляемая корнем в (5.7) голоморфна в области (6.6). Оценим правую часть уравнения (5.7) в области (6.6), (6.10). Из (6.7), (6.10) следует, что в области (6.6) выполнено неравенство

$$
\begin{aligned}
|1 - \mu a_0 + \mu^2 R_1 \pm \{\mu^2|a_n|^2 + 2\mu^3(\operatorname{Re} a_n R_3 + \operatorname{Im} a_n R_4) + \mu^4(R_3^2 + R_4^2 - R_2^2)\}^{1/2}| \leqslant \\
\leqslant r|a_0| + r^2 R(r, \rho) + r|a_n|\sqrt{2} \leqslant r[|a_0| + (2\sqrt{2} - 1)|a_n|] \equiv M
\end{aligned}
\tag{6.11}
$$

Введем обозначения

$$\chi_1 = 0.25\gamma_1[(\sqrt{2} + 1)\gamma_2|a_n|^{-1} + 1], \qquad \chi_2 = 0.5[|a_0| + (2\sqrt{2} - 1)|a_n|] \tag{6.12}$$

Чтобы при помощи леммы 5.1 получить наибольшее значение r^* — радиуса сходимости разложения $\lambda_n(\mu)$ решения уравнения (5.7) по степеням μ — следует найти

$$r^* = \max r\rho^2(\rho + 4\chi_2 r)^{-2}, \qquad 0 \leqslant \rho \leqslant 4(1 - r\chi_1), \qquad 0 \leqslant r \tag{6.13}$$

Обычным путем находим, что максимум достигается при

$$r_0 = 2(2\chi_1 + \chi_2 + \sqrt{\chi_2^2 + 8\chi_1\chi_2})^{-1}, \qquad \rho_0 = 4(1 - \chi_1 r_0) \tag{6.14}$$

Из леммы 5.1 и вышесказанного следует теорема.

Теорема 6.1. Разложения $\lambda_{n1}(\mu)$, $\lambda_{n2}(\mu)$ при $a_n \neq 0$ в (1.2), где a_n можно определить соотношением

$$a_n = 0.5 \lim_{\mu\to 0} \mu^{-1}(\lambda_{n1}(\mu) - \lambda_{n2}(\mu)) \neq 0 \tag{6.15}$$

сходятся при

$$|\mu| < r^* = r_0\rho_0^2(\rho_0 + 4\chi_2 r_0)^{-2} \tag{6.16}$$

где r_0, ρ_0 определяются (6.14), (6.12), (6.5). Эти разложения мажорируются рядом

$$n^2 + \frac{\rho_0^2(\rho_0 + 4\chi_2 r_0)^2}{16\chi_2 r_0(\rho_0 + 2\chi_2 r_0)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\mu}{r^*}\right)^k \gg \lambda_{n1}(\mu),\ \lambda_{n2}(\mu) \tag{6.17}$$

Замечание 6.1. Радиус сходимости r^* (6.16) может оказаться значительно меньше действительного радиуса сходимости.

Пример 6.1. Для уравнения Матье (4.13) при $n = 1$ имеем $|a_n| = 1 \neq 0$. Из (6.5) получаем $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1$. Из (6.12) имеем $\chi_1 = 0.853$, $\chi_2 = 0.915$. Из формул (6.14) находим $r_0 = 0.38$, $\rho_0 = 2.7$. Окончательно из (6.16) радиус сходимости $r^* = 0.156$, а мажорантный ряд (6.17) имеет вид

$$1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(6.4\mu)^k \gg \lambda_{1,1}(\mu),\ \lambda_{1,2}(\mu) \tag{6.18}$$

Действительное разложение $\lambda_{1,1}(\mu)$, $\lambda_{1,2}(\mu)$ имеет вид ([6], стр. 25)

$$\lambda = 1 \pm \mu - \frac{1}{8}\mu^2 \pm \frac{1}{64}\mu^3 - \frac{1}{1536}\mu^4 \pm \frac{11}{36864}\mu^5 + O(\mu^6) \tag{6.19}$$

7. Рассмотрим последний случай для (1.1), когда $a_n = 0$. Из (6.1) следует, что

$$\lambda_{n1}(\mu) - \lambda_{n2}(\mu) = O(\mu^2) \qquad (l = 2, 3, \ldots) \tag{7.1}$$

Пусть известны первые коэффициенты b_s, c_s $(s = 1, 2, \ldots, r)$ разложений (1.3) и при этом получено

$$b_1 - c_1 = 0, \ldots, b_{l-1} - c_{l-1} = 0, \qquad b_l - c_l = 2m > 0 \tag{7.2}$$

Из уравнений (5.7) и (7.2) следует, что

$$\sqrt{\mu^4 (R_3^2 + R_4^2 - R_2^2)} = m\mu^l + O(\mu^{l+1}) \tag{7.3}$$

Введем обозначения, использующие (5.6), $z = \lambda - n^2$

$$\Theta(\mu, z) = \mu^4 (R_3^2 + R_4^2 - R_2^2), \qquad \Pi(\mu, z) = \Theta(\mu, z) - \mu^{2l} m^2 \tag{7.4}$$

Из (6.4) следует оценка:

$$\Theta(\mu, z) = \mu^4 [(R_3 + iR_4)(R_3 - iR_4) + R_2 R_2] \leqslant 2\mu^4 R^2(\mu, z) =$$

$$= 2\mu^4 \gamma_1^2 \gamma_2^2 q^2(z) \sum_{k=0}^{\infty} [\mu\gamma_1 q(z)]^k (k+1) \tag{7.5}$$

Так как $\Pi(\mu, z) = O(\mu^{2l+1})$ при $\mu \to 0$, то

$$\Pi(\mu, z) \leqslant 2\mu^4 \gamma_1^2 \gamma_2^2 q^2(z) \sum_{k=2l-3}^{\infty} [\mu\gamma_1 q(z)]^k (k+1) =$$

$$= 2\mu^2 \gamma_2^2 [(2l-2)(\mu\gamma_1 q(z))^{2l-1} - (2l-3)(\mu\gamma_1 q(z))^{2l}] (1 - \mu\gamma_1 q(z))^{-2} \tag{7.6}$$

Выражение $\sqrt{\Theta(\mu, z)}$ будет голоморфным в области (6.6), если

$$|\Pi(r, \rho)| \leqslant \mu^{2l} m^2 \tag{7.7}$$

или

$$2\gamma_2^2 [(2l-2)(\gamma_1 q(\rho))^{2l-1} r - (2l-3)(\gamma_1 q(\rho))^{2l} r^2] \leqslant (1 - r\gamma_1 q(\rho))^2 m^2 \tag{7.8}$$

Если ввести обозначения

$$\delta_1 = \gamma_1 q(\rho) + \gamma_2^2 (2l-2) [\gamma_1 q(\rho)]^{2l-1} m^{-2}$$

$$\delta_2 = \gamma_1^2 q(\rho) + 2\gamma_2^2 (2l-3) [\gamma_1 q(\rho)]^{2l} m^{-2} \tag{7.9}$$

то неравенство (7.8) будет выполнено, если

$$r = (\delta_1 + \sqrt{\delta_1^2 - \delta_2})^{-1}, \qquad \delta_1^2 > \delta_2 \tag{7.10}$$

Оценим правую часть уравнения (5.7) в области (6.6), учитывая (7.10) и условие $a_n = 0$. Имеем

$$|-\mu a_0 + \mu^2 R_1 \pm \sqrt{\Theta(\mu, z)}| \leqslant r|a_0| + r^2 \gamma_1 \gamma_2 (4 - \rho - r\gamma_1)^{-1} + mr^l \sqrt{2} \tag{7.11}$$

Вводя величину

$$M = r|a_0| + r^2 \gamma_1 \gamma_2 (4 - \rho - r\gamma_1)^{-1} + \sqrt{2} m^l \tag{7.12}$$

и применяя лемму 5.1, получаем теорему.

Теорема 7.1. Разложения $\lambda_{n1}(\mu)$, $\lambda_{n2}(\mu)$, (1.3) при $a_n = 0$ и выполнении (7.2) сходятся при

$$|\mu| < r^* = r\rho^2 (\rho + 2M)^{-2} \tag{7.13}$$

и мажорируются рядом

$$n^2 + \frac{\rho^2 (\rho + 2M)^2}{8M(\rho + M)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\mu}{r^*}\right)^k \geqslant \lambda_{n1}(\mu), \qquad \lambda_{n2}(\mu) \tag{7.14}$$

Для вычисления величин r, ρ, M находим первый отличный от нуля коэффициент $b_l - c_l$ в разложении

$$\lambda_{n1}(\mu) - \lambda_{n2}(\mu) = (b_1 - c_1)\mu + (b_2 - c_2)\mu^2 + \ldots + (b_n - c_n)\mu^n + \ldots \tag{7.15}$$

и полагаем

$$m = 0.5 (b_l - c_l) \neq 0 \tag{7.16}$$

Берем произвольное ρ, $0 < \rho < 4$. Из (6.5), (7.16) вычисляем числа δ_1, δ_2 (7.9), а затем величины r (7.10), M (7.12).

Пример 7.1. Для уравнения Матье (4.13) получено при $\lambda \approx 4$ ([6], стр. 25)

$$\lambda_{2,1}(\mu) = 4 + \tfrac{5}{12}\mu^2 - \ldots, \qquad \lambda_{2,2}(\mu) = 4 - \tfrac{1}{12}\mu^2 + \ldots \tag{7.17}$$

Из (7.15), (7.16) находим $l = 2$, $m = 0.25$.

Пусть $\rho = 0.25$, $q(\rho) = 0.267$ (4.2). Из (7.9) имеем $\delta_1 \approx 6$, $\delta_2 \approx 3.3$. Из формулы (7.10) получаем $r = 0.0854$. Из (7.12) следует $M = 0.0066$. Окончательно радиус сходимости (7.13) $r^* = 0.08$. Разложения (7.17) заведомо сходятся при $|\mu| < 0.08$.

8. Изложенные выше результаты пригодны лишь в том случае, если ряд, определяющий величину γ_1 (4.2), (6.5), сходится. Для разрывной функции $a(t)$ в (1.1) этот ряд будет всегда расходиться. Можно распространить полученные выше теоремы на случай функции $a(t)$ (1.2), интегрируемой с квадратом по Лебегу на $[0, \pi]$, если рассмотреть сходимость рядов (3.3), (3.4), (5.2), (5.4), используя гильбертово пространство l^2 ([3], стр. 31). В настоящем пункте ограничимся распространением теорем 4.1, 6.1, 7.1 на случай ограниченной функции $a(t)$

$$|a(t)| \leqslant p, \qquad -\infty < t < +\infty, \qquad p = \text{const} \tag{8.1}$$

Из (8.1) и неравенства Бесселя ([3], стр. 92) следует

$$|a_n| = \left|\frac{1}{\pi}\int_0^\pi a(t)\, e^{-2nit}\, dt\right| \leqslant p, \qquad \sum_{s=-\infty}^{\infty} |a_s|^2 \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |a(t)|^2\, dt \leqslant p^2 \tag{8.2}$$

Построим ряд, мажорирующий (3.4), (5.4), используя лишь неравенства (8.2). Имеем, например, для (5.4)

$$\left|\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty}{}' a_{-\alpha} d_n(\alpha)\, a_\alpha\right| \leqslant \left(\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty}{}' |a_{-\alpha}|^2 d_n^2(\alpha)\right)^{1/2} \left(\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty}{}' |a_\alpha|^2\right)^{1/2} \leqslant p^2 \varepsilon_n(z)$$

$$\left|\sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty}{}' a_{-\alpha} d_n(\alpha)\, a_{\alpha-\beta} d_n(\beta)\, a_\beta\right| \leqslant \left(\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty}{}' |a_{-\alpha}|^2 d_n^2(\alpha)\right)^{1/2} \tag{8.3}$$

$$\left(\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}{}' |a_{\alpha-\beta}|^2 d_n^2(\beta)\right)^{1/2} \left(\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}{}' |a_\beta|^2\right)^{1/2} \leqslant p^3 \varepsilon_n^2(z) \text{ и т. д.}$$

Здесь $z = \lambda - n^2$

$$\varepsilon_n(z) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' d_n^2(k)\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{[(n+2k)^2 - \lambda]^2}\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{[4k(n+k) - z]^2}\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{(4-z)^{-2}}{k^2(n+k)^2}\right)^{1/2} = \eta_n q(z) \tag{8.4}$$

$$\eta_n = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{k^2(n+k)^2}\right)^{1/2} \tag{8.5}$$

В частности, получаем для η_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) значения (8.6)

$$\eta_0 = \left(2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}\right)^{1/2} \approx 1.47, \qquad \eta_1 = \left(2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2}\right)^{1/2} < \left(0.5\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \approx 1.28$$

Для $n = 2, 3, 4, \ldots$

$$\eta_n = \left(2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(n+k)^2} + \sum_{k=-n+1}^{-1} k^2(k+n)^2\right)^{1/2} < \left(\frac{\pi^2}{3(n+1)^2} + \frac{1}{n-1}\right)^{1/2}$$

Так что

$$\eta_2 < 1.17, \quad \eta_3 < 0.84, \quad \eta_4 < 0.68, \quad \eta_5 < 0.59 \text{ и т. д.}$$

Из оценок (8.3) находим мажорантные функции для $R_1, \ldots, R_4$ (5.6). А именно

$$R_1 + iR_2 \ll p^2\varepsilon_n(1-\mu p\varepsilon_n)^{-1}, \qquad R_3 + iR_4 \ll p^2\varepsilon_n(1-\mu p\varepsilon_n)^{-1} \tag{8.7}$$

Сравнивая (8.7) и (6.4), получаем, что оценки совпадут, если положим в (6.4)

$$\gamma_1 = p\eta_n, \qquad \gamma_2 = p \tag{8.8}$$

Так как дальнейшие выкладки совпадают, то получаем теорему, следующую из теорем (4.1), (6.1), (7.1).

Теорема 8.1. Пусть для функции $a(t)$ в уравнении (1.1) выполнено неравенство (8.1), где $a(t)$ — интегрируемая с квадратом на $[0, \pi]$.

1. Разложение, определяющее границу нулевой области неустойчивости $\lambda_0(\mu)$, сходится при условии (4.10) и мажорируется рядом (4.9), где величины γ_1, γ_2 определены формулами (8.8), (8.6).

2. Если $a_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, т. е. выполнено условие (6.15), то разложения, определяющие n-ю область неустойчивости $\lambda_{n1}(\mu)$, $\lambda_{n2}(\mu)$ (1.3), мажорируются рядом (6.17), сходящимся при условии (6.16). Величины r_0, ρ_0 вычислятся по формулам (6.14), (8.8), (8.6), (6.12). Формулы (6.12) можно заменить следующими:

$$\chi_1 = 0.25\,(2+\sqrt{2})\,p^2\eta_n\,|a_n|^{-1}, \qquad \chi_2 = \sqrt{2}\,p \tag{8.9}$$

3. Если известно, что

$$\lambda_{n1}(\mu) - \lambda_{n2}(\mu) = 2m\mu^l + O(\mu^{l+1}) \qquad (l = 2, 3, \ldots) \tag{8.10}$$

то разложения $\lambda_{n1}(\mu)$, $\lambda_{n2}(\mu)$ мажорируются рядом (7.14) и сходятся при выполнении (7.13). Величины r, ρ, M вычисляются так же, как в теореме 7.1 с условием, что числа γ_1, γ_2 определены уже формулами (8.8), (8.6).

Пример 8.1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$d^2y\,/\,dt^2 + (\lambda - \mu a(t))\,y = 0 \tag{8.11}$$

где $a(t)$ — пилообразная периодическая функция (8.12)

$$a(t+\pi) \equiv a(t), \quad |a(t)| \leqslant p = \pi$$

$$a(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} 2n^{-1}\sin 2nt, \qquad a(t) = -\pi + 2t, \qquad t \in [0, \pi]$$

Имеем из (8.8)

$$\gamma_1 = p\eta_0 \approx 4.62, \qquad \gamma_2 = p \approx 3.14 \tag{8.13}$$

Выражение для $\lambda_0(\mu)$ сходится при

$$|\mu| < \mu_1 \equiv 4\,(\sqrt{\gamma_1} + \sqrt{\gamma_2})^{-2} = 0.26 \tag{8.14}$$

Оценим радиус сходимости r^* разложений $\lambda_{1,1}(\mu)$, $\lambda_{1,2}(\mu)$. Из равенств (8.9) имеем $|a_n| = n^{-1}$, $|a_2| = 1$. Величины χ_1, χ_2 находим из (8.9), величины r_0, ρ_0 из (6.14)

$$\chi_1 = 10.8, \qquad \chi_2 = 4.44, \qquad r_0 = 0.0416, \qquad \rho_0 = 2.2 \tag{8.15}$$

Окончательно, из (6.16) находим условие сходимости разложений $\lambda_{1,1}(\mu)$, $\lambda_{1,2}(\mu)$, определяющих первую область неустойчивости

$$|\mu| < r^* = r_0\rho_0^2\,(\rho_0 + 4\chi_2 r_0)^{-2} = 0.023 \tag{8.16}$$

Поступила 15 X 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., ГИТТЛ, 1956.
2. Валеев К. Г. К методу Хилла в теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Определение характеристических показателей. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.
3. Канторович А. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. ГИФМЛ, 14, 1959.
4. Филиминов Г. Ф. О вычислении и исследовании частных решений обобщенного уравнения Хилла. ПММ, 1962, т. 26, вып. 3.
5. Еругин Н. П. Неявные функции. Изд-во Ленингр. ун-та, 1958.
6. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье. М., ИЛ, 1953.