УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

А. П. Проскуряков (Москва)

Рассматривается устойчивость периодических решений квазилинейных автономных систем в случае, когда уравнение основных амплитуд имеет кратные корни. При этом периодические решения могут представляться в виде рядов как по целым, так и по дробным степеням малого параметра.

1. Рассмотрим колебательную систему

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p^2x = \mu f\left(x, \frac{dx}{dt}, \mu\right) \tag{1.1}$$

Функция $f(x, \dot{x}, \mu)$ предполагается аналитической от своих аргументов в некоторой области их изменения, а параметр μ — малым и положительным. Решение порождающего уравнения (при $\mu = 0$) будет

$$x_0(t) = A_0 \cos pt \tag{1.2}$$

Начальные условия для системы (1.1) в силу автономности можно принять в виде

$$x(0) = A_0 + \beta, \qquad \dot{x}(0) = 0 \tag{1.3}$$

где β — функция от μ, обращающаяся в нуль при $\mu = 0$.

Решение уравнения (1.1) может быть представлено в виде [1]

$$x(t, A_0 + \beta, \mu) = (A_0 + \beta)\cos pt + \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n(t) + \frac{\partial C_n}{\partial A_0}\beta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_n}{\partial A_0^2}\beta^2 + \ldots\right]\mu^n \tag{1.4}$$

При этом функции $C_n(t)$ определяются по формулам (1.5)

$$C_n(t) = \frac{1}{p}\int_0^t H_n(t_1)\sin p(t - t_1)\,dt_1, \qquad H_n(t) = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d^{n-1}f}{d\mu^{n-1}}\right)_{\beta=\mu=0}$$

Период колебаний автономной системы зависит от параметра μ

$$T = T_0 + \alpha, \qquad T_0 = 2\pi / p \tag{1.6}$$

где α—функция от μ, уничтожающаяся при $\mu = 0$. Из условия периодичности для производной $\dot{x}(t)$ находится функция $\alpha=\alpha(A_0+\beta, \mu)$. Подставляя эту функцию в условие периодичности для $x(t)$, получаем уравнение для определения основных амплитуд A_0

$$M_1 \doteq C_1(T_0) = -\frac{1}{p}\int_0^{T_0} f(x_0, \dot{x}_0, 0)\sin pt\,dt = 0 \tag{1.7}$$

а также уравнение, определяющее β как неявную функцию от μ

$$\Phi(\beta, \mu) = \frac{\partial C_1}{\partial A_0}\beta + M_2\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2}\beta^2 + \frac{\partial M_2}{\partial A_0}\beta\mu + M_3\mu^2 +$$
$$+ \frac{1}{6}\frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^3}\beta^3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 M_2}{\partial A_0^2}\beta^2\mu + \frac{\partial M_3}{\partial A_0}\beta\mu^2 + M_4\mu^3 + \ldots = 0 \tag{1.8}$$

При этом предполагается, что $C_1(T_0)$ не равно нулю тождественно. Значения величин M_n для $n = 2, 3, 4$ указаны[1] в работе [1].

В случае кратных корней уравнения (1.7) функция $\beta(\mu)$, а следовательно, и периодические решения $x(t)$ будут представляться в виде рядов как по целым, так и по дробным степеням параметра μ. Имеем

$$\beta = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n/k}\mu^{n/k} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1.9}$$

В работе [1] рассмотрено построение периодических решений в ряде случаев при двухкратных и трехкратных корнях уравнения (1.7). При этом знаменатель дроби в показателях у μ при двухкратных корнях может принимать значения $k = 1, 2$, а при трехкратных корнях — значения $k = 1, 2, 3$.

[1] В работе [1] в формуле для M_4 пропущен член — ${}^1/_8 k^4 A_0 N_1^4$.

2. Рассмотрим устойчивость периодических решений уравнения (1.1) при двухкратных и трехкратных корнях уравнения основных амплитуд. Уравнение в вариациях для системы (1.1) будет

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \mu\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\frac{dy}{dt} + \left(p^2 - \mu\frac{\partial f}{\partial x}\right)y = 0 \tag{2.1}$$

где $x(t)$ — некоторое периодическое решение уравнения (1.1).

Уравнение (2.1) является уравнением с периодическими коэффициентами. Это уравнение имеет два частных решения $y_1(t)$ и $y_2(t)$, образующих фундаментальную систему решений [2]

$$\begin{gathered} y_1(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial A_0}, \qquad y_1(0) = 1, \qquad \dot{y}_1(0) = 0 \\ y_2(t) = \dot{x}(t), \qquad y_2(0) = 0, \qquad \dot{y}_2(0) = \ddot{x}(0) \end{gathered} \tag{2.2}$$

Характеристическое уравнение для уравнения в вариациях имеет вид

$$\rho^2 - 2A\rho + B = 0 \tag{2.3}$$

где

$$2A = y_1(T) + \frac{\dot{y}_2(T)}{\dot{y}_2(0)}, \qquad B = \frac{1}{\dot{y}_2(0)}\left[y_1(T)\,\dot{y}_2(T) - y_2(T)\,\dot{y}_1(T)\right] \tag{2.4}$$

Так как частное решение $y_2(t)$ уравнения в вариациях является периодическим, то одним из корней характеристического уравнения (2.3) будет $\rho_2 = 1$. Следовательно,

$$\rho_1 = 2A - 1 = B$$

Замечание. При исследовании устойчивости периодических решений неавтономных систем знак величины $2A - B - 1$ играет существенную роль [2]. Для автономных систем эта величина обращается в нуль.

Подставляя вместо величины $2A$ ее выражение из (2.4) и (2.2), получаем

$$\rho_1 = \partial x(T) \,/\, \partial A_0 \tag{2.5}$$

Согласно теореме Андронова и Витта, периодические решения автономной системы с одной степенью свободы будут устойчивы, если

$$\rho_1 < 1 \tag{2.6}$$

Как было упомянуто, при двухкратных и трехкратных корнях уравнения (1.7) периодические решения системы (1.1) представляются рядами по степеням μ, $\mu^{1/2}$ и $\mu^{1/3}$. Вычислим разложения $\partial x(T) \,/\, \partial A_0$ в степенные ряды по $\mu^{1/2}$ и $\mu^{1/3}$. Разложение по целым степеням μ может быть получено как частный случай из разложения по $\mu^{1/2}$.

Используем обозначения [1]

$$\begin{aligned} P_n(A_1) &= \frac{1}{n!}\frac{\partial^n C_1}{\partial A_0{}^n} A_1{}^n + \frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1} M_2}{\partial A_0{}^{n-1}} A_1{}^{n-1} + \ldots + M_{n+1} \\ Q_n(A_2) &= \frac{1}{n!}\frac{\partial^n P_2}{\partial A_1{}^n} A_2{}^n + \frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1} P_3}{\partial A_1{}^{n-1}} A_2{}^{n-1} + \ldots + P_{n+2} \end{aligned} \tag{2.7}$$

После громоздких выкладок получим разложение по $\mu^{1/2}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(T)}{\partial A_0} = 1 &+ \frac{\partial C_1}{\partial A_0}\mu + \frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0{}^2}A_{1/2}\mu^{3/2} + \left(\frac{\partial P_2}{\partial A_1} + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0{}^3}A_{1/2}{}^2\right)\mu^2 + \left(\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0{}^2}A_{3/2} + \ldots\right)\mu^{5/2} + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0{}^2}A_2 + \frac{\partial P_3}{\partial A_1} + \ldots\right)\mu^3 + \left(\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0{}^2}A_{5/2} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial A_1{}^2}A_{3/2} + \ldots\right)\mu^{7/2} + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0{}^2}A_3 + \frac{\partial Q_3}{\partial A_2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0{}^3}A_{3/2}{}^2 + \ldots\right)\mu^4 + \left(\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0{}^2}A_{7/2} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial A_1{}^2}A_{5/2} + \ldots\right)\mu^{9/2} + \ldots \end{aligned} \tag{2.8}$$

Пропущенные члены в коэффициентах разложения (2.8) содержат в качестве множителя $A_{1/2}$, а в последнем коэффициенте $A_{1/2}$ и $A_{3/2}$.

Учитывая, что разложение $\partial x(T) / \partial A_0$ в ряд по $\mu^{1/3}$ представляет интерес только при трехкратных корнях (и корнях более высокой кратности) уравнения (1.7), полагаем

$$\frac{\partial C_1}{\partial A_0} = \frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2} = 0$$

Получим

$$\frac{\partial x(T)}{\partial A_0} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^3}A_{1/3}^2\mu^{5/3} + \left(\frac{\partial M_2}{\partial A_0} + \ldots\right)\mu^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^3}A_{1/3}^2 + \ldots\right)\mu^{7/3} + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{\partial P_3}{\partial A_1} + \ldots\right)\mu^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^3}A_{4/3}^2 + \ldots\right)\mu^{11/3} + \left(\frac{\partial^2 P_3}{\partial A_1^2}A_2 + \frac{\partial P_4}{\partial A_1} + \ldots\right)\mu^4 +$$
$$+ \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^3}A_{5/3}^2 + \ldots\right)\mu^{13/3} + \ldots \tag{2.9}$$

Пропущенные члены содержат в качестве множителей коэффициенты $A_{n/3}$ с дробными индексами, которые уже содержались в предшествовавших коэффициентах.

В дальнейшем будем предполагать, что параметр μ достаточно мал, так что знаки сумм рядов, расположенных в правых частях формул (2.8) и (2.9) за единицей, определяются знаками первых, не равных нулю, их членов.

Все рассмотренные в статье [1] случаи сведены в таблицу, в которой для каждого случая указан вид рядов (1.9), с каких коэффициентов эти ряды начинаются и соответствующие условия устойчивости. При этом случай 1° отвечает простым корням, случай 2° — двукратным корням, а случай 3° — трехкратным корням уравнения основных амплитуд (1.7). Разные ветви функции $\beta(\mu)$ обозначены через $\beta^{(1)}$, $\beta^{(2)}$ и $\beta^{(3)}$.

Заметим, что в случае двукратных корней равенство (1.8) при $M_2 = 0$ при помощи подстановки $\beta = (A_1 + \gamma)\mu$ преобразуется в равенство

$$\frac{\partial P_2}{\partial A_1}\gamma + P_3\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2}\gamma^2 + \frac{\partial P_3}{\partial A_1}\gamma\mu + P_4\mu^2 + \ldots = 0 \tag{2.10}$$

При этом коэффициент A_1 определяется из квадратного уравнения $P_2(A_1) = 0$.

Аналогично, в случае трехкратных корней равенство (1.8) при значениях $M_2 = 0$, $\partial M_2 / \partial A_0 = 0$ и $M_3 = 0$ той же подстановкой, приводится к виду

$$\frac{\partial P_3}{\partial A_1}\gamma + P_4\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P_3}{\partial A_1^2}\gamma^2 + \frac{\partial P_4}{\partial A_1}\gamma\mu + P_5\mu^2 + \ldots = 0 \tag{2.11}$$

Коэффициент A_1 определяется в этом случае из кубического уравнения $P_3(A_1) = 0$.

3. Рассмотрим сначала характерные случаи при наличии двухкратного корня уравнения (1.7). При этом первые коэффициенты разложений величины β определяются из квадратных уравнений. Поэтому могут существовать или два решения с вещественными коэффициентами, или ни одного.

Возьмем случай 2°.1, когда $M_2 \neq 0$. В этом случае коэффициент $A_{1/2}$ определяется из квадратного двухчленного уравнения [1]

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2}A_{1/2}^2 + M_2 = 0$$

Если корни этого уравнения вещественные, то они отличаются только знаком. Условие устойчивости имеет вид

$$A_{1/2}\partial^2 C_1 / \partial A_0^2 < 0$$

Если $M_2 = 0$, то $A_{1/2} = 0$, а коэффициент A_1 определяется из квадратного уравнения $P_2(A_1) = 0$. Как выяснено в статье [1], решение в виде ряда по $\mu^{1/2}$ получится только в том случае, когда это уравнение имеет кратные корни $A_1^{(1)} = A_1^{(2)}$. Тогда коэффициент $A_{3/2}$ будет определяться из квадратного двухчленного уравнения, аналогичного уравнению для $A_{1/2}$. Условие устойчивости при этом будет $A_{3/2}\partial^2 C_1 / \partial A_0^2 < 0$. Для разных ветвей функции $\beta(\mu)$ имеем разложения

$$\beta^{(1)} = A_1\mu + A_{3/2}\mu^{3/2} + A_2^{(1)}\mu^2 + \ldots, \quad \beta^{(2)} = A_1\mu - A_{3/2}\mu^{3/2} + A_2^{(2)}\mu^2 + \ldots \tag{3.1}$$

Аналогично, если $A_{3/2}=0$, то разложение по $\mu^{1/2}$ будет существовать только при условии $A_2^{(1)}=A_2^{(2)}$ и т. д. Заметим, что если какой-либо коэффициент с дробным индексом $A_{n/2}\neq 0$, то все последующие коэффициенты определяются из линейных уравнений.

Таблица

Различные случаи	Коэффициенты уравнения (1.8)	k	Коэффициенты рядов (1.9)	Условия устойчивости
1°	$M_2\neq 0$	1	$A_1\neq 0$	$\dfrac{\partial C_1}{\partial A_0}<0$
2.° 1	$M_2\neq 0$	2	$A_{1/2}\neq 0$	$\dfrac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2}A_{1/2}<0$
2.° 2. а)	$M_2=0,\quad \dfrac{\partial P_2}{\partial A_1}\neq 0$	1	$A_{1/2}=0,\quad A_1^{(1)}\neq A_1^{(2)}$	$\dfrac{\partial P_2}{\partial A_1}<0$
б)	$\dfrac{\partial P_2}{\partial A_1}=0,\quad P_3\neq 0$	2	$A_1^{(1)}=A_1^{(2)},\quad A_{3/2}\neq 0$	$\dfrac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2}A_{3/2}<0$
в)	$P_3=0,\quad \dfrac{\partial Q_2}{\partial A_2}\neq 0$	1	$A_1^{(1)}=A_1^{(2)},\quad A_2^{(1)}\neq A_2^{(2)}$	$\dfrac{\partial Q_2}{\partial A_2}<0$
	$\dfrac{\partial Q_2}{\partial A_2}=0,\quad Q_3\neq 0$	2	$A_{3/2}=0,\ A_2^{(1)}=A_2^{(2)}$ $A_{5/2}\neq 0$	$\dfrac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2}A_{5/2}<0$
и т. д.				
3°. 1	$M_2\neq 0$	3	$A_{1/3}\neq 0$	$\dfrac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^3}<0$
3°. 2	$M_2=0,\quad \dfrac{\partial M_2}{\partial A_0}\neq 0$	2	$A_{1/2}\neq 0$	$\dfrac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^3}<0$
		1	$A_{1/2}=0,\quad A_1\neq 0$	$\dfrac{\partial M_2}{\partial A_0}<0$
3°. 3	$\dfrac{\partial M_2}{\partial A_0}=0,\quad M_3\neq 0$	3	$A_{1/3}=0,\quad A_{2/3}\neq 0$	$\dfrac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^3}<0$
3°. 4	$M_3=0,\quad \dfrac{\partial P_3}{\partial A_1}\neq 0$	1	A_1 — разные	$\dfrac{\partial P_3}{\partial A_1}<0$
3°. 5. а)	$\dfrac{\partial P_3}{\partial A_1}=0,\quad P_4\neq 0$	2	$A_{1/2}=0,\quad A_1^{(1)}=A_1^{(2)}$ $A_{3/2}\neq 0$	$\dfrac{\partial^2 P_3}{\partial A_1^2}A_{3/2}<0$
б)	$P_4=0,\quad \dfrac{\partial Q_3}{\partial A_2}\neq 0$	1	$A_1^{(1)}=A_1^{(2)},\quad A_2^{(1)}\neq A_2^{(2)}$	$\dfrac{\partial Q_3}{\partial A_2}<0$
	$\dfrac{\partial Q_3}{\partial A_2}=0,\quad Q_4\neq 0$	2	$A_{3/2}=0,\quad A_2^{(1)}=A_2^{(2)}$ $A_{5/2}\neq 0$	$\dfrac{\partial^2 P_3}{\partial A_1^2}A_{5/2}<0$
и т. д.				
3°. 6. а)	$\dfrac{\partial^2 P_3}{\partial A_1^2}=0,\quad P_4\neq 0$	3	$A_1^{(1)}=A_1^{(2)}=A_1^{(3)}$ $A_{4/3}\neq 0$	$\dfrac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^3}<0$
б)	$P_4=0,\quad \dfrac{\partial P_4}{\partial A_1}\neq 0$	2	$A_1^{(1)}=A_1^{(2)}=A_1^{(3)}$ $A_{3/2}\neq 0$	$\dfrac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^3}<0$
		1	$A_{3/2}=0,\quad A_2\neq 0$	$\dfrac{\partial P_4}{\partial A_1}<0$
в)	$\dfrac{\partial P_4}{\partial A_1}=0,\quad P_5\neq 0$	3	$A_{4/3}=0,\quad A_{5/3}\neq 0$	$\dfrac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^3}<0$
и т. д.				

Таким образом, при двухкратном корне уравнения (1.7) решение представляется рядом по степеням $\mu^{1/2}$, если первые не равные друг другу коэффициенты $A_{n/2}$ будут иметь дробный индекс. При этом условие устойчивости будет иметь вид

$$A_{n/2}\partial^2 C_1 / \partial A_0{}^2 < 0 \tag{3.2}$$

где $A_{n/2}$ — первый, не равный нулю коэффициент с дробным индексом. Так как

$$A_{n/2}^{(1)} = -A_{n/2}^{(2)}$$

то одно из решений является устойчивым, а другое — неустойчивым.

Теперь рассмотрим случай 2°.2. а), когда $M_2 = 0$ и, следовательно, $A_{1/2} = 0$, а квадратное уравнение $P_2(A_1) = 0$ имеет простые вещественные корни. В этом случае условием устойчивости является неравенство $\partial P_2 / \partial A_1 < 0$. Если же корни уравнения $P_2(A_1) = 0$ окажутся кратными и $A_{3/2} = 0$, а корни квадратного уравнения $Q_2(A_2) = 0$ — простыми, то условием устойчивости будет $\partial Q_2 / \partial A_2 < 0$. При этом

$$\beta^{(1)} = A_1\mu + A_2{}^{(1)}\mu^2 + \ldots, \qquad \beta^{(2)} = A_1\mu + A_2{}^{(2)}\mu^2 + \ldots \tag{3.3}$$

Последующие коэффициенты A_n будут определяться из линейных уравнений.

Таким образом, если при двухкратном корне уравнения (1.7) первые различные коэффициенты $A_{n/2}$ окажутся при целой степени μ, то периодические решения будут представляться рядами по целым степеням μ и условие устойчивости будет иметь вид

$$\partial W_2 / \partial A_s < 0 \tag{3.4}$$

где $W_2(A_s) = 0$ — первое из квадратных уравнений для A_n $(n = 1, 2, \ldots)$, которое имеет некратные корни. При этом одно из решений будет устойчивым, а другое — неустойчивым.

Далее рассмотрим характерные случаи при трехкратном корне уравнения (1.7). Пусть β разлагается в ряд по $\mu^{1/3}$. Примером этого служит случай 3°.1, когда $M_2 \neq 0$. Коэффициент $A_{1/3}$ определяется из кубического двухчленного уравнения [1]

$$\frac{1}{6}\frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0{}^3}A_{1/3}{}^3 + M_2 = 0$$

Такие уравнения имеют один вещественный и два комплексных корня. Следовательно, только одна ветвь функции $\beta(\mu)$ будет вещественной. Если $M_2 = 0$, то $A_{1/3} = 0$ и для определения $A_{2/3}$ будем иметь аналогичное кубическое двухчленное уравнение. Если $A_{2/3} = 0$, то для A_1 имеем кубическое уравнение $P_3(A_1) = 0$. Разложение β по $\mu^{1/3}$ может существовать только в случае, когда все корни этого уравнения равны друг другу, т. е. когда $\partial^2 P_3 / \partial A_1{}^2 = 0$. Уравнение для последующего коэффициента $A_{4/3}$ также будет кубическим двухчленным уравнением. Если $A_{4/3} = A_{5/3} = 0$, то для существования разложения по $\mu^{1/3}$ необходимо, чтобы кубическое уравнение $Q_4(A_2) = 0$ имело все равные корни и т. д.

Таким образом, для существования решения в виде ряда по $\mu^{1/3}$ необходимо, чтобы первые, не равные друг другу коэффициенты $A_{n/3}$ имели дробный индекс. Условие устойчивости в этом случае будет

$$\partial^3 C_1 / \partial A_0{}^3 < 0 \tag{3.5}$$

Рассмотрим теперь случаи, когда две ветви функции $\beta(\mu)$ представляются рядами по $\mu^{1/2}$, а одна ветвь — рядом по целым степеням μ. В качестве примера может быть взят случай 3°.2, когда $M_2 = 0$, а $\partial M_2 / \partial A_0 \neq 0$. Для определения $A_{1/2}$ имеем уравнение

$$\left(\frac{1}{6}\frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0{}^3}A_{1/2}{}^2 + \frac{\partial M_2}{\partial A_0}\right)A_{1/2} = 0$$

Это уравнение определяет два не равных нулю корня и один нулевой корень. Будут существовать или три вещественных ветви функций $\beta(\mu)$, или одна ветвь. Условием устойчивости для первых двух ветвей будет неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0{}^3}A_{1/2}{}^2 + \frac{\partial M_2}{\partial A_0} < 0$$

Это условие сведется к (3.5), если учесть уравнение для коэффициента $A_{1/2}$.

Для ветви с $A_{1/2} = 0$ имеем другое условие устойчивости

$$\partial M_2 / \partial A_0 < 0 \tag{3.6}$$

Из условия вещественности коэффициентов $A_{1/2}$ следует, что величины, стоящие в левых частях неравенств (3.5) и (3.6), имеют разные знаки. Ветвь функции $\beta(\mu)$ с $A_{1/2} = 0$, представляемая рядом по целым степеням μ, будет располагаться между двумя другими ветвями. Аналогичным примером является случай 3°.6. б), когда

$$A_{1/2} = 0, \quad A_1^{(1)} = A_1^{(2)} = A_1^{(3)}$$

Можно показать, что в этом случае условия устойчивости сведутся к неравенствам

$$\partial^3 C_1 / \partial A_0^3 < 0, \qquad \partial P_4 / \partial A_1 < 0 \tag{3.7}$$

причем величины, стоящие в левых частях этих неравенств, имеют противоположные знаки. Первое неравенство относится к ветвям функции $\beta(\mu)$, которые представляются рядами по $\mu^{1/2}$, а второе неравенство — к ветви, представляемой рядом по целым степеням μ. Эта ветвь располагается между двумя другими ветвями

$$\begin{aligned} \beta^{(1)} &= A_1\mu + A_{3/2}\mu^{3/2} + A_2^{(1)}\mu^2 + \ldots \\ \beta^{(2)} &= A_1\mu \qquad\qquad\;\; + A_2^{(2)}\mu^2 + \ldots \\ \beta^{(3)} &= A_1\mu - A_{3/2}\mu^{3/2} + A_2^{(3)}\mu^2 + \ldots \end{aligned} \tag{3.8}$$

В этих и подобных случаях решения в виде рядов по $\mu^{1/2}$ будут одновременно устойчивыми или неустойчивыми, тогда как решение в виде ряда по целым степеням μ будет иметь противоположную характеристику устойчивости.

Примером случая, аналогичного тем, которые рассматривались выше при анализе разложений в ряд по $\mu^{1/2}$ при двухкратном корне уравнения (1.7), является случай 3°.5.а). Здесь условием устойчивости для ветвей, представляемых рядами по $\mu^{1/2}$, будет

$$A_{3/2}\partial^2 P_3 / \partial A_1^2 < 0 \tag{3.9}$$

Такой же характер имеет второй подслучай 3°.5.б).

Наконец, возможны случаи, когда все три ветви функции $\beta(\mu)$ представляются рядами по целым степеням μ. Примером служит случай 3°.4, когда $M_2 = \partial M_2 / \partial A_0 = M_3 = 0$, а кубическое уравнение $P_3(A_1) = 0$ имеет три простых вещественных корня. Условием устойчивости будет

$$\partial P_3 / \partial A_1 < 0 \tag{3.10}$$

Устойчивость и неустойчивость ветвей будут, очевидно, чередоваться.

Вторым примером является первый подслучай случая 3°.5.б). При этом один из корней уравнения $P_3(A_1) = 0$ является двойным, но $P_4 = 0$ и уравнение $Q_3(A_2) = 0$ имеет простые корни. В этом случае

$$\begin{aligned} \beta^{(1)} &= A_1^{(1)}\mu + A_2^{(1)}\mu^2 + \ldots \\ \beta^{(2)} &= A_1^{(1)}\mu + A_2^{(2)}\mu^2 + \ldots \\ \beta^{(3)} &= A_1^{(3)}\mu + A_2^{(3)}\mu^2 + \ldots \end{aligned} \tag{3.11}$$

а к условию устойчивости (3.10) для третьей ветви добавляется еще условие устойчивости для двух других ветвей

$$\partial Q_3 / \partial A_2 < 0 \tag{3.12}$$

Заметим, что все уравнения, из которых определяются первые, не равные друг другу коэффициенты A_n, являются нелинейными, все же последующие — линейными.

Поступила 14 I 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Проскуряков А. П. Периодические решения квазилинейных автономных систем с одной степенью свободы в виде рядов по дробным степеням параметра. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 5.
2. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1956.