В этом случае убывание в глубь цилиндра будет также происходить в силу свойства функции $I_n(\xi)$. Условие отсутствия напряжений на поверхности цилиндра приведет к уравнению, аналогичному $\Delta(\theta)=0$, которое было исследовано для случая колебаний с осевой симметрией [5].

Поступила 29 I 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Terezawa. Oscillats of the deep-sea surf. caused by a local disturb. Sci. Rept. Tôhoku Imp. Univ., 1917, vol. 13, S.
2. Reyleigh. Waves propagated along plane surface of an elastic solid. Proc. Math. Soc., 1886, vol. 17.
3. Миндлин Я. А. Распространение волн по поверхности бесконечно длинного кругового цилиндра, представляющего собой вырез в бесконечно упругом пространстве. ДАН СССР, 1944, т. XLII, № 4.
4. Снеддон И. Н., Берри Д. С. Классическая теория упругости. М., ИЛ., 1961.
5. Миндлин Я. А. Распространение волн по поверхности бесконечно длинного кругового цилиндра. ДАН СССР, 1946, т. LII, № 2.

ПОСТРОЕНИЕ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ, ОПТИМАЛЬНОГО В ИНТЕГРАЛЬНОМ СМЫСЛЕ

В. Ф. Демьянов (Ленинград)

Дается метод последовательных приближений для разыскания оптимального программного управления в линейной системе, показана сходимость этого метода.

1°. Постановка задачи. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$X^{\cdot}(t) = A(t)\,X(t) + \sum_{i=1}^{r} B_i(t)\,u_i(t) + F(t) \qquad (1.1)$$

с начальным условием

$$X(0) = X_0 \qquad (1.2)$$

где $A(t)$ — n-мерная квадратная матрица; $F(t)$, $B_i(t)$, $i = 1, \ldots, r$ — n-мерные векторы. Будем считать, что элементы матрицы $A(t)$, а также компоненты векторов $F(t), B_i(t)$ $(i = 1, \ldots, r)$ представляют собой вещественные, непрерывные, заданные на $[0, T]$ функции. Пусть T фиксировано.

Будем также считать, что управления $u_1(t), \ldots, u_r(t)$ — вещественные функции времени, заданные на $[0, T]$ и удовлетворяющие неравенствам

$$|u_i(t)| \leqslant 1 \qquad (i = 1, \ldots, r) \qquad (1.3)$$

Весь класс таких функций (обозначим его U) можно считать совпадающим со всеми кусочно-непрерывными функциями или, в общем случае, со всеми измеримыми функциями.

Пусть $X(t, u)$ — решение уравнения (1.1) с начальным условием (1.2) при выбранном $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))$; $N(t)$ — квадратная симметричная неотрицательно определенная матрица с непрерывными коэффициентами, а $*$ означает транспонирование.

Требуется выбрать $u(t) \in U$ так, чтобы функционал

$$J(u) = \int_0^T X^*(t, u)\,N(t)\,X(t, u)\,dt \qquad (1.4)$$

принимал наименьшее возможное значение.

Ниже приводится метод последовательных приближений для минимизации функционала (1.4). Метод иллюстрируется для случая, когда функционал имеет вид

$$J(u) = \int_0^T X^*(t, u)\,X(t, u)\,dt \qquad (1.5)$$

2°. Решение вспомогательной задачи. Пусть $C(t)$ — любая непрерывная n-мерная вектор-функция (вещественная); среди управлений, упомянутых в 1°, найти такое, которое дает функционалу

$$J_C(u) = \int_0^T X^*(t, u)\, C(t)\, dt \tag{2.1}$$

наименьшее возможное значение.

Если известна фундаментальная система $Y(t)$ для однородной части уравнения (1.1), то решение системы (1.1) с начальным условием (1.2) дается формулой Коши

$$X(t) = Y(t)\, X_0 + \int_0^t \sum_{i=1}^r Y(t)\, Y^{-1}(\tau)\, B_i(\tau)\, u_i(\tau)\, d\tau + \int_0^t Y(t)\, Y^{-1}(\tau)\, F(\tau)\, d\tau \tag{2.2}$$

Значит, для любого набора $u_1(t), \ldots, u_r(t)$ значение функционала (2.1) можно высчитать

$$J_C(u) = \int_0^T C^*(t) \Big[Y(t)\, X_0 + \int_0^t Y(t)\, Y^{-1}(\tau)\, F(\tau)\, d\tau + \int_0^t \sum_{i=1}^r Y(t)\, Y^{-1}(\tau)\, B_i(\tau)\, u_i(\tau)\, d\tau \Big] dt$$

Рассмотрим

$$J_i = \int_0^T \int_0^t C^*(t)\, [Y(t)\, Y^{-1}(\tau)\, B_i(\tau)]\, u_i(\tau)\, d\tau dt \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

Проинтегрируем по частям

$$J_i = \int_0^T [\omega(T) - \omega(t)]^*\, [Y^{-1}(t)\, B_i(t)]\, u_i(t)\, dt$$

$$\omega(t) = \int_0^t Y^*(\tau)\, c(\tau)\, d\tau, \qquad \omega(T) - \omega(t) = \int_t^T Y^*(\tau)\, C(\tau)\, d\tau$$

Так как

$$J_C(u) = \int_0^T C^*(t)\, Y(t)\, X_0 dt + \sum_{i=1}^r J_i + \int_0^T C^*(t) \int_0^t Y(t)\, Y^{-1}(\tau)\, F(\tau)\, d\tau\, dt$$

то ясно, что $J_C(u)$ тогда и только тогда принимает минимальное значение, когда

$$u_i(t) = -\operatorname{sign} \left\{ \left[\int_t^T Y^*(\tau)\, C(\tau)\, d\tau \right]^* [Y^{-1}(t)\, B_i(t)] \right\} \qquad (i = 1, \ldots, r) \tag{2.3}$$

где

$$\operatorname{sign} a = 1 \quad (a > 0), \qquad \operatorname{sign} a = 0 \quad (a = 0), \qquad \operatorname{sign} a = -1 \quad (a < 0)$$

Таким образом, если фундаментальная матрица $Y(t)$ известна, то решение вспомогательной задачи дается формулой (2.3).

3°. Метод последовательных приближений. Берем любое управление $u^1(t) \in U$. Пусть $X_1(t)$ — решение системы (1.1) с начальным условием (1.2) для $u(t) = u^1(t)$. Решаем вспомогательную задачу при $C(t) = X_1(t)$. Пусть $v^1(t)$ — управление, дающее минимум вспомогательной задаче, а $\chi_1(t)$ — соответствующее этому управлению решение. Положим

$$\int_0^T X_n^*(t)\, X_n(t)\, dt = \theta_n, \qquad \int_0^T X_n^*(t)\, \chi_n(t)\, dt = \varphi_n$$

$$\int_0^T \chi_n^*(t)\, \chi_n(t)\, dt = \Psi_n, \qquad \int_0^T X^*(t)\, X(t)\, dt = \theta$$

Тогда $\varphi_1 \leqslant \theta_1$. Если имеет место равенство $\varphi_1 = \theta_1$, то $u^1(t)$ будет уже оптимальным управлением и процесс окончен. В случае $\varphi_1 < \theta_1$ поступаем следующим образом:

а) если $\psi_1 \leqslant \varphi_1$, то полагаем

$$u^2(t) = v^1(t), \qquad X_2(t) = \chi_1(t)$$

б) если $\psi_1 > \varphi_1$, то составим

$$u(t) = \alpha u^1(t) + (1-\alpha) v^1(t) \qquad (0 < \alpha < 1)$$

Ввиду линейности системы (1.1) соответствующее решение имеет вид

$$X(t) = \alpha X_1(t) + (1-\alpha)\chi_1(t)$$

Подберем α так, чтобы θ принимал наименьшее возможное значение (среди $\alpha \in (0, 1)$). Как легко показать, это будет при

$$\alpha = \frac{\psi_1 - \varphi_1}{\theta_1 - 2\varphi_1 + \psi_1} \qquad (3.1)$$

Возьмем

$$u^2(t) = \alpha u^1(t) + (1-\alpha) v^1(t), \qquad X_2(t) = \alpha X_1(t) + (1-\alpha)\chi_1(t)$$

где α выбирается по формуле (3.1), и тогда $\theta_2 < \theta_1$ и т. д.

Таким образом, всегда можно выбрать $X_2(t)$, если $u^1(t)$ не оптимальное. Решая вспомогательную задачу при $C(t) = X_2(t)$, получаем $\chi_2(t)$ и далее поступаем, как прежде. Построенные последовательности $u^1(t)$, $u^2(t), \ldots, X_1(t), X_2(t), \ldots$ таковы, что $\theta_{m+1} \leqslant \theta_m$; при этом если хоть раз оказался знак равенства, то найдено оптимальное управление, и процесс окончен. Последовательность θ_m сходится. Если через Q^2 обозначить минимально возможное значение функционала (1.5) (как будет показано ниже, нижняя грань по $u(t) \in U$ функционала (1.5) достигается), то

$$\sigma_m \frac{\varphi_m{}^2}{\theta_m} \leqslant Q^2 \leqslant \theta_m, \qquad \sigma_m = 1 \quad (\varphi_m > 0), \qquad \sigma_m = 0 \quad (\varphi_m \leqslant 0)$$

Таким образом, на каждом шагу нам известен промежуток, в котором находится минимум функционала.

4°. **Основная теорема.** Последовательные приближения, описанные в 3°, монотонно уменьшают значения функционала $J(u)$.

При этом последовательность функций $X_1(t), X_2(t), \ldots$, сходится на $[0, T]$ к непрерывной вектор-функции $C_0(t)$, а последовательность значений $\theta_1, \theta_2, \ldots$ сходится к

$$\min_{u \in U} \int_0^T X^*(t, u)\, X(t, u)\, dt$$

Существует оптимальное управление. Кроме того, для тех i, для которых мера множества Ω_i нулей функции

$$\Phi_i(t) = \left[\int_t^T Y^*(\tau)\, C_0(\tau)\, d\tau\right]^* [Y^{-1}(t)\, B_i(t)]$$

равна нулю, соответствующие $u_i^m(t)$ сходятся к единственному оптимальному управлению $u_i(t)$ по мере.

Доказательство. Уже установлено, что

$$\|X_m\| = \sqrt{\theta_m} \to C \quad \text{при } m \to \infty$$

Если $X_0 \neq 0$, то $C > 0$. Вначале покажем, что

$$\lim_{m\to\infty}\left[\min_{u\in U} \int_0^T X^*(t, u)\, X_m(t)\, dt\right] = \inf \lim_{m\to\infty} \varphi_m \geqslant C^2 \qquad (4.1)$$

Предположим, что это не так, т. е. существует такое $r_0 > 0$, что по любому N найдется $m > N$, что

$$\varphi_m = C^2 - r_m \leqslant C^2 - r_0 \qquad (4.2)$$

Рассматриваем лишь те $X_m(t)$, для которых верно неравенство (4.2). Заметим, что тогда $\psi_m > \varphi_m$, ибо в противном случае $\psi_m \leqslant \varphi_m$ и по нашему правилу выбора $X_{m+1}(t) = \chi_m(t)$, но для $\chi_m(t)$

$$\psi_m \leqslant \varphi_m \leqslant C^2 - r_0 < C^2$$

что противоречит тому, что $\| X_m \|$ — убывающая последовательность, имеющая своим пределом C. Значит, $\psi_m > \varphi_m$, тогда

$$X_{m+1}(t) = \alpha X_m(t) + (1-\alpha)\chi_m(t)$$

где α выбрано по формуле (3.1). Тогда

$$\theta_{m+1} = \alpha^2 [\theta_m - 2\varphi_m + \psi_m] + 2\alpha[\varphi_m - \psi_m] + \psi_m = \frac{\theta_m \psi_m - \varphi_m^2}{\theta_m - 2\varphi_m + \psi_m}$$

Взяв m так, чтобы

$$\theta_m = C^2 + \varepsilon_m, \qquad \varepsilon_m \to 0 \qquad \text{при } m \to \infty$$

имеем

$$\theta_{m+1} = \frac{C^2 [\psi_m + \psi_m \varepsilon_m / C^2 - C^2 + 2r_m - r_m^2 / C^2]}{\psi_m + \varepsilon_m - C^2 + 2r_m} < C^2$$

так как ψ_m ограничено (по свойствам линейной системы ограничена каждая координата, а тогда ограничен и интеграл ψ_m). Но неравенство $\theta_{m+1} < C^2$ невозможно, так как $\| X_m \| \to C$ сверху. Отсюда и следует неравенство (4.1). Но так как $\varphi_m \leqslant \theta_m$, то верно, что $\varphi_m \to C^2$ при $m \to \infty$. Вернемся к последовательности

$$X_1(t),\ X_2(t),\ \ldots \tag{4.3}$$

Это последовательность дифференцируемых на $[0, T]$ вектор-функций. Из свойств линейных систем следует, что последовательности координат

$$(x_1^1(t),\ x_2^1(t),\ \ldots),\qquad (x_1^2(t),\ x_2^2(t),\ \ldots),\qquad \ldots,\qquad (x_1^n(t),\ x_2^n(t),\ \ldots)$$

равностепенно непрерывны и равномерно ограничены на $[0, T]$, а тогда, по теореме Арцела — Асколи [1], можно выделить сходящуюся подпоследовательность вектор-функций, причем предел — тоже непрерывная вектор-функция. Допустим, что существуют две подпоследовательности

$$X_{m_1}(t),\qquad X_{m_2}(t),\ \ldots,\qquad X_{m_j}(t) \xrightarrow[j\to\infty]{} C_0(t)$$

$$X_{m_1}'(t),\qquad X_{m_2}'(t),\ \ldots,\qquad X_{m_i}'(t) \xrightarrow[i\to\infty]{} C_0'(t)$$

и пусть

$$C_0(t) \neq C_0'(t), \qquad \| C_0 \| = \| C_0' \| = C$$

Тогда

$$\int_0^T C_0^*(t)\, C_0'(t)\, dt \leqslant C^2 - \rho_0, \qquad \rho_0 > 0 \qquad\qquad \int_0^T [C_0(t) - C_0'(t)]^2\, dt > 0$$

(последнее неравенство в силу того, что $C_0(t)$ и $C_0'(t)$— непрерывные вектор-функции и тождественно не совпадают). Тогда

$$\int_0^T C_0^*(t)\, C_0'(t)\, dt < \frac{1}{2}\left[\int_0^T C_0^2(t)\, dt + \int_0^T C_0'^2(t)\, dt\right] = C^2$$

Но, взяв $X_{m_j}(t)$ близкой к $C_0(t)$, а $X_{m_i}'(t)$ — близкой к $C_0'(t)$, получим

$$\int_0^T X_{m_i}'^*(t)\, X_{m_j}(t)\, dt \leqslant C^2 - \rho_0 + \varepsilon < C^2$$

ибо ε может быть сколь угодно мало. Но тогда

$$\min_{u \in U} \int_0^T X_{m_j}^*(t)\, X(t, u)\, dt \leqslant \int_0^T X_{m_j}^*(t)\, X_{m_i}'(t)\, dt < C^2$$

что противоречит неравенству (4.1). Отсюда последовательность функций (4.3) сходится к некоторой непрерывной вектор-функции $C_0(t)$.

Покажем также, что

$$\theta_m \to \min_{u \in U} \int_0^T X^*(t, u) X(t, u)\, dt \quad \text{при } m \to \infty$$

Пусть это не так, т. е. пусть существует такое $w(t) \in U$, что

$$\int_0^T X^*(t, w) X(t, w)\, dt < C^2$$

Тогда, взяв $X_m(t)$ близкой к $C_0(t)$, получим

$$\int_0^T X_m^*(t) X(t, w)\, dt < C^2$$

Тогда и

$$\min_{u \in U} \int_0^T X_m^*(t) X(t, u)\, dt \leqslant \int_0^T X_m^*(t) X(t, w)\, dt < C^2$$

что противоречит неравенству (4.1). Итак

$$\theta_m \to \min_{u \in U} \int_0^T X^*(t, u) X(t, u)\, dt \quad \text{при } m \to \infty$$

но тогда и

$$\int_0^T X_m^*(t) C_0(t)\, dt \to \min_{u \in U} \int_0^T X^*(t, u) C_0(t)\, dt \quad \text{при } m \to \infty$$

и, по 2°, для тех i, для которых мера множества Ω_i нулей функций

$$\Phi_i(t) = \left[\int_0^T Y^*(\tau) C_0(r)\, d\tau \right]^* [Y^{-1}(t) B_i(t)]$$

равна нулю, соответствующие $u_i^m(t)$ сходятся по мере к единственному оптимальному управлению

$$u_i^*(t) = -\operatorname{sign} \Phi_i(t) \qquad (4.4)$$

Тем самым доказано и его существование.

В [2] (стр. 146—147) фактически показано, что в любом случае (независимо от меры множеств Ω_i) оптимальное управление существует. На множествах $[0, T] - \Omega_i$ соответствующее оптимальное управление $u_i(t)$ единственно и совпадает с (4.4).

Оптимальное решение (траектория) $X(t)$ единственно, это уже показано. Вектор-функция $X(t)$ имеет единственную производную, но отсюда еще не следует единственность оптимального управления, так как уравнению

$$\sum_{i=1}^r B_i(t) u_i(t) = X^\circ(t) - A(t) X(t) - F(t) \qquad (t \in [0, T])$$

может удовлетворять и несколько управлений $u(t) \in U$ (здесь $X(t)$ предполагается известной вектор-функцией).

Благодарю В. И. Зубова за полезные советы и замечания.

Поступила 5 I 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959.
2. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.