СВОБОДНЫЕ УПРУГИЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ТРУБЫ БЕСКОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

Я. А. Миндлин (Москва)

Исследуется трехмерный случай свободных колебаний, распространяющихся по поверхности бесконечно кругового цилиндра, представляющего собой вырез в бесконечном упругом пространстве. Пусть в бесконечном упругом пространстве дан вырез в виде бесконечно длинного кругового цилиндра диаметром $2R$, ось которого примем за ось z, а r, θ суть полярные координаты точек плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра. Векторное уравнение движения однородной и изотропной упругой среды при отсутствии массовых сил имеет вид

$$(\lambda+2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}-\mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u}=\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} \tag{1}$$

где $\mathbf{u}$ — вектор смещения, λ, μ — постоянные Ляме, ρ — плотность. Разобьем вектор смещения $\mathbf{u}$ на сумму двух векторов потенциального и соленоидального

$$\mathbf{u}=\operatorname{grad}\Phi+\operatorname{rot}\psi \tag{2}$$

Тогда уравнение (1) будет удовлетворено, если положим

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2},\qquad \nabla^2\psi=\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\qquad\left(a=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}},\quad b=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\right) \tag{3}$$

где ∇ — оператор Гамильтона. Формула (2) представляет собой общее решение уравнения (1). Векторный потенциал можно всегда выбирать так, чтобы составляющая его по z равнялась нулю. Выражая градиент и вихрь в цилиндрических координатах и имея в виду, что $\nabla^2\psi=\operatorname{grad}\operatorname{div}\psi-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\psi$, получим

$$u_r=\frac{\partial\Phi}{\partial r}-\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial z},\qquad u_\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}+\frac{\partial\psi_r}{\partial z},\qquad u_z=\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\psi_\varphi)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_r}{\partial\varphi} \tag{4}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\\ \frac{\partial^2\psi_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_r}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi_r}{\partial z^2}-\frac{1}{r^2}\left(\psi_r-\frac{\partial^2\psi_r}{\partial\varphi^2}\right)-\frac{2}{r^2}\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial\varphi}=\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2\psi_r}{\partial t^2}\\ \frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial z^2}-\frac{1}{r^2}\left(\psi_\varphi-\frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial\varphi^2}\right)+\frac{2}{r^2}\frac{\partial\psi_r}{\partial\varphi}=\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial t^2}\end{gathered} \tag{5}$$

Для компонентов напряжения, действующего на площадку границы, имеем

$$\sigma_r=\lambda\operatorname{div}\mathbf{u}+2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad \tau_{r\varphi}=\mu\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right)\right\},\quad \tau_{rz}=\mu\left\{\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right\} \tag{6}$$

где u_r, u_φ, u_z определяются выражениями (4). Положим, как это делает Терезава [1],

$$\psi_r+i\psi_\varphi=\psi_1,\qquad \psi_r-i\psi_\varphi=\psi_2\qquad (i^2=-1) \tag{7}$$

Тогда

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2}-\frac{1}{r^2}\left(\psi_1-\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\varphi^2}\right)+\frac{2i}{r^2}\frac{\partial\psi_1}{\partial\varphi}=\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}\\ \frac{\partial^2\psi_2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_2}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi_2}{\partial z^2}-\frac{1}{r^2}\left(\psi_2-\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\varphi^2}\right)-\frac{2i}{r^2}\frac{\partial\psi_2}{\partial\varphi}=\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}\end{gathered} \tag{8}$$

Таким образом, из системы уравнений (5) при помощи подстановки (7) получили независимые одно от другого уравнения (8). Пусть

$$\Phi=\Phi_1e^{ipt}e^{in\varphi} \tag{9}$$

Тогда

$$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}+\left(h^2-\frac{n^2}{r^2}\right)\Phi_1+\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2}=0\qquad\left(h^2=\frac{p^2}{a^2}\right). \tag{10}$$

Подставляя $\Phi_1=\Phi_2(r)\,e^{-i\theta z}$ в (10), имеем

$$r^2\frac{d^2\Phi_2}{dr^2}+r\frac{d\Phi_2}{dr}-[(\theta^2-h^2)r^2+n^2]\,\Phi_2=0 \tag{11}$$

Рассматривая колебания, быстро затухающие в глубину, в интеграл уравнения (11) введем функцию Макдональда $K_n(\sqrt{\theta^2 - h^2}r)$, которая, как известно, при $\sqrt{\theta^2 - h^2} > 0$ и $r \to \infty$ стремится к нулю по экспоненциальному закону. Таким образом, решение первого из уравнений (5) при $r \geqslant R$ имеем в виде

$$\Phi = AK_n(\sqrt{\theta^2 - h^2}r)\, e^{in\varphi} e^{i(pt-\theta z)} \tag{12}$$

Если рассматривать колебания, характеризующиеся биениями, то за интеграл уравнения (11) нужно взять функцию Вебера — Неймана. Аналогично найденному решению (12) получим решение уравнений (8) в виде ($k^2 = p^2 / b^2$)

$$\psi_1 = BK_{n+1}(\sqrt{\theta^2 - k^2}r)\, e^{in\varphi} e^{i(pt-\theta z)}, \qquad \psi_2 = CK_{n-1}(\sqrt{\theta^2 - k^2}r)\, e^{in\varphi} e^{i(pt-\theta z)} \tag{13}$$

В формулах (12) и (13) величины A, B, C — постоянные. Из формулы (13) получаем выражение для составляющих ψ_r, ψ_φ векторного потенциала

$$\begin{aligned} \psi_r &= \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} = \frac{e^{i(pt-\theta z)}}{2} \{BK_{n+1}(\beta r) + CK_{n-1}(\beta r)\} e^{in\varphi} \\ \psi_\varphi &= \frac{\psi_1 - \psi_2}{2i} = \frac{e^{i(pt-\theta z)}}{2i} \{BK_{n+1}(\beta r) - CK_{n-1}(\beta r)\} e^{in\varphi} \end{aligned} \tag{14}$$

Скалярный потенциал напишем в виде

$$\Phi = Ae^{i(pt-\theta z)} K_n(\alpha r)\, e^{in\varphi} \qquad (\alpha = \sqrt{\theta^2 - h^2}, \quad \beta = \sqrt{\theta^2 - k^2}) \tag{15}$$

Подставляя формулы (14), (15) в (4), а затем полученные выражения в (6) и воспользовавшись при этом рекуррентными формулами для функций $K_n(x)$

$$\begin{gathered} K_n'(x) = -{}^1/_2 [K_{n+1}(x) + K_{n-1}(x)], \qquad xK_n'(x) = -nK_n(x) - xK_{n+1}(x) \\ 2K_n''(x) = {}^1/_2 K_{n-2}(x) + K_n(x) + {}^1/_2 K_{n+2}(x) \end{gathered} \tag{16}$$

получим выражения для проекций вектора смещения и компонентов вектора напряжения на поверхности выреза при $r = R$ (17)

$$u_r^\circ = -{}^1/_2 A\alpha \{[K_{n+1}(\alpha R) + K_{n-1}(\alpha R)]\, e^{i(pt-\theta z)} e^{in\varphi} + {}^1/_2\theta\, [BK_{n+1}(\beta R) - CK_{n-1}(\beta R)]\}$$

$$u_\varphi^{(0)} = Ain / RK_n(\alpha R)\, e^{i(pt-\theta z)} e^{in\varphi} - {}^1/_2 i\theta\, [BK_{n+1}(\beta R) + CK_{n-1}(\beta R)]\, e^{i(pt-\theta z)} e^{in\varphi}$$

$$u_z^{(0)} = -Ai\theta K_n(\alpha R)\, e^{i(pt-\theta z)} e^{in\varphi} + {}^1/_2 \beta i\, (B - C)\, K_n(\beta R)\, e^{i(pt-\theta z)} e^{in\varphi}$$

$$\begin{aligned} [\tau_{rz}]\,|_{r=R} = \mu\, \{&Ai\theta\alpha\, [K_{n+1}(\alpha R) + K_{n-1}(\alpha R)]\, e^{i(pt-\theta z)} e^{in\varphi} - \\ &- {}^1/_4 iB\, [(2\theta^2 + \beta^2) K_{n+1}(\beta R) + \beta^2 K_{n-1}(\beta R)]\, e^{i(pt-\theta z)} e^{in\varphi} + \\ &+ {}^1/_4 iC\, [(2\theta^2 + \beta^2) K_{n-1}(\beta R) + \beta^2 K_{n+1}(\beta R)]\, e^{i(pt-\theta z)} e^{in\varphi} \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} [\tau_{r\varphi}]_{r=R} = \mu\, \{&(-2ni / R)\, A\, [(n+1)\, K_n(\alpha R) / R + \alpha K_{n-1}(\alpha R)] + \\ &+ {}^1/_2 \theta i \beta B K_{n+2}(\beta R) + {}^1/_2 \theta i \beta C K_{n-2}(\beta R)\}\, e^{i(pt-\theta z)} e^{in\varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\sigma_r]_{r=R} = \mu\, \{&A\, [(2h^2 - k^2 + \alpha^2)\, K_n(\alpha R) + {}^1/_2 \alpha^2 K_{n-2}(\alpha R) + {}^1/_2 \alpha^2 K_{n+2}(\alpha R)] + \\ &+ \theta\beta\, \{-{}^1/_2 B\, [K_{n+2}(\beta R) + K_n(\beta K)]\} + {}^1/_2 C\, [K_n(\beta R) + K_{n-2}(\beta R)]\}\, e^{i(pt-\theta z)} e^{in\varphi} \end{aligned}$$

Для получения условия отсутствия напряжений на поверхности цилиндра в (19) полагаем σ_r, τ_{rz}, $\tau_{r\varphi}$ при $r = R$ равными нулю. Тогда получаем три линейных однородных уравнения для определения постоянных A, B, C.

Для существования решений A, B, C, отличных от нуля, необходимо, чтобы определитель третьего порядка $\Delta(\theta) = |a_{ij}|$ обращался в нуль. Члены определителя

a_{ij} имеют следующий вид:

$$a_{11} = \theta\alpha\,[K_{n+1}(\alpha R) + K_{n-1}(\alpha R)], \qquad a_{12} = -\frac{1}{4}[(2\theta^2+\beta^2)K_{n+1}(\beta R) + \beta^2 K_{n-1}(\beta R)$$

$$a_{13} = \frac{1}{4}[(2\theta^2+\beta^2)K_{n-1}(\beta R) + \beta^2 K_{n+1}(\beta K)], \qquad a_{22} = \frac{1}{2}\theta\beta K_{n+2}(\beta R)$$

$$a_{21} = -(2n/R^2)[(n+1)K_n(\alpha R) + \alpha R K_{n-1}(\alpha R], \qquad a_{23} = \frac{1}{2}\theta\beta K_{n-2}(\beta R)$$

$$a_{31} = (2h^2 - k^2 + \alpha^2)K_n(\alpha R) + \frac{1}{2}\alpha^2 K_{n-2}(\alpha R) + \frac{1}{2}\alpha^2 K_{n+2}(\alpha R)$$

$$a_{32} = -\frac{1}{2}\theta\beta\,[K_{n+2}(\beta R) + K_n(\beta R], \qquad a_{33} = \frac{1}{2}\theta\beta\,[K_n(\beta R) + K_{n-2}(\beta R)]$$

Таким образом, уравнение частот имеет вид

$$\Delta(\theta) = |a_{ij}| = 0 \tag{20}$$

Определитель третьего порядка дает трансцендентное уравнение для определения θ. Будем рассматривать высокочастотные колебания. Обозначим через $\vartheta = \theta / p$ величину, обратную скорости распространения волны вдоль цилиндра.

Предполагая, что частота является величиной достаточно большой, в уравнении (20) функции $K_n(x)$ заменим их асимптотическим выражением. Имеем

$$K_n(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,e^{-x} \tag{21}$$

Подставляя (21) в (20), находим

$$\Delta(\theta) \sim \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^3 \begin{vmatrix} \dfrac{2\theta\alpha e^{-\alpha R}}{\sqrt{\alpha R}} & \dfrac{-{}^1/_2(\theta^2+\beta^2)e^{-\beta R}}{\sqrt{\beta R}} & \dfrac{{}^1/_2(\theta^2+\beta^2)e^{-\beta R}}{\sqrt{\beta R}} \\ \dfrac{-2ne^{-\alpha R}}{R^2\sqrt{\alpha R}}[(n+1)+\alpha R] & \dfrac{\theta\beta e^{-\beta R}}{2\sqrt{\beta R}} & \dfrac{\theta\beta e^{-\beta R}}{2\sqrt{\beta R}} \\ \dfrac{(2h^2-k^2+2\alpha^2)e^{-\alpha R}}{\sqrt{\alpha R}} & \dfrac{-\theta\beta e^{-\beta R}}{\sqrt{\beta R}} & \dfrac{\theta\beta e^{-\beta R}}{\sqrt{\beta R}} \end{vmatrix} \tag{22}$$

Складывая второй столбец с третьим в (22), легко найдем

$$\Delta(\theta) \sim \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^3 \frac{1}{\sqrt{\alpha R}}\,\frac{1}{\sqrt{\beta R}}\,e^{-\alpha R}e^{-\beta R}\left\{\frac{-\theta\sqrt{\theta^2-k^2}}{2}\,p^4\left[\left(2\frac{\theta^2}{p^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2 - 4\frac{\theta^2}{p^2}\sqrt{\frac{\theta^2}{p^2}-\frac{1}{a^2}}\sqrt{\frac{\theta^2}{p^2}-\frac{1}{b^2}}\right]\right\} \tag{23}$$

Выражение в квадратных скобках (23) носит название функции Релея [2]. Как известно, уравнение

$$(2\vartheta^2 - b^{-2})^2 - 4\vartheta^2\sqrt{\vartheta^2 - a^{-2}}\sqrt{\vartheta^2 - b^{-2}} = 0 \tag{24}$$

имеет единственный положительный вещественный корень и другой равный ему по модулю отрицательный. Таким образом, когда частота стремится к бесконечности, уравнение (20) имеет единственный положительный вещественный корень и другой равный ему по модулю отрицательный. Эти корни являются корнями уравнения (24), носящего название уравнения Релея. Обозначим эти корни через $\vartheta = \pm 1/c$, где c — скорость волны Релея.

Итак приходим к результату: при стремлении частоты к бесконечности скорость волны по поверхности цилиндра будет стремиться к скорости волны Релея. Для случая колебаний с осевой симметрией уравнение $\Delta(\theta) = 0$ исследовано в [3].

Отметим, что рассмотренный прием применим и при исследовании свободных колебаний в случае цилиндра. При этом в выражениях (12) и (14) вместо функций Макдональда $K_{n-1}(\xi)$, $K_n(\xi)$, $K_{n-1}(\xi)$ взять бесселевы функции [4] от мнимого аргумента $I_{n+1}(\xi)$, $I_n(\xi)$, $I_{n-1}(\xi)$.

В этом случае убывание в глубь цилиндра будет также происходить в силу свойства функции $I_n(\xi)$. Условие отсутствия напряжений на поверхности цилиндра приведет к уравнению, аналогичному $\Delta(\theta)=0$, которое было исследовано для случая колебаний с осевой симметрией [5].

Поступила 29 I 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Terezawa. Oscillats of the deep-sea surf. caused by a local disturb. Sci. Rept. Tôhoku Imp. Univ., 1917, vol. 13, S.
2. Reyleigh. Waves propagated along plane surface of an elastic solid. Proc. Math. Soc., 1886, vol. 17.
3. Миндлин Я. А. Распространение волн по поверхности бесконечно длинного кругового цилиндра, представляющего собой вырез в бесконечно упругом пространстве. ДАН СССР, 1944, т. XLII, № 4.
4. Снеддон И. Н., Берри Д. С. Классическая теория упругости. М., ИЛ., 1961.
5. Миндлин Я. А. Распространение волн по поверхности бесконечно длинного кругового цилиндра. ДАН СССР, 1946, т. LII, № 2.

ПОСТРОЕНИЕ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ, ОПТИМАЛЬНОГО В ИНТЕГРАЛЬНОМ СМЫСЛЕ

В. Ф. Демьянов (Ленинград)

Дается метод последовательных приближений для разыскания оптимального программного управления в линейной системе, показана сходимость этого метода.

1°. Постановка задачи. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$X^{\cdot}(t) = A(t)\, X(t) + \sum_{i=1}^{r} B_i(t)\, u_i(t) + F(t) \tag{1.1}$$

с начальным условием

$$X(0) = X_0 \tag{1.2}$$

где $A(t)$ — n-мерная квадратная матрица; $F(t)$, $B_i(t)$, $i = 1, \ldots, r$ — n-мерные векторы. Будем считать, что элементы матрицы $A(t)$, а также компоненты векторов $F(t), B_i(t)$ $(i = 1, \ldots, r)$ представляют собой вещественные, непрерывные, заданные на $[0, T]$ функции. Пусть T фиксировано.

Будем также считать, что управления $u_1(t), \ldots, u_r(t)$ — вещественные функции времени, заданные на $[0, T]$ и удовлетворяющие неравенствам

$$|u_i(t)| \leqslant 1 \qquad (i = 1, \ldots, r) \tag{1.3}$$

Весь класс таких функций (обозначим его U) можно считать совпадающим со всеми кусочно-непрерывными функциями или, в общем случае, со всеми измеримыми функциями.

Пусть $X(t, u)$ — решение уравнения (1.1) с начальным условием (1.2) при выбранном $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))$; $N(t)$ — квадратная симметричная неотрицательно определенная матрица с непрерывными коэффициентами, а $*$ означает транспонирование.

Требуется выбрать $u(t) \in U$ так, чтобы функционал

$$J(u) = \int_0^T X^*(t, u)\, N(t)\, X(t, u)\, dt \tag{1.4}$$

принимал наименьшее возможное значение.

Ниже приводится метод последовательных приближений для минимизации функционала (1.4). Метод иллюстрируется для случая, когда функционал имеет вид

$$J(u) = \int_0^T X^*(t, u)\, X(t, u)\, dt \tag{1.5}$$