ВОЛНЫ РЭЛЕЯ В НЕОДНОРОДНОМ УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

А. Г. Аленицын (Ленинград)

Рассматривается поле смещений в изотропной упругой среде, заполняющей полуплоскость, коэффициенты Ламе и плотность которой являются произвольными гладкими функциями глубины. Граница предполагается свободной от напряжений. Строится точное решение в виде монохроматической волны, которое затем исследуется асимптотически при больших частотах. Оказывается, что существует решение, аналогичное обычной волне Релея в однородной упругой полуплоскости. Получено выражение для поправочного члена в асимптотическом представлении дисперсии фазовой скорости.

Пусть полуплоскость $-\infty < x < +\infty$, $z \geqslant 0$ заполнена упругой средой с коэффициентами Ламе $\lambda(z)$, $\mu(z)$ и плотностью $\rho(z)$ — достаточно гладкими функциями глубины z. Требуется найти вектор смещений $\mathbf{u}(x, z, t) = (u_x(x, z, t), u_z(x, z, t))$, удовлетворяющий при $z \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ уравнениям динамической теории упругости

$$L\mathbf{u} = 0 \qquad \left(L = -\rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} + M + N\right)$$

$$M = \begin{Vmatrix} \nu \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} & (\nu - \mu) \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ (\nu - \mu) \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial z} & \nu \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + \mu \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \end{Vmatrix} \qquad (\nu = \lambda + 2\mu) \tag{1}$$

$$N = \begin{Vmatrix} \mu' \dfrac{\partial}{\partial z} & \mu' \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \lambda' \dfrac{\partial}{\partial x} & \nu' \dfrac{\partial}{\partial z} \end{Vmatrix}, \qquad I = \begin{Vmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{Vmatrix}$$

и условию отсутствия напряжений на границе

$$P\mathbf{u} = 0 \quad \text{при } z = 0, \qquad P = \begin{Vmatrix} \mu \dfrac{\partial}{\partial z} & \mu \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \lambda \dfrac{\partial}{\partial x} & \nu \dfrac{\partial}{\partial z} \end{Vmatrix} \tag{2}$$

Будем искать частное решение задачи (1) — (2) в виде

$$\mathbf{u}(x, z, t; k) = e^{ikx - i\zeta t}\, \mathbf{G}(z, k, \zeta) \tag{3}$$

убывающее с глубиной. Здесь $k > 0$, ζ — комплексный параметр. Подстановка (3) в (1) и (2) дает для $\mathbf{G}$ систему уравнений

$$\frac{d^2}{dz^2}\mathbf{G} + ikA \frac{d}{dz}\mathbf{G} + (ik)^2 B\mathbf{G} + C \frac{d}{dz}\mathbf{G} + ikD\mathbf{G} = 0 \tag{4}$$

и граничное условие

$$\frac{d}{dz}\mathbf{G} + ikE\mathbf{G} = 0, \qquad z = 0 \tag{5}$$

где элементы матриц A, B, C, D, E второго порядка зависят от z и σ ($\sigma = \zeta k^{-1}$).

Пусть $\mathbf{G}^{(p)}(z, k, \sigma)$ и $\mathbf{G}^{(s)}(z, k, \sigma)$ — два линейно независимых решения системы (4), убывающие с глубиной. Подберем постоянные α и β так, чтобы решение $\alpha\mathbf{G}^{(p)} + \beta\mathbf{G}^{(s)}$ системы (4) удовлетворяло условию (5). Легко видеть, что α и β определяются из системы уравнений

$$D_p(k, \sigma)\,\alpha + D_s(k, \sigma)\,\beta = 0, \qquad E_p(k, \sigma)\,\alpha + E_s(k, \sigma)\,\beta = 0 \tag{6}$$

где

$$D_p(k, \sigma) = \left(\frac{d}{dz} G_x^{(p)} + ikG_z^{(p)}\right)\Big|_{z=0} \qquad \left(p = \frac{\mu}{\nu}, \quad 0 < p < \frac{1}{2}\right)$$

$$E_p(k, \sigma) = \left(\frac{d}{dz} G_z^{(p)} + ik(1 - 2p)\, G_x^{(p)}\right)\Big|_{z=0} \tag{7}$$

Выражения для D_s и E_s — аналогичны. Очевидно, ненулевым решениям задачи (4) — (5) соответствуют на комплексной плоскости σ нули функции

$$\Delta (k, \sigma) = D_p (k, \sigma) E_s (k, \sigma) - E_p (k, \sigma) D_s (k, \sigma) \tag{8}$$

и, наоборот, каждому решению $\sigma_* (k)$ уравнения $\Delta (k, \sigma) = 0$ соответствует решение задачи (1)—(2) вида

$$u_* (x, z, t; k) = e^{ik(x-\sigma_*(k)t)} [\alpha \mathbf{G}^{(p)} + \beta \mathbf{G}^{(s)}] \tag{9}$$

где α и β не равны нулю одновременно.

Для асимптотического исследования корней уравнения $\Delta (k, \sigma) = 0$ потребуется асимптотика при $k \to +\infty$ решений системы (4). Удобно записать (4) в виде системы четырех уравнений первого порядка. Положим

$$G_x = z_1, \qquad G_z = z_2, \qquad \frac{d}{dz} G_x = ikz_3, \qquad \frac{d}{dz} G_z = ikz_4 \tag{10}$$

Система (4) сводится при этом к системе

$$\mathbf{z}' = ikH (z, \sigma) \mathbf{z} + K (z) \mathbf{z} \tag{11}$$

для вектора $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ (штрих означает дифференцирование по z). Здесь элементы матрицы H четвертого порядка зависят от $\mu (z)$, $\nu (z)$, $\rho (z)$ и линейно от σ^2, элементы K — от $\mu' (z)$, $\nu' (z)$ и $\rho' (z)$.

При фиксированном σ можно применить классическую теорему об асимптотическом разложении решений линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих большой параметр (см., например, [1,2]). В соответствии с условиями этой теоремы потребуем от элементов матрицы H двукратной (от элементов матрицы K — однократной) дифференцируемости по z на некотором конечном промежутке $[0, \zeta]$. Если при $0 \leqslant z \leqslant \zeta$ характеристические числа λ_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ матрицы H различны и для фиксированных пар индексов j, l величины $\operatorname{Re} [ik (\lambda_j - \lambda_l)]$ не меняют знака, то при достаточно большом k существует на промежутке $[0, \zeta]$ фундаментальная матрица $\Phi (z, k, \sigma)$ системы (11) такая, что

$$\Phi (z, k, \sigma) = \left[\Phi_0 (z, \sigma) + \frac{\Phi_1 (z, \sigma)}{(ik)} + O (k^{-2}) \right] \exp \int_0^z [ik\Lambda (\xi, \sigma) + Q (\xi, \sigma)] \, d\xi \tag{12}$$

Здесь Φ_0 — неособая матрица, приводящая H к диагональной форме Λ,

$$\Phi_0^{-1} H \Phi_0 = \Lambda, \qquad \Phi_1 = \Phi_0 V, \qquad T = \Phi_0^{-1} K \Phi_0 - \Phi_0^{-1} \Phi_0'$$

$$V_{lj} = \frac{T_{lj}}{\lambda_j - \lambda_l} \quad \text{при } j \neq l, \qquad V_{jj} = \int_0^z \sum_{l \neq j} T_{jl} V_{lj} \, d\xi$$

Q — диагональная матрица с элементами $Q_{jj} = T_{jj}$. Оценка в формуле (12) равномерна по $z \in [0, \zeta]$.

Нетрудно видеть, что теорема остается справедливой и в рассматриваемом случае, если параметр σ изменяется в некоторой ограниченной области S такой, что условия теоремы в ней выполнены. При этом оценка в формуле (12) равномерна по $\sigma \in S$. (Область S зависит, вообще говоря, от выбора ζ.)

Легко подсчитать, что в рассматриваемом случае можно принять

$$\lambda_1 = im_p (z, \sigma), \qquad \lambda_2 = -im_p (z, \sigma), \qquad \lambda_3 = im_s (z, \sigma), \qquad \lambda_4 = -im_s (z, \sigma)$$

где

$$m_p^2 (z, \sigma) = 1 - \sigma^2 n_p^2 (z), \qquad m_s^2 (z, \sigma) = 1 - \sigma^2 n_s^2 (z)$$

$$n_p^2 (z) = \rho (z) / \nu (z), \qquad n_s^2 (z) = \rho (z) / \mu (z)$$

На плоскости σ проведем разрезы $(-\infty, -v_s (z)]$ и $[v_s (z), +\infty)$ и фиксируем ветви двузначных функций $m_p (z, \sigma)$ и $m_s (z, \sigma)$ условием $m_p (z, 0) = m_s (z, 0) = +1$. Пусть $\lambda (z)$, $\mu (z)$ и $\rho (z)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции. Очевидно, скорость $v_p (z)$ продольной волны и скорость $v_s (z)$ поперечной волны и обратные им величины $n_p(z) = v_p^{-1}(z)$ и $n_s(z) = v_s^{-1}(z)$ также имеют непрерывные вторые производные. Пусть $\min v_s(z) = \omega$ для $z \in [0, \zeta]$. Легко видеть, что область S можно выбрать таким образом, чтобы при $0 < \varepsilon < {}^1/_2\,\omega$ промежуток $[\varepsilon, \omega - \varepsilon]$ вместе с некоторой своей окрестностью целиком попал в S.

Из четырех линейно независимых векторов — решений, составляющих фундаментальную матрицу системы (11), — два вектора (назовем их $\mathbf{z}^{(p)}$ и $\mathbf{z}^{(s)}$) имеют в области S убывающий с глубиной характер, два других — возрастающий. Соответственно существуют (при достаточно больших k) два убывающих решения $\mathrm{G}^{(p)}$ и $\mathrm{G}^{(s)}$ системы (4). Согласно формулам (10), (12), (7) и (8) имеем при $k \to +\infty$

$$\Delta(k, \sigma) = (ik)^2 \Delta_0(\sigma) + ik\Delta_1(\sigma) + O(1) \tag{13}$$

равномерно в S.

Известно [1], что при фиксированных $k > 0$ и z функции $\mathbf{z}^{(p)}(z, k, \sigma)$ и $\mathbf{z}^{(s)}(z, k, \sigma)$, а следовательно, и $\Delta(k, \sigma)$ регулярны по σ (по крайней мере в области S). Оказывается, что с точностью до несущественного множителя $\Delta_0(\sigma)$ совпадает с известным определителем Рэлея

$$R_0(\sigma) = [1 + m_s^2(0, \sigma)]^2 - 4m_s(0, \sigma)\, m_p(0, \sigma)$$

имеющим положительный корень $v_0 < v_s(0)$, причем $R_0'(v_0) \neq 0$. Функции $\Delta_0(\sigma)$ и $\Delta_1(\sigma)$ регулярны в области S. Следовательно[1], если $v_0 \in S$, то при достаточно большом k существует корень $v_R(k)$ уравнения $\Delta(k, \sigma)$ такой, что

$$v_R(k) = v_0 + k^{-1}v_1 + O(k^{-2}) \tag{14}$$

Для того, чтобы $v_0 \in S$, достаточно потребовать выполнения условия $v_0 < \omega$. На достаточно малых промежутках $[0, \zeta]$ это условие всегда выполнено, так как $v_0 < v_s(0)$ и функция $v_s(z)$ непрерывна. Однако, если на некоторой глубине скорость $v_s(z)$ поперечной волны сделается равной v_0, это условие будет нарушено и тогда асимптотическая формула (12) перестанет быть справедливой в окрестности точки $\sigma = v_0$. (Случай нарушения условия $v_0 < v_s(z)$ здесь не рассматривается.)

Поправку v_1 нетрудно вычислить, пользуясь формулой

$$v_1 = i\,\frac{\Delta_1(v_0)}{\Delta_0'(v_0)}$$

Именно

$$v_1 = v_0\,\frac{f}{g}. \tag{15}$$

Здесь

$$g = 2r\left(r - 2 + \frac{m_p}{m_s} + p\,\frac{m_s}{m_p}\right) > 0$$

$$f = (m_s + m_p)\left(\frac{4}{r}\,\frac{\mu'}{\mu} - \frac{\rho'}{\rho}\right) + \frac{rm_p}{2(1-r)}\left(\frac{\mu'}{\mu} - \frac{\rho'}{\rho}\right) +$$
$$+ \frac{prm_s}{2(1-pr)}\left(\frac{\nu'}{\nu} - \frac{\rho'}{\rho}\right) - \frac{2(2-r)}{m_s + m_p}\left[\frac{\mu'}{\mu} - \frac{\rho'}{\rho} + \frac{(2-r)(4-r)}{2r}\,\frac{\mu'}{\mu}\right]$$

$$m_s = \sqrt{1-r}, \qquad m_p = \sqrt{1-pr}, \qquad r = \frac{v_0^2}{v_s^2(0)} < 1, \qquad m_s m_p = \left(1 - \frac{r}{2}\right)^2$$

Коэффициенты f и g вещественны; знак f зависит от соотношения величин

$$\frac{\mu'(0)}{\mu(0)}, \quad \frac{\nu'(0)}{\nu(0)}, \quad \frac{\rho'(0)}{\rho(0)}$$

и может в различных случаях быть различным.

---

[1] Легко показать, что если $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ регулярны в окрестности D простого корня z_0 функции $\varphi(z)$, то при достаточно малом $|q|$ уравнение $\varphi(z) + q\psi(z) = 0$ имеет в D корень $z_*(q)$ такой, что

$$z_*(q) - z_0 = -q\,\frac{\psi(z_0)}{\varphi'(z_0)} + O(q^{-2})$$

Например, если v_p и v_s постоянны, так что $\lambda(z)$, $\mu(z)$ и $\rho(z)$ пропорциональны, то

$$v_1 = v_0\rho'(0)\, c_1, \qquad c_1 > 0$$

если λ и μ постоянны, $\rho(z)$ произвольно, то

$$v_1 = -v_0\rho'(0)\, c_2, \qquad c_2 > 0$$

Итак, если коэффициенты уравнений упругости достаточно гладки, то на любом промежутке $[0, \zeta]$, на котором $v_s(z) > v_0$, при достаточно большом k существует решение задачи (1) — (2) вида (9) при $\sigma_*(k) = v_R(k)$. В силу формул (14), (12), (10) это решение имеет при $k \to +\infty$ асимптотическое представление

$$\mathbf{u}_R(x, z, t; k) = \tag{16}$$

$$= \exp[ik(x - v_0 t)] \exp(-itv_1) \exp\left(-k \int_0^z \sqrt{1 - v_0^2 n_s^{-2}(\xi)}\, d\xi\right) [\mathbf{F}(z) + O(k^{-1})]$$

и, следовательно, допускает оценку

$$u_R(x, z, t; k) = O(e^{-kzc_3}), \qquad c_3 > 0 \tag{17}$$

Здесь $\mathbf{F}(z)$ — гладкий вектор; обе оценки равномерны по z на промежутке $[0, \zeta]$.

Таким образом, неоднородность среды приводит к появлению в асимптотическом представлении решения дополнительного множителя $\exp(-itv_1)$, зависящего от значений на поверхности градиентов λ, μ, ρ. В силу вещественности v_1 этот множитель не приводит к изменению амплитуды рэлеевской волны при распространении ее вдоль границы полупространства.

Волны Рэлея в неоднородных средах частных типов были изучены ранее методом точных решений в работах [3,4]. В этих работах были получены соотношения типа (14) предлагаемой работы, а также некоторые более тонкие эффекты: изменение амплитуды волны при распространении ее вдоль поверхности в случае нарушения условия $v_s(z) > v_0$, отсутствие поверхностных волн при малых частотах.

В заключение необходимо отметить, что лучевым методом изучены нестационарные волны Рэлея в общем случае неоднородного упругого тела с поверхностью произвольной формы [5]. Согласно формулам лучевого метода неоднородность по глубине приводит к появлению дополнительного множителя e^{-itv_1} в выражении для интенсивности волнового фронта. Сравнение значений величины v_1 в частном случае $\lambda(z) / \lambda(0) = \mu(z) / \mu(0) = \rho(z) / \rho(0)$, вычисленных по формулам работы [5] и по формуле (15) рассматриваемой работы, привело к совпадению результатов обоих методов.

Поступила 6 XII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., ИЛ, 1958.
2. Пугачев В. С. Об асимптотических представлениях интегралов. Матем. сб., 1944, т. 15 (57): 1.
3. Зволинский Н. В. Волны Рэлея в неоднородном упругом полупространстве частного типа. Изв. АН СССР, серия географ. и геофиз., 1945, № 3.
4. Завадский В. Ю. Дисперсия скорости и затухание релеевской волны. II Всесоюз. симпозиум по дифракции волн. Аннотации докладов АН СССР, Горький, 1962.
5. Бабич В. М., Русакова Н. Я. О распространении волн Рэлея по поверхности неоднородного упругого тела произвольной формы. Журнал Вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 4, стр. 653—665.