

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ГИДРОАКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ ДВУХ УПРУГИХ ПЛАСТИН

Д. П. Коузов (Ленинград)

Работа посвящена дифракции гидроакустических волн на прямолинейных неоднородностях (трещина, спай слоев разной толщины) в упругом слое. При этом рассматривается случай малых частот падающего возмущения, т. е. таких частот, при которых длина волн в материале слоя много больше толщины слоя. Введение этого ограничения позволяет перейти от контактной задачи для двух сред (жидкость — упругий слой) к граничной задаче для одной среды — жидкости, граничные условия на поверхности которой получаются на основании уравнения колебаний бесконечно тонкой упругой пластины. Математические основания допустимости такого перехода (физически довольно очевидного) для близкого по характеру случая — упругий слой, погруженный в жидкость, — можно найти в работе [1].

Заметим, что в граничные условия рассматриваемой задачи входят производные от искомой функции более высокого порядка, чем порядок самого уравнения. В целях единственности при возможном возникновении разрывов производных решения на границе в подобных задачах приходится налагать на решение некоторые дополнительные требования в точках этих предполагаемых разрывов (контактные условия в граничном условии). Вопросы постановки этих задач рассматриваются в статье [2]. Построение решений некоторых конкретных задач можно найти в работах [2, 3]; построению этих решений были посвящены доклады Г. Д. Малюжинца¹ и В. Ю. Завадского². Задача, которую решал В. Ю. Завадский (дифракция гидроакустической волны от полубесконечной пластины, расположенной на поверхности жидкости), наиболее близка задаче, которой посвящена данная статья.

В дальнейшем учитываются лишь поперечные колебания слоя; этим исключается рассмотрение некоторых процессов [4], связанных с распространением в слое продольных волн. Как показал В. Н. Красильников в своем докладе на Втором симпозиуме по дифракции волн (Горький, 1962 г.), это упрощение оправдывается, поскольку в данном случае наблюдается энергетическое преобладание процессов, связанных с наличием в слое поперечных волн, над таковыми для продольных волн.

Ниже строится общее решение двумерной стационарной задачи дифракции плоской гидроакустической волны на границе двух упругих пластин с различными упругими характеристиками для различных условий контакта между пластинами (спай, трещина).

Обозначения

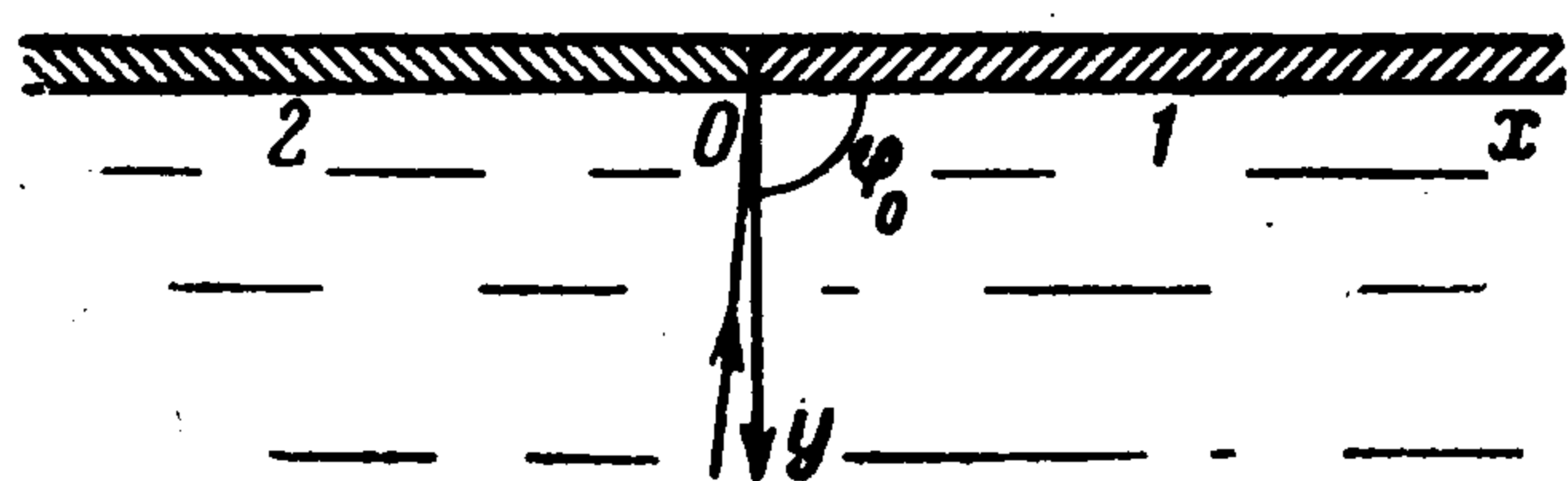
E — модуль Юнга, σ — модуль Пуассона, h — толщина слоя, p — давление, v — скорость жидкой частицы, ρ — плотность жидкости, μ — поверхностная плотность пластины, ω — круговая частота,	k — волновое число в жидкости, t — время, ζ — поперечное смещение пластины, U — акустический потенциал в жидкости, U_0 — падающая волна, A — амплитуда падающей волны, φ_0 — угол, под которым движется падающая волна.
--	---

Пусть две горизонтально расположенные упругие пластины смыкаются по некоторой прямой и покрывают сверху полупространство, заполненное жидкостью. Из глубины жидкости набегают плоская монохроматическая акустическая волна, направление распространения которой ортогонально линии раздела пластин (фиг. 1). Требуется рассчитать установившееся волновое поле, возникшее в результате отражения и дифракции этой волны.

¹ На IV Всесоюзной акустической конференции (Москва, 1958 г.).

² На Первом симпозиуме по дифракции волн (Одесса, 1960 г.).

Будем описывать процессы в жидкости акустическим потенциалом U , а в пластине — вертикальным смещением ζ . Имеем известные из механики соотношения



Фиг. 1

$$\Delta U + k^2 U = 0, \quad v = \text{grad } U, \quad p = \rho i \omega U$$

$$-\frac{h^3 E}{12(1-\sigma^2)} \Delta^2 \zeta + \mu \omega^2 \zeta = -p$$

Последнее из них описывает движение пластины под действием гидроакустического давления p . Так как ζ есть функция точки на плоскости, оператор Δ^2 в этом

выражении следует брать по двум переменным в отличие от трехмерного оператора Лапласа в первой формуле. Временной множитель $e^{-i\omega t}$ условимся опускать.

Расположение осей x и y дано на фиг. 1.

Ось z предполагается направленной вдоль линии раздела пластин (при этом зависимость от координаты z отпадает). В результате получается задача отыскания двух функций $U(x, y)$ и $\zeta(x)$, первая из которых является непрерывной во всей области изменения ее аргументов ($-\infty < x < \infty, 0 \leq y < \infty$), а вторая ($-\infty < x < \infty, x \neq 0$) может иметь при $x = 0$ разрыв типа скачка. Функции эти ищутся на основании следующих требований.

1°. Функция U должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + k^2 U = 0 \quad (-\infty < x < \infty, 0 < y < \infty)$$

2°. Разности $V = U - U_0$ удовлетворяют принципу предельного поглощения. ($U_0 = A \exp[i(\kappa x - \sqrt{k^2 - \kappa^2} y)]$ представляет собой падающую волну, $\kappa = -k \cos \varphi_0$, φ_0 — угол, под которым движется падающий фронт).

3°. Функция ζ должна удовлетворять уравнению

$$-\frac{h_1^3 E_1}{12(1-\sigma_1^2)} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + \mu_1 \omega^2 \zeta = -\rho i \omega U(x, 0) \quad (x > 0)$$

$$-\frac{h_2^3 E_2}{12(1-\sigma_2^2)} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + \mu_2 \omega^2 \zeta = -\rho i \omega U(x, 0) \quad (x < 0)$$

4°. Вертикальные смещения на границе жидкости и пластин непрерывны

$$i\omega \zeta = \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (-\infty < x < +\infty, x \neq 0)$$

5°. Для $\zeta(x)$ при $x \rightarrow \pm 0$ выполняются некоторые контактные соотношения, которые отражают условия на стыке пластин, например:

1. В случае спая пластин

$$\zeta(-0) = \zeta(+0), \quad \frac{\partial \zeta(-0)}{\partial x} = \frac{\partial \zeta(+0)}{\partial x} \quad (\text{непрерывность смещений и непрерывность изгиба)}$$

$$\frac{h_2^3 E_2}{12(1-\sigma_2^2)} \frac{\partial^2 \zeta(-0)}{\partial x^2} = \frac{h_1^3 E_1}{12(1-\sigma_1^2)} \frac{\partial^2 \zeta(+0)}{\partial x^2} \quad (\text{непрерывность изгибающего момента})$$

$$\frac{h_2^3 E_2}{12(1-\sigma_2^2)} \frac{\partial^3 \zeta(-0)}{\partial x^3} = \frac{h_1^3 E_1}{12(1-\sigma_1^2)} \frac{\partial^3 \zeta(+0)}{\partial x^3} \quad (\text{непрерывность изгибающего условия})$$

2. В случае бесконечно тонкой трещины

$$\frac{\partial^2 \zeta(\pm 0)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \zeta(\pm 0)}{\partial x^3} = 0$$

Первое из этих соотношений — отсутствие сосредоточенного момента, приложенного к краям пластин; второе — отсутствие сосредоточенной силы на краях пластины.

Для построения решений обеих названных гранично-контактных задач нужно сначала удовлетворить требованиям пп. 1°—4°. Получаемое при этом выражение для

потенциала условно будем называть общим решением. Оно содержит, как видно, четыре произвольные константы, которые определяются из гранично-контактных соотношений на стыке пластин.

За неизвестную функцию принимаем отраженно-диффрактированное возмущение $V(x, y)$, получающееся из всего поля вычитанием падающей волны $V = U - U_0$.

Если исключить из граничных условий пп. 3° и 4° функцию ζ , то задача сведется к определению непрерывной функции $V(x, y)$ ($-\infty < x < \infty, 0 \leq y < \infty$), удовлетворяющей таким требованиям:

$$(A) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + k^2 V = 0 \quad (-\infty < x < \infty, 0 < y < \infty) \quad (1)$$

(B) Для V выполнен принцип предельного поглощения.

$$L_1 V \equiv \frac{\partial^5 V(x, 0)}{\partial x^4 \partial y} - \delta_1 \frac{\partial V(x, 0)}{\partial y} + \nu_1 V(x, 0) = i A_1 e^{i k x} \quad (x > 0) \quad (2)$$

$$(C) \quad L_2 V \equiv \frac{\partial^5 V(x, 0)}{\partial x^4 \partial y} - \delta_2 \frac{\partial V(x, 0)}{\partial y} + \nu_2 V(x, 0) = i A_2 e^{i k x} \quad (x < 0)$$

Здесь

$$\delta_l = \frac{\mu_l 12 (1 - \sigma_l^2)}{h_l^3 E_l} \omega^2, \quad \nu_l = \rho \frac{12 (1 - \sigma_l^2)}{h_l^3 E_l} \omega^2 \quad (l = 1, 2)$$

$$A_l = A (k^4 \sqrt{k^2 - \kappa^2} - \delta_l \sqrt{k^2 - \kappa^2} + i \nu_l)$$

Поставленную задачу будем решать методом, примененным Мауэ в задаче о дифракции упругих волн от полуплоскости [5]. Другой метод, пригодный для решения ее, был разработан Г. Д. Малюжинцем [6, 7]. Метод Мауэ (представляющий собой разновидность метода Винера — Хопфа) более элементарен и весьма удобен для наших целей. Однако следует отметить, что при переходе к подобным задачам для угловых областей следует пользоваться методом Г. Д. Малюжинца, как методом, обладающим в этом смысле большей теоретической областью.

Разобьем искомую функцию V на два непрерывных слагаемых

$$V = V_1 + V_2$$

порознь удовлетворяющих требованиям (A) и (B), а в сумме — требованию (C). Граничные условия для этих слагаемых сформулируем следующим образом:

$$L_1 v_1 = i A_1 e^{i k x} \quad (x > 0), \quad L_2 v_1 = 0 \quad (x < 0) \quad (3)$$

$$L_1 v_2 = 0 \quad (x > 0), \quad L_2 v_2 = i A_2 e^{i k x} \quad (x < 0) \quad (4)$$

Для отыскания функции V_1 воспользуемся интегральным представлением

$$V_1(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} p_1(\lambda) \exp[i(\lambda x + \sqrt{k^2 - \lambda^2} y)] / d\lambda \quad (5)$$

Тем самым требования (A) и (B) для V_1 оказываются автоматически выполненными. Корень $\sqrt{k^2 - \lambda^2}$ считается положительным на отрезке $(-k, k)$, а выбор его ветви на остальных участках интегрирования ясен из фиг. 2, на котором контур интегрирования изображен сплошной линией. Разрезы, изображенные на фиг. 2 пунктиром, проводятся так, чтобы все особенности функции $p_1(\lambda)$ (кроме $\lambda = \kappa$, о них пойдет речь ниже), расположенные в верхней полуплоскости, оказались бы справа от верхнего разреза, а расположенные в нижней полуплоскости — слева от нижнего.

Граничные условия (3) приводят к системе интегральных уравнений для $p_1(\lambda)$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} p_1(\lambda) (\lambda^4 \sqrt{k^2 - \lambda^2} - \delta_1 \sqrt{k^2 - \lambda^2} - i \nu_1) e^{i \lambda x} d\lambda = A_1 e^{i k x} \quad (x > 0) \quad (6)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda^4 \sqrt{k^2 - \lambda^2} - \delta_2 \sqrt{k^2 - \lambda^2} - i \nu_2) p_1(\lambda) e^{i \lambda x} d\lambda = 0 \quad (x < 0) \quad (7)$$

Множители $\lambda^4 \sqrt{k^2 - \lambda^2} - \delta_l \sqrt{k^2 - \lambda^2} - i\nu_l$ ($l = 1, 2$), растущие на бесконечности как λ^5 , вообще говоря, вызывают расходимость интегралов в левых частях равенств (6) и (7). Поэтому эти интегралы следует понимать в некотором обобщенном смысле. Условимся отождествлять интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \quad (8)$$

(где $|f(\lambda)| < A |\lambda|^B$ при достаточно больших λ) с интегралом от той же функции по произвольному контуру, обоими своими концами уходящему на бесконечность, если в области между вещественной осью и этим контуром функция $f(\lambda)$ не имеет нарушений аналитичности. Для того чтобы сделать при $x > 0$ интеграл (8) сходящимся за счет экспоненты, достаточно загнуть надлежащим образом концы контура интегрирования в верхнюю полуплоскость. При $x < 0$ концы контура следует соответственно опустить.

Для выполнения равенства (7) достаточно теперь потребовать, чтобы функция $\Phi_-(\lambda)$ была бы аналитичной в нижней полуплоскости. Другое интегральное уравнение будет удовлетворено в случае выполнения соотношения

$$\Phi_-(\lambda) = p_1 (\lambda^4 \sqrt{k^2 - \lambda^2} - \delta_2 \sqrt{k^2 - \lambda^2} - i\nu_2) \quad (9)$$

где $\Phi_+(\lambda)$ аналитична в верхней полуплоскости, если считать, что контур интегрирования в (8) обходит полюс $\lambda = \kappa$ снизу (фиг. 2). В результате приходим к следующей краевой задаче для аналитической функции (задача Римана — Гильберта).

Ищутся две функции: $\Phi_+(\lambda)$, аналитическая в верхней полуплоскости (точнее говоря, в области, расположенной выше контура на фиг. 2) и $\Phi_-(\lambda)$, аналитическая в нижней полуплоскости, по их отношению на вещественной оси

$$\frac{\Phi_+(\lambda)}{\Phi_-(\lambda)} = \frac{\Phi_+(\kappa) (\lambda - \kappa)}{A_1} \frac{\lambda^4 \sqrt{k^2 - \lambda^2} - \delta_1 \sqrt{k^2 - \lambda^2} - i\nu_1}{\lambda^4 \sqrt{k^2 - \lambda^2} - \delta_2 \sqrt{k^2 - \lambda^2} - i\nu_2} \quad (11)$$

Для решения этой задачи произведем «факторизацию» функций

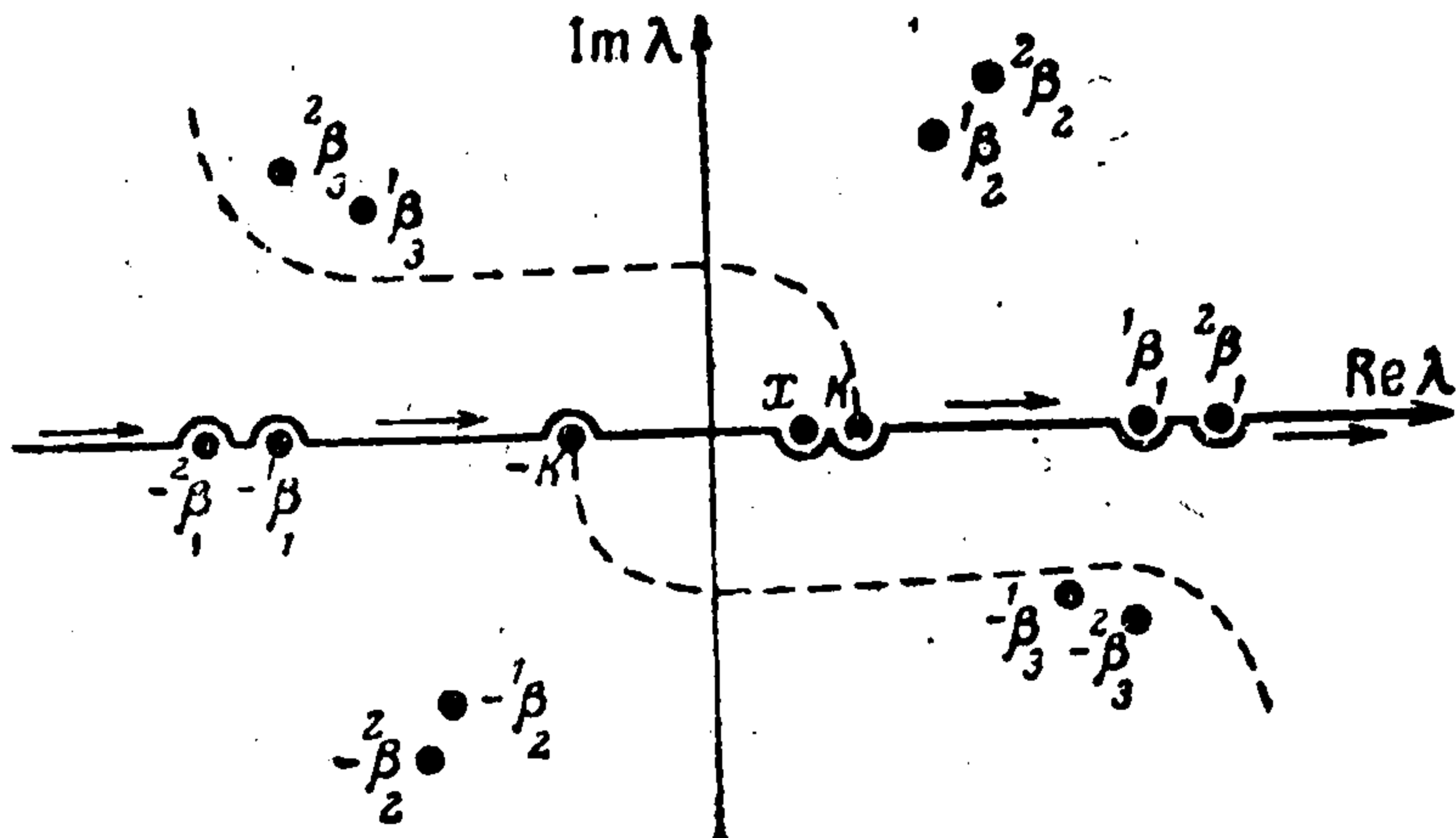
$$f_l(\lambda) = (\lambda^2 - k^2) (\lambda^4 - \delta_l) - i\nu \sqrt{k^2 + \lambda^2} \quad (l = 1, 2)$$

т. е. представим каждую из них в виде произведения двух множителей, из которых один будет аналитичен в верхней полуплоскости, а другой — в нижней.

Несложный алгебраический анализ показывает, что функция $f_l(\lambda)$, аналитичная на двулистной римановой поверхности, имеет на ней десять корней, попарно отличающихся знаком. Три пары этих корней располагаются на основном листе, а две оставшиеся пары — на другом листе римановой поверхности. Корни, находящиеся на основном листе, обозначим $\pm \beta_{l1}, \pm \beta_{l2}, \pm \beta_{l3}$ ($l = 1, 2$), в их числе находятся два вещественных корня $\pm \beta_{l1}$. Принцип предельного поглощения указывает на то, что контур интегрирования в выражении (5) должен обходить положительные вещественные корни $+\beta_{l1}$ снизу, а отрицательные — сверху (фиг. 2). В этом можно убедиться, если ввести малую комплексность в k , т. е. положить $k = k + i\epsilon$. Корень β_{l1} тогда поднимается с вещественной оси в верхнюю полуплоскость.

Выделим теперь из функции $f_l(\lambda)$ множители, соответствующие корням

$$f_l(\lambda) = \Phi_l(\lambda) \prod_{s=1}^3 (\lambda^2 - \beta_{ls}^2)$$



Фиг. 2

Функции $\varphi_l(\lambda)$, оставшиеся после такого выделения, на рассматриваемом листе аналитичны, не имеют корней и стремятся на бесконечности к единице.

Выпишем формулу Коши

$$\ln \varphi_l(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\ln \varphi_l(z)}{z - \lambda} dz$$

Здесь C — произвольный замкнутый контур, расположенный на листе и охватывающий точку $z = \lambda$. Расширяя его, придем к формуле

$$\ln \varphi_l(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} \frac{\ln \varphi_l(z)}{z - \lambda} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \frac{\ln \varphi_l(z)}{z - \lambda} dz$$

где контуры C_- и C_+ охватывают разрезы (фиг. 3). Оба несобственных интеграла сходятся здесь в обычном смысле в силу стремления $\ln \varphi_l(z)$ к нулю на бесконечности.

При этом первая из функций

$$\ln \varphi_l^+(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \frac{\ln \varphi_l(z)}{z - \lambda} dz, \quad \ln \varphi_l^-(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} \frac{\ln \varphi_l(z)}{z - \lambda} dz,$$

аналитична вне контура C_+ (и, в частности, в верхней полуплоскости), вторая аналитична в нижней. В результате получим требуемое разбиение $\varphi_l = \varphi_l^+ \varphi_l^-$.

Формулу (11) теперь можно представить в виде

$$A_1 \frac{\Phi_+(\lambda)}{\Phi_+(\kappa)} \frac{\varphi_2^+(\lambda)}{\varphi_1^+(\lambda)} \frac{\Pi_2^+}{\Pi_1^+} = (\lambda - \kappa) \Phi_-(\lambda) \frac{\varphi_1^-(\lambda)}{\varphi_2^-(\lambda)} \frac{\Pi_1^-}{\Pi_2^-} \equiv F(\lambda) \quad (12)$$

$$\Pi_1^\pm = \prod_{s=1}^3 (\lambda \pm \beta_{1s}), \quad \Pi_2^\pm = \prod_{s=1}^3 (\lambda \pm \beta_{2s})$$

Левая часть этого равенства представляет собой функцию, аналитическую в верхней полуплоскости (точнее говоря, функцию, аналитическую выше контура интегрирования), первая — функцию, аналитическую в нижней полуплоскости. Эти функции непрерывно переходят одна в другую на границе, поэтому их можно рассматривать как одну функцию $F(\lambda)$, аналитическую на всей комплексной плоскости λ . Исследуем поведение этой функции на бесконечности. При определении функции $V_1(x, y)$ оговаривалась непрерывность этой функции. Для обеспечения непрерывности этой функции на оси x в представлении (5) достаточно потребовать от функции $p_1(\lambda)$ следующей оценки на бесконечности:

$$|p_1(\lambda)| \leq \frac{K}{|\lambda|^{1+\varepsilon}} \quad (\varepsilon > 0)$$

Это в свою очередь приводит к оценке

$$|F(\lambda)| \leq K_1 |\lambda|^{5-\varepsilon}$$

Тогда по теореме Лиувилля функция $F(\lambda)$ представляет собой полином четвертой степени

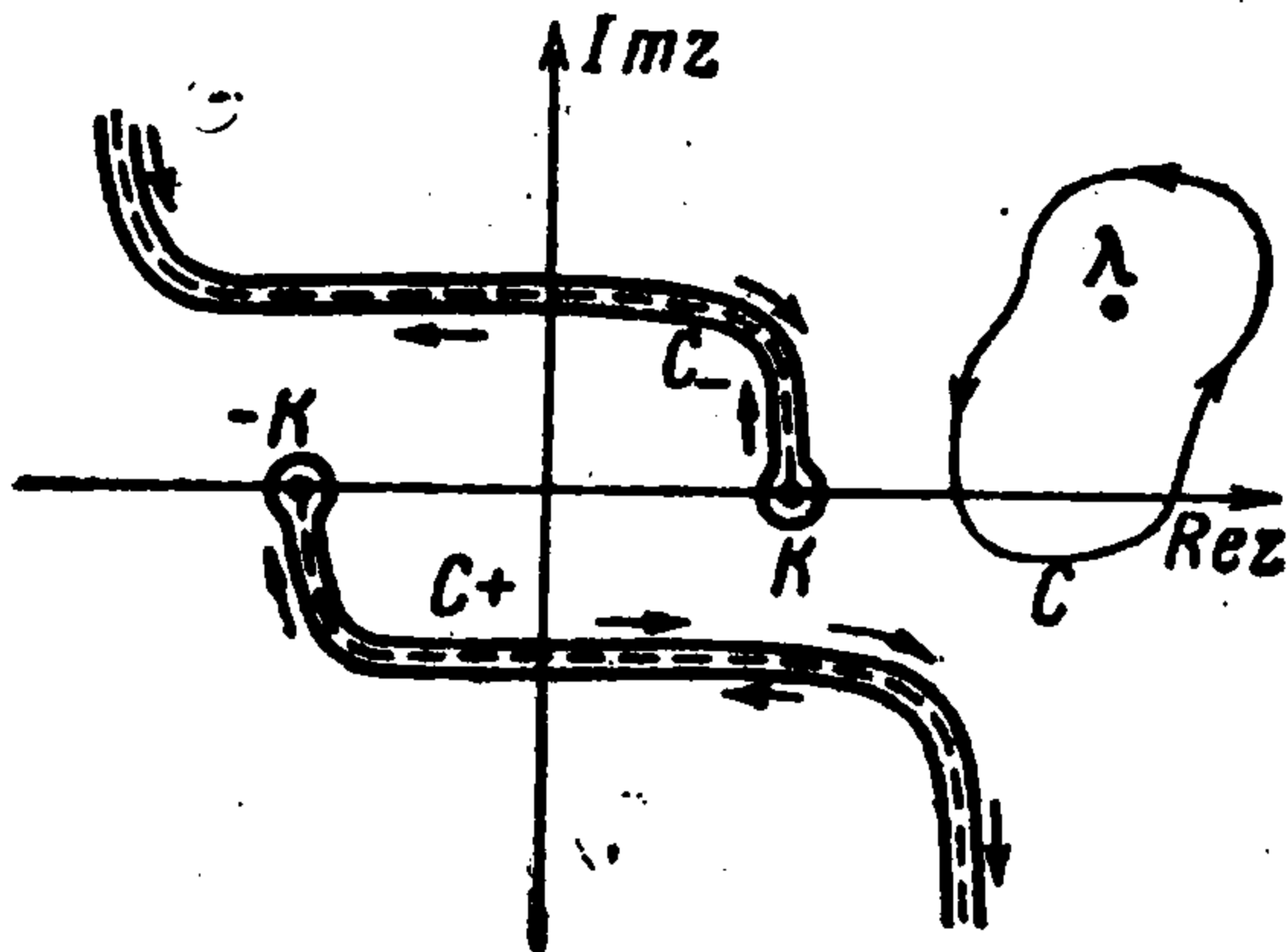
$$F(\lambda) = (a_1 \lambda^3 + b_1 \lambda^2 + c_1 \lambda + d_1) (\lambda - \kappa) + e_1 \quad (13)$$

Константа e_1 вычисляется из формул (12), (13), если положить в них $\lambda = \kappa$

$$\alpha = \frac{A_1}{\bar{A}_1}, \quad \alpha = \frac{A}{\sqrt{k^2 - \kappa^2}} \varphi_1^-(\kappa) \varphi_2^+(\kappa) \Pi_{12}(\kappa), \quad \Pi_{12}(\kappa) = \prod_{s=1}^3 (\kappa - \beta_{1s}) (\kappa + \beta_{1s}) \quad (14)$$

Здесь \bar{A}_1 — комплексно-сопряженное A_1 .

Прочие константы остаются пока произвольными.



Фиг. 3

В результате для функции $V_1(x, y)$ (и аналогично для $V_2(x, y)$) получим

$$V_1(x, y) = + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{k^2 - \lambda^2}}{\lambda - \kappa} \frac{[(a_1\lambda^3 + b_1\lambda^2 + c_1\lambda + d_1)(\lambda - \kappa) + e_1]}{\varphi_1^-(\lambda) \varphi_2^+(\lambda) \Pi_{12}} e^{i(\lambda x + \sqrt{k^2 - \lambda^2} y)} d\lambda \quad (15)$$

$$V_2(x, y) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{k^2 - \lambda^2}}{\lambda - \kappa} \frac{[(a_2\lambda^3 + b_2\lambda^2 + c_2\lambda + d_2)(\lambda - \kappa) + e_2]}{\varphi_1^-(\lambda) \varphi_2^+(\lambda) \Pi_{12}} e^{i(\lambda x + \sqrt{k^2 - \lambda^2} y)} d\lambda$$

Здесь

$$e_2 = \alpha \frac{A_2}{A_2}, \quad \Pi_{12} = \prod_{s=1}^3 (\lambda - \beta_{1s})(\lambda + \beta_{2s}) \quad (16)$$

а контур интегрирования обходит полюс $\lambda = \kappa$ сверху. Объединяя интегралы (15) и (16), получим представление для искомой функции U в виде некоторой суммы

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + W$$

$$U_1 = + \frac{1}{2\pi i} e_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{k^2 - \lambda^2}}{(\lambda - \kappa) \varphi_1^- \varphi_2^+ \Pi_{12}} e^{i(\lambda x + \sqrt{k^2 - \lambda^2} y)} d\lambda$$

$$U_2 = - \frac{1}{2\pi i} e_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{k^2 - \lambda^2}}{(\lambda - \kappa) \varphi_1^- \varphi_2^+ \Pi_{12}} e^{i(\lambda x + \sqrt{k^2 - \lambda^2} y)} d\lambda$$

$$W = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d}{\varphi_1^- \varphi_2^+ \Pi_{12}} e^{i(\lambda x + \sqrt{k^2 - \lambda^2} y)} d\lambda \quad (17)$$

Слагаемые U_1 и U_2 назовем отраженно-дифрагированными возмущениями. В выражении для первого из них контур интегрирования должен обходить полюс $\lambda = \kappa$ снизу, в выражении для второго — сверху. Эти слагаемые порознь удовлетворяют уравнению Гельмгольца и условию излучения, а в сумме — граничному требованию (С). Кроме того, каждое из них непрерывно в начале координат вместе со своими производными до четвертого порядка.

Дифрагированное возмущение W удовлетворяет нулевым граничным условиям и несет в себе разрывы производных от U в начале координат, вызванные гранично-контактными требованиями. Из четырех гранично-контактных равенств как для случая спая пластин, так и для случая трещины легко получить систему четырех линейных уравнений для нахождения значений неизвестных констант a, b, c, d . При этом в случае спая коэффициенты a, b оказываются равными нулю, так как U в этом случае обладает в начале координат непрерывными производными до второго порядка.

Поступила 4 X 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Молотков Л. А. О распространении низкочастотных колебаний в жидких полупространствах, разделенных упругим слоем. Сб. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, Изд. ЛГУ, 1962, т. 5.
2. Красильников В. Н. О решении некоторых гранично-контактных задач линейной гидродинамики. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
3. Lamb G. L. Diffraction by an elastic plate. JAS of America, 1959, XXXI, 7.
4. Ивакин Б. Н. Головные, проходящие и другие волны в случае тонкого твердого слоя в жидкости. Тр. Геофиз. ин-та, № 35 (162).
5. Maue A. W. Die Beugung elastischer Wellen an der Halbebene, ZAMM, 1953, Bd 33, Hf. 1—2.
6. Малюжинец Г. Д. Излучение звука колеблющимися гранями произвольного клина. Акуст. ж., 1955, т. 1, вып. 2, 3.
7. Mal'uginetz G. D. Das Sommerfeldsche Integral und die Lösung von Beugungsaufgaben in Winkelgebieten. Ann. der Physik, 1960, 7F, Bd 6, Hf. 1—2.