

ДВИЖЕНИЕ ПОРШНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДАВЛЕНИЯ ГАЗА

Ю. А. Созоненко (Москва)

Задача о движении поршня, толкаемого расширяющимся газом, с показателем адиабаты $11/9$ решена в рядах Лявом [1].

В настоящей работе для любого показателя адиабаты γ эта задача сведена к решению обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения.

В случае $\gamma = 1.67$ (одноатомный газ) получено точное решение указанного дифференциального уравнения в бесселевых функциях.

1. В бесконечной трубе постоянного сечения между двумя закрепленными поршнями находится покоящийся газ, давление которого равно p_0 , плотность ρ_0 , скорость звука a_0 . Вне объема между поршнями давление равно нулю. Масса каждого из поршней равна m . В момент времени $t = 0$ поршни освобождаются. Изучается дальнейшее движение поршней под действием давления газа. Газ будем предполагать совершенным, невязким и нетеплопроводным. Трением поршней о стенки трубы пренебрегается.

Пусть h — координата Лагранжа; $u(h, t)$ — координата Эйлера; γ — показатель адиабаты. Поршни имеют координаты $h = 0$ и $h = -2l$; площадь сечения трубы равна F . Уравнение течения газа между поршнями

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2 \left(\frac{\partial u}{\partial h} \right)^{-\gamma-1} \frac{\partial^2 u}{\partial h^2} \quad (-2l \leq h \leq 0) \quad (1.1)$$

При $t = 0$ имеем начальные условия:

$$u(h, 0) = h, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

В качестве граничных условий имеем

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= F p_0 \left(\frac{\partial u}{\partial h} \right)^{-\gamma} \quad \text{при } h = 0 \\ m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -F p_0 \left(\frac{\partial u}{\partial h} \right)^{-\gamma} \quad \text{при } h = -2l \end{aligned} \quad (1.2)$$

Введем безразмерные величины по формулам:

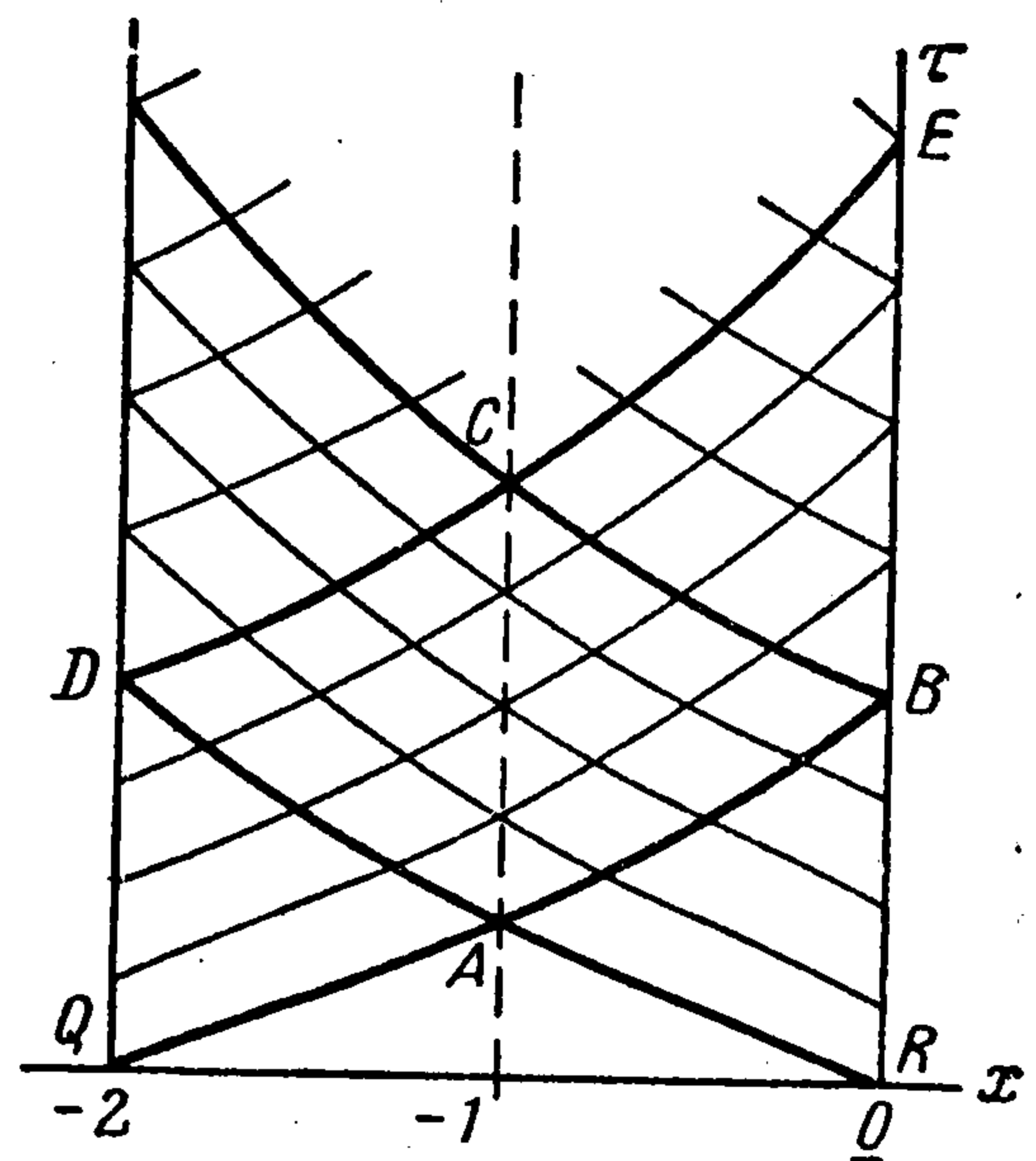
$$\begin{aligned} x = \frac{h}{l}, \quad \tau = \frac{(\gamma - 1) F p_0 a_0}{2 \gamma m} t, \quad \sigma = \frac{a}{a_0} \\ v = \frac{\gamma - 1}{2 a_0} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \theta = \frac{u}{l} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\mu = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho_0 F l}{m} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{m_0}{m}$$

Заметим, что в начальные данные, граничные условия и уравнение движения войдут лишь две безразмерные постоянные μ и γ ; при этом величина μ определяется показателем адиабаты и отношением массы газа к массе поршня, m_0 — масса газа в объеме $l \leq h \leq 0$. В новых переменных поршни имеют координаты $x = 0$ и $x = -2$. Схема возникающего течения в плоскости x, τ дана на фиг. 1. Как известно, в начальный момент времени от поршней пойдут простые волны одна навстречу другой (зоны ARB и AQD на фиг. 1). После встречи простые волны начинают взаимодействовать друг с другом (зона $ABCD$ фиг. 1). После взаимодействия прошедшая волна отражается от поршня (зона BCE фиг. 1). При дальнейшем движении взаимодействия волн и отражения от поршней повторяются. В зоне простой волны скорость и координата поршня $= 0$ определяются по формулам [1, 2]:

$$v = 1 - (1 + 2n\tau)^{-1/n}, \quad \theta = \frac{(1 - v)^{2n} - 1 + 2nv}{n\mu (1 - v)^{2n}}, \quad n = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} \quad (1.4)$$

которые справедливы до момента начала отражения волны от поршня (точка B на фиг. 1).



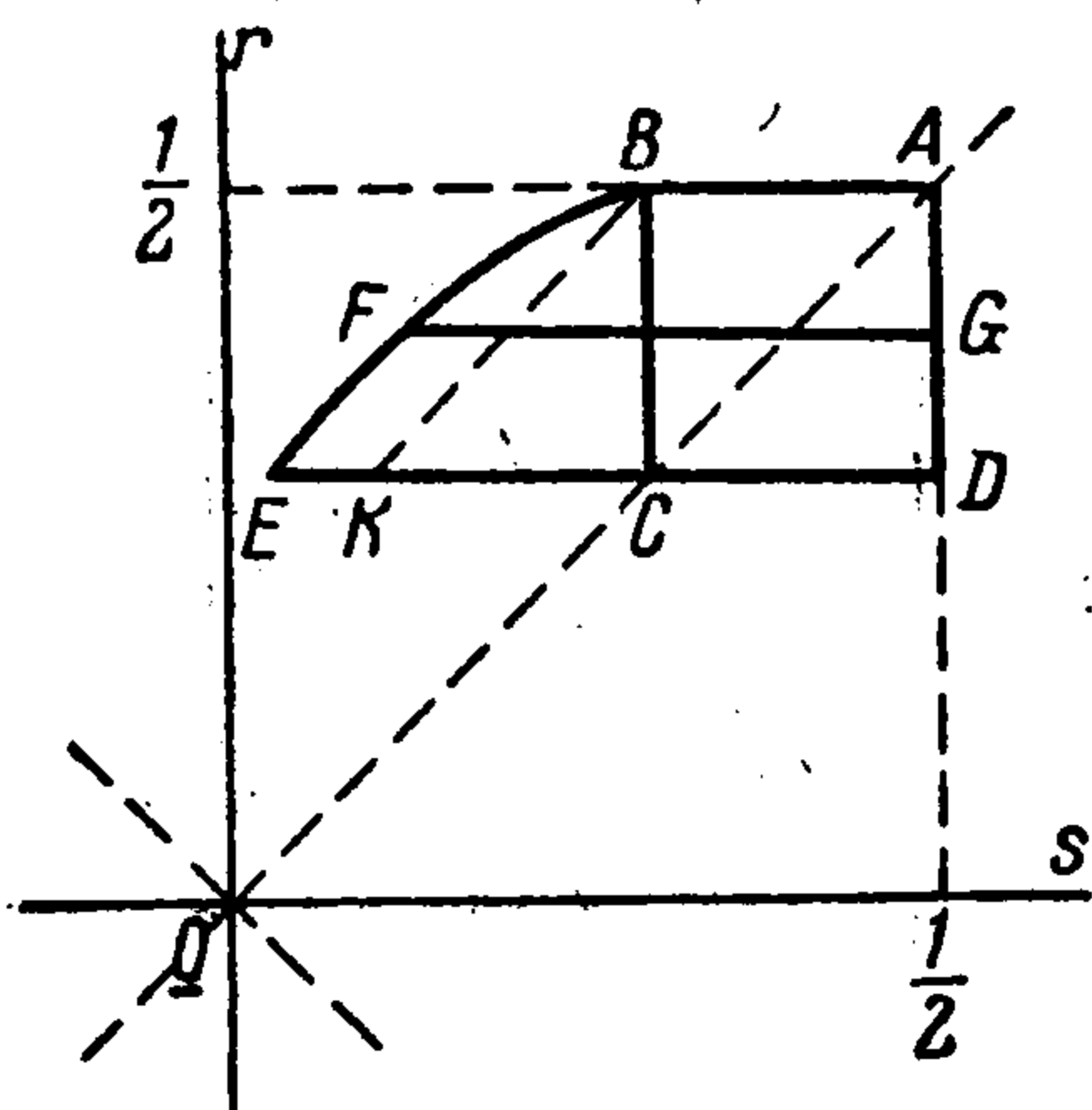
Фиг. 1

Скорость, время и координата поршня, соответствующие точке B

$$v_* = 1 - (1 + n\mu)^{-1/n}, \quad \tau_* = \frac{1}{2} \mu (2 + n\mu) \quad (1.5)$$

$$\theta_* = \frac{1 + (2n - 1)(1 + n\mu)^2 - 2n(1 + n\mu)^{2-1/n}}{n\mu}$$

Задача о взаимодействии простых волн (зона $ABCD$ фиг. 1) рассмотрена в работах [1-5]. Ниже дается решение для зоны отражения от поршня (BCE на фиг. 1). Введем безразмерные переменные Римана по формулам:



Фиг. 2

$$v + \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^{-(\gamma-1)/2} = 2r, \quad v - \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^{-(\gamma-1)/2} = -2s \quad (1.6)$$

Из формулы (1.6):

$$v = r - s, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = (r + s)^{-2/(\gamma-1)}, \quad \sigma = r + s$$

Схема течения в плоскости rs изображена на фиг. 2. Зона покоя ARQ на плоскости r, s изобразится точкой $A(1/2, 1/2)$. Простые волны в плоскости r, s изобразятся прямыми AB и AD (фиг. 2). Зона взаимодействия простых волн на фиг. 2 изображается квадратом $ABCD$.

Точка $B(1/2, 1/2 - v_*)$ на фиг. 2 соответствует началу первого отражения от поршня $x = 0$; точка $D(1/2 - v_*, 1/2)$ — началу отражения от поршня $x = -2$. Зона отражения прошедшей волны от поршня $x = 0$ на плоскости r, s изображается криволинейным треугольником BEC . Кривая BE будет изображением поршня $x = 0$ в плоскости rs .

2. Покажем, что число отражений волны от поршня конечно и оценим это число сверху. Для этого на фиг. 2 проведем линию $r - s = v_*$ (отрезок KB). Из чертежа видно, что при $v_* = 1/3$ точка K попадает на прямую $r + s = 0$. Действительно, в этом случае точка B имеет координаты $(1/2, 1/6)$, а из равенства $BC = KC$ имеем координаты точки $K(1/6, -1/6)$. Кривая BE , которая всегда лежит выше KB , в этом случае обязательно пересечется с прямой $r + s = 0$ уже в зоне первого отражения от поршня. Но пересечение кривой, изображающей поршень, с прямой $r + s = 0$ означает достижение нулевой скорости звука и нулевого давления на поршне. Это возможно лишь в пределе при $\tau \rightarrow \infty$. Следовательно, при $v_* \geq 1/3$ происходит лишь одно отражение от поршня. Характеристика CE на фиг. 1 при $v_* \geq 1/3$ не пересекается с прямой $x = 0$ (характеристика не догоняет поршень). Возможность такого явления впервые отмечена К. П. Станюковичем [2]. Выражая v_* из формул (1.5), получим значения μ , для которых происходит лишь одно отражение от поршня:

$$\mu_1 \geq \frac{1}{n} \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \right]$$

Аналогичным образом легко получить общую формулу для значений μ , при которых происходит не более, чем k отражений от поршня:

$$\mu_k \geq \frac{1}{n} \left[\left(\frac{2k+1}{2k}\right)^n - 1 \right]$$

3. В работе [6] показано, что за исключением зон простых волн и зон постоянных решений, уравнению (1.1) эквивалентно уравнение Римана:

$$L[x] = \frac{\partial^2 x}{\partial r \partial s} - \frac{n}{r+s} \left(\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial x}{\partial s} \right) = 0 \quad (3.1)$$

Функция $\tau(r, s)$ удовлетворяет аналогичному уравнению, а также может быть определена из соотношений:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = -\frac{2}{\mu} (r+s)^{2n} \frac{\partial \tau}{\partial r}, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{2}{\mu} (r+s)^{2n} \frac{\partial \tau}{\partial s} \quad (3.2)$$

Сформулируем граничные условия для уравнения (3.1) в квадрате $ABCD$ и криволинейном треугольнике BEC (фиг. 2).

Условия на прямой AB можно получить из решения для простой волны (фиг. 1) в зоне ARB

На характеристике AB из (3.2) соответственно имеем

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{2}{\mu} \left(\frac{1}{2} + s \right)^{2n} \frac{\partial \tau}{\partial s}, \quad \frac{x}{\tau - \tau_1} = - \frac{2}{\mu} \left(\frac{1}{2} + s \right)^{2n} \quad (3.3)$$

Здесь τ_1 — значение τ в точке пересечения характеристики с прямой $x = 0$. Исключая τ и используя (1.3), имеем соответственно на AB и на AD (на AD по аналогии)

$$\frac{\partial x}{\partial s} - \frac{nx}{1/2 + s} = - \frac{1}{\mu} \frac{1}{1/2 + s}, \quad \frac{\partial x}{\partial r} - \frac{n(x+2)}{r+1/2} = \frac{1}{\mu} \frac{1}{r+1/2} \quad (3.4)$$

Решая (3.4), получим

$$x(s) = - \left(\frac{1}{2} + s \right)^n + \frac{1}{n\mu} \left[1 - \left(\frac{1}{2} + s \right)^n \right] \quad \text{на } AB \quad (3.5)$$

$$x(r) = - 2 + \left(r + \frac{1}{2} \right)^n - \frac{1}{n\mu} \left[1 - \left(r + \frac{1}{2} \right)^n \right] \quad \text{на } AD \quad (3.6)$$

Условие на кривой BE :

$$x(r, s) = 0 \quad (3.7)$$

Уравнение движения поршня (1.2) в переменных r, s

$$\frac{dv}{d\tau} = (r + s)^{2n+1} \quad (3.8)$$

Соотношение (3.7) является граничным условием для уравнения (3.1) на неизвестной кривой BE . Для нахождения кривой BE служит уравнение (3.8). Условия (3.7) и (3.8) можно представить в более симметричном виде. Из (3.2), (3.7), (3.8) на BE имеем

$$\frac{\partial x}{\partial r} = - \frac{1}{\mu} (r + s)^{-1} \frac{dv}{dr}, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{1}{\mu} (r + s)^{-1} \frac{dv}{ds} \quad (3.9)$$

Таким образом, для уравнения (3.1) в квадрате $ABCD$ формулами (3.5), (3.6) заданы граничные значения для $x(r, s)$ на двух пересекающихся характеристиках AB и AD (задача Гурса). Решение этой задачи для (3.1) при граничных условиях (3.5), (3.6) дано в работе [1] методом Римана [6]. Из этого решения можно найти значения $x(r, s)$ на характеристике BC . Тогда в криволинейном треугольнике BEC будут заданы значения $x(r, s)$ на временно-подобной кривой BE и характеристике BC (смешанная задача). Существование и единственность решения смешанной задачи для линейных уравнений доказал Гурса [7] методом последовательных приближений. Адамар показал, что на смешанную задачу можно распространить метод Римана (см. например работу [8]). Решение уравнения (3.1) при условиях (3.7), (3.8) дано в рядах Лявом [1]. Но числовые расчеты в этой работе проведены лишь для $n = 5, \mu = 0.04364$. Ввиду громоздкости числовые расчеты для других значений μ и n по методу Лява никем больше не проводились. Ниже излагается метод решения уравнения (3.1) при условиях (3.7), (3.8), основанный на применении формулы Грина и метода Римана.

Если $M[w]$ — оператор, сопряженный с $L[x]$, то справедливо известное тождество:

$$xM[w] - wL[x] = \frac{\partial}{\partial r} \left[x \left(\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{nw}{r+s} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial s} \left[w \left(\frac{\partial x}{\partial r} - \frac{nx}{r+s} \right) \right] \quad (3.10)$$

Пусть $F(r_0, s_0)$ — произвольная точка на кривой BE . На функцию w наложим условия:

$$M[w] = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{nw}{r_0 + s} = 0 \quad \text{на } FG \quad (3.11)$$

Условиям (3.11) удовлетворяет, например, функция:

$$w = \frac{(s + r_0)^n (r - r_0)^n}{(r + s)^{2n}} \quad (3.12)$$

Проинтегрируем (3.10) по площади криволинейной трапеции $ABFG$, а затем воспользуемся формулой Грина и соотношениями (3.1), (3.7), (3.11)

$$\int_{AB} x \left(\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{nw}{r+s} \right) ds + \int_{BF} w \frac{\partial x}{\partial r} dr + \int_{GA} w \left(\frac{\partial x}{\partial r} - \frac{nx}{r+s} \right) dr = 0 \quad (3.13)$$

Подставляя в (3.13) значения w и x из (3.4), (3.9), (3.12) и используя $s = r - v$, получим нелинейное интегральное уравнение

$$\int_{1/2}^{r_0} \frac{(r-v+r_0)^n (r-r_0)^n}{(2r-v)^{2n+1}} \frac{dv}{dr} dr = \mu \left(\frac{1}{2} + r_0\right)^n \left(\frac{1}{2} - r_0\right)^n +$$

$$+ \int_{1/2}^{s_*} \frac{(s+r_0)^n (1/2-r_0)^n}{(1/2+s)^{2n+1}} ds - (1+2n\mu) \int_{1/2}^{r_0} \frac{(1/2+r_0)^n (r-r_0)^n}{(1/2+r)^{2n+1}} dr \quad (3.14)$$

$$s_* = 1/2 - v_*, \quad 1/2 - v_* \leq r_0 \leq 1/2$$

Отсюда скорость поршня $v = v(\tau)$ определяется при помощи уравнения (3.8).

Для целых положительных n уравнение (3.14) посредством $2n+1$ дифференцирований по r_0 сводится к нелинейному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^n}{dr^n} \left[\frac{1}{(2r-v)^{n+1}} \frac{dv}{dr} \right] + \sum_{m=n+1}^{2n-1} \frac{m!}{(m-n)!(2n-m)!} \frac{d^{2n-m}}{dr^{2n-m}} \left[\frac{1}{(2r-v)^{m+1}} \frac{dv}{dr} \right] +$$

$$+ \frac{(2n)!}{n!} \frac{1}{(2r-v)^{2n+1}} \frac{dv}{dr} = 0 \quad (3.15)$$

(здесь индексы при r_0 опущены). Начальные данные для уравнения (3.15) легко определяются в процессе последовательных дифференцирований (3.14). В дальнейшем мы их выпишем для значений $n = 1; 2$. Если решение (3.15) найдено, то из соотношений (3.7), (3.9) на BE определяются значения x , $\partial x / \partial r$, $\partial x / \partial s$. Тогда для уравнения (3.1) в треугольнике BEC мы имеем задачу Коши, которая может быть решена методом Римана [6]. В дальнейшем мы ограничимся тем, что найдем скорость поршня v .

4. При $n = 1$ ($\gamma = 3$) уравнения (3.15), (3.8) имеют вид:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{(2r-v)^2} \frac{dv}{dr} \right] + \frac{2}{(2r-v)^3} \frac{dv}{dr} = 0, \quad \frac{dv}{d\tau} = (2r-v)^3 \quad (4.1)$$

Начальные условия для этих уравнений

$$v\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mu}{1+\mu}, \quad \left(\frac{dv}{dr}\right)_{r=1/2} = -1, \quad \tau\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mu(\mu+2)}{2} \quad (4.2)$$

Уравнение (4.1) инвариантно относительно двухпараметрической группы преобразований:

$$v = \alpha v' + \beta, \quad r = \alpha r' + 1/2\beta \quad (4.3)$$

Это обстоятельство дает возможность проинтегрировать (4.1) в элементарных функциях; приводим окончательный результат для скорости поршня как функции времени

$$v = \frac{1}{1+\mu} \left[3 + \mu - \sqrt{\frac{4\tau+1-2\mu-\mu^2}{2\tau+1}} - 2 \sqrt{\frac{2\tau+1}{4\tau+1-2\mu-\mu^2}} \right]$$

Решение для этого случая получено К. П. Станюковичем другим способом [2].

5. Для случая $n = 2$ ($\gamma = 1.67$) уравнения (3.15), (3.8) имеют вид: (5.1)

$$\frac{d^2}{dr^2} \left[\frac{1}{(2r-v)^3} \frac{dv}{dr} \right] + 6 \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{(2r-v)^4} \frac{dv}{dr} \right] + \frac{12}{(2r-v)^5} \frac{dv}{dr} = 0, \quad \frac{dv}{d\tau} = (2r-v)^5$$

Начальные условия для этих уравнений будут

$$v\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+2\mu}}, \quad \left(\frac{dv}{dr}\right)_{r=1/2} = \frac{1}{\sqrt{1+2\mu}} - 2 \quad (5.2)$$

$$\left(\frac{d^2v}{dr^2}\right)_{r=1/2} = -15\sqrt{1+2\mu} - \frac{3}{\sqrt{1+2\mu}} + 12, \quad \tau\left(\frac{1}{2}\right) = \mu(1+\mu)$$

Первое уравнение (5.1) инвариантно относительно группы (4.3). Поэтому порядок уравнения можно понизить на две единицы. Для этого сделаем замену переменных:

$$2r-v = e^\varphi, \quad dv/dr = y, \quad dy/d\varphi = z \quad (5.3)$$

После замены переменных (5.3) получим уравнение Абеля 2-го рода:

$$12y(1-y)^2 + (2-y)(10y-8)z - (2-y)z^2 + (2-y)^2z \frac{dz}{dy} = 0 \quad (5.4)$$

Далее замена $q = z(2-y)$ дает:

$$12y(1-y)^2 + 2(5y-4)q + qdq/dy = 0 \quad (5.5)$$

Уравнение (5.5) имеет частное решение $q_1 = -2y^2 + 2y$, после замены $q = \psi + q_1$ получим:

$$6(y-1)\psi + [\psi - 2y(y-1)]d\psi/dy = 0 \quad (5.6)$$

Уравнение (5.6) заменой переменных:

$$\psi = -2\left(\xi + \frac{1}{2}\eta^2\right)^3, \quad y = -\eta\left(\xi + \frac{1}{2}\eta^2\right)$$

сводится к специальному уравнению Риккати:

$$\frac{d\eta}{d\xi} - \frac{1}{2}\eta^2 = \xi \quad (5.7)$$

Для данной правой части уравнение (5.7) не может быть проинтегрировано в элементарных функциях или квадратурах (теорема Лиувилля [9]).

Решение уравнения (5.7), выраженное через функции Бесселя, имеет вид (решение Шлефли [9])

$$\varepsilon(\lambda) = \frac{cJ_{2/3}(\lambda) + J_{-2/3}(\lambda)}{cJ_{-1/3}(\lambda) - J_{1/3}(\lambda)}, \quad \varepsilon = \frac{\eta}{\sqrt{2\xi}}, \quad \lambda = \frac{\sqrt{2}}{3}\xi^{3/2} \quad c = \text{const} \quad (5.8)$$

Обозначим через ε_* , λ_* значения ε и λ при $r = 1/2$. Используя начальные данные (5.2) и формулы преобразований, связывающие r , v с переменными ε , λ , получим:

$$\varepsilon_* = \frac{2 - (1 + 2\mu)^{-1/2}}{[2(1 + 2\mu)^{-1/2} - 1]^{1/2}}, \quad \lambda_* = \frac{[2(1 + 2\mu)^{-1/2} - 1]^{3/2}}{9 + 3(1 + 2\mu)^{-1} - 6(1 + 2\mu)^{-1/2}} \quad (5.9)$$

Из (5.8) и (5.9) можно найти следующее выражение произвольной постоянной:

$$c = \frac{\varepsilon_* J_{1/3}(\lambda_*) + J_{-2/3}(\lambda_*)}{\varepsilon_* J_{-1/3}(\lambda_*) - J_{2/3}(\lambda_*)} \quad (5.10)$$

Возвращаясь к переменным v , τ и используя (5.2), получаем скорость поршня, время на поршне и скорость звука на поршне как функции λ

$$v(\lambda) = v_* - \int_{\lambda_*}^{\lambda} \sigma(\lambda) \varepsilon(\lambda) d\lambda, \quad \tau(\lambda) = \tau_* - \int_{\lambda_*}^{\lambda} \frac{\varepsilon(\lambda) d\lambda}{\sigma^4(\lambda)} \quad (5.11)$$

$$\sigma(\lambda) = \sigma_* \exp\left[\int_{\lambda_*}^{\lambda} \varepsilon(\lambda) d\lambda + \frac{2}{3} \int_{\lambda_*}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda(\varepsilon^2 + 1)}\right] \quad (5.12)$$

$\sigma_* = 1 - v_*$

Из определения v и θ имеем:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{4n-2}{\mu} v, \quad \theta = \theta_* + \frac{6}{\mu} \int_{\lambda_*}^{\lambda} v \frac{d\tau}{d\lambda} d\lambda \quad (5.13)$$

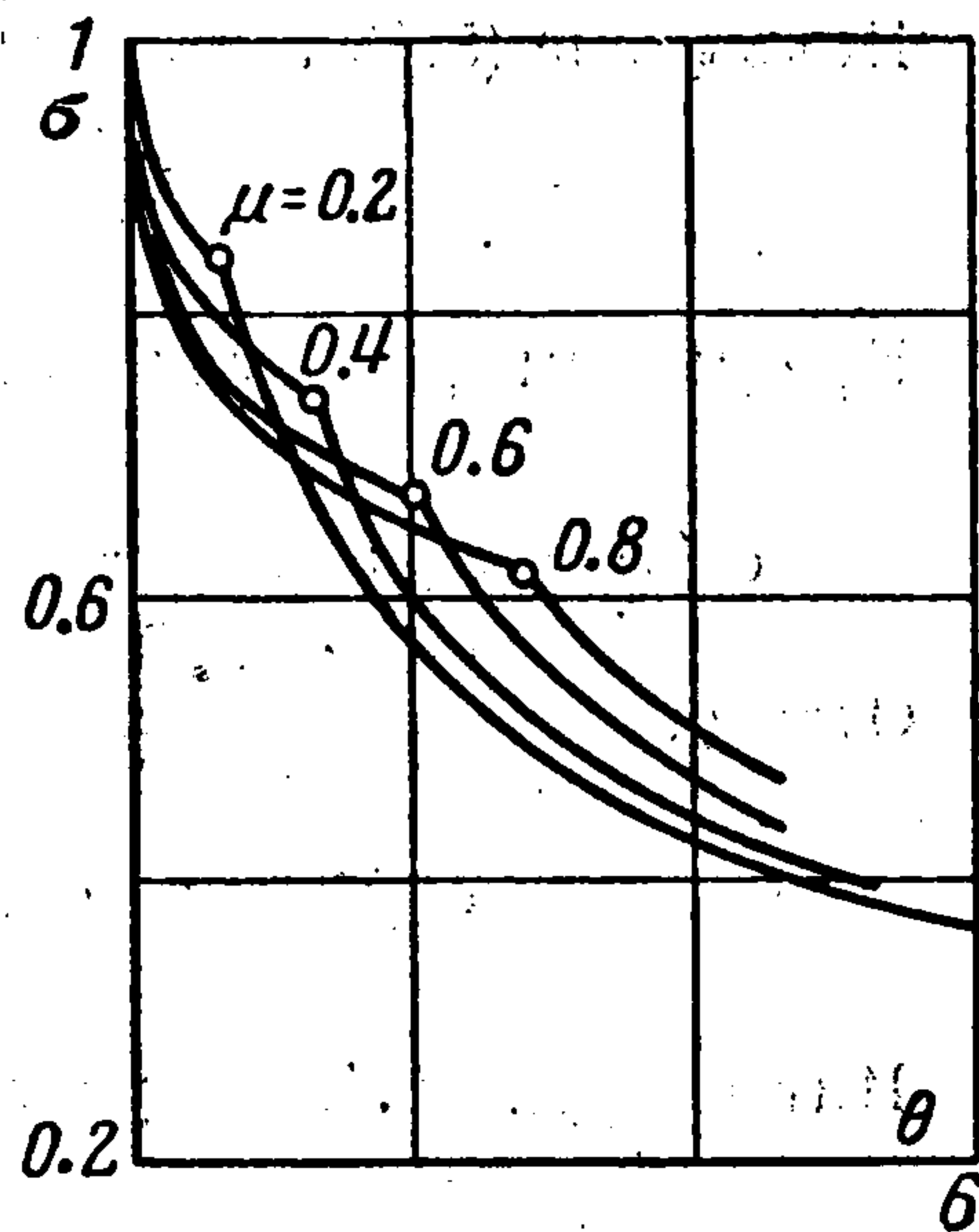
Введем обозначения

$$A(\lambda) = cJ_{2/3}(\lambda) + J_{-2/3}(\lambda), \quad A_* = A(\lambda_*)$$

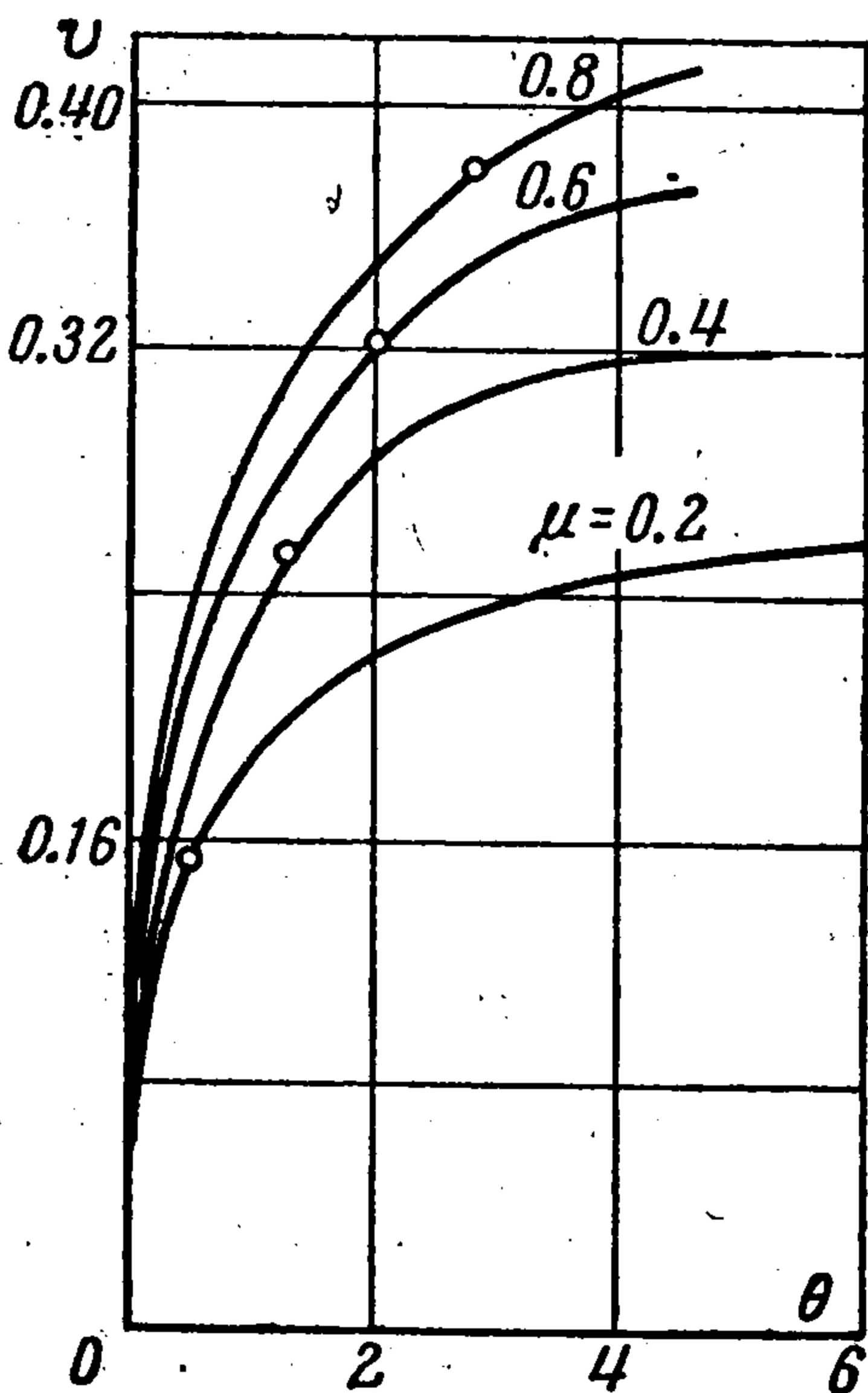
$$B(\lambda) = cJ_{-1/3}(\lambda) - J_{1/3}(\lambda), \quad B_* = B(\lambda_*)$$

Из рекуррентных формул для бesselевых функций [9] легко получить

$$A = -\frac{1}{3\lambda} B - \frac{dB}{d\lambda}, \quad B = \frac{2}{3\lambda} A + \frac{dA}{d\lambda} \quad (5.15)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Подставив (5.14) в (5.12), найдем

$$\sigma(\lambda) = \sigma_* \exp \int_{\lambda_*}^{\lambda} \left[\frac{A}{B} + \frac{2}{3\lambda} \frac{B^2}{A^2 + B^2} \right] d\lambda \quad (5.16)$$

Пользуясь (5.15), имеем:

$$\frac{d}{d\lambda} (A^2 + B^2) = -\frac{2}{3\lambda} [2A^2 + B^2] \quad (5.17)$$

Представим равенство (5.16) в виде:

$$\sigma(\lambda) = \sigma_* \exp \int_{\lambda_*}^{\lambda} \left[-\frac{1}{3\lambda} - \frac{1}{B} \frac{dB}{d\lambda} + \frac{2}{3\lambda} \frac{B^2}{A^2 + B^2} - \frac{4}{3\lambda} + \frac{4}{3\lambda} \right] d\lambda$$

Отсюда

$$\sigma(\lambda) = \sigma_* \exp \int_{\lambda_*}^{\lambda} \left[\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{B} \frac{dB}{d\lambda} - \frac{2}{3\lambda} \frac{2A^2 + B^2}{A^2 + B^2} \right] d\lambda \quad (5.18)$$

Интегрируя (5.18) с учетом (5.17), получаем скорость звука на поршне

$$\sigma(\lambda) = \frac{\sigma_* B_*}{\lambda_* (A_*^2 + B_*^2)} \frac{\lambda [A^2(\lambda) + B^2(\lambda)]}{B(\lambda)} \quad (5.19)$$

Аналогичным образом из (5.11) — (5.15) получим (5.20)

$$\tau(\lambda) = \tau_* + \frac{\lambda_*^4 (A_*^2 + B_*^2)^4}{\sigma_*^4 B_*^4} \left\{ \frac{1}{2} \frac{A(\lambda) B(\lambda)}{\lambda^3 [A^2(\lambda) + B^2(\lambda)]^3} + \frac{3}{4} \frac{1}{\lambda^2 [A^2(\lambda) + B^2(\lambda)]^2} - \frac{1}{2} \frac{A_* B_*}{\lambda_*^3 (A_*^2 + B_*^2)^3} - \frac{3}{4} \frac{1}{\lambda_*^2 (A_*^2 + B_*^2)^2} \right\}$$

$$v(\lambda) = 1 - \sigma(\lambda) - \frac{2}{3} \frac{\sigma_* B_*}{\lambda_* (A_*^2 + B_*^2)} \int_{\lambda_*}^{\lambda} B(\lambda) d\lambda = 1 - \sigma(\lambda) - \frac{4}{3} \frac{\sigma_* B_*}{\lambda_* (A_*^2 + B_*^2)} \times \\ \times \left[\sum_{k=0}^{\infty} J_{4/3+2k}(\lambda) - c \sum_{k=0}^{\infty} J_{2/3+2k}(\lambda) - \sum_{k=0}^{\infty} J_{4/3+2k}(\lambda_*) + c \sum_{k=0}^{\infty} J_{2/3+2k}(\lambda_*) \right]$$

$$\theta(\lambda) = \theta_* + \frac{6}{\mu} v(\tau - \tau_*) + \frac{3}{\mu} \frac{A_* (A_*^2 + B_*^2) \lambda_*}{\sigma_*^4 B_*^3} (v - v_*) + \frac{9}{2\mu} \frac{(A_*^2 + B_*^2) \lambda_*^2}{\sigma_*^4 B_*^4} \times \\ \times (v - v_*) + \frac{9}{2\mu} \frac{\lambda_*^3 (A_*^2 + B_*^2)^3}{\sigma_*^3 B_*^3} \left\{ \frac{1}{\lambda B(\lambda) [A^2(\lambda) + B^2(\lambda)]} - \frac{1}{\lambda_* B_* (A_*^2 + B_*^2)} \right\}$$

Формулы (5.19), (5.20) дают возможность определить скорость поршня и скорость звука на поршне в зоне первого отражения. Примеры числовых расчетов даны на фиг. 3, 4. (Светлые кружки поставлены в конце простой волны.)

Поступила 8 II 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Love A. E. H. and Piddock F. V. Lagrange's Ballistic Problem. Transactions of the Royal Society of London, 1922, 222, 167—226.
2. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. Гостехиздат, М., 1955.
3. Курант Р. и Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. ИЛ, М., 1950.
4. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, М., 1954.
5. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. ИЛ, М., 1961.
6. Риман Б. О распространении плоских волн с конечной амплитудой. Сочинения, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
7. Гурса Э. Курс математического анализа, т. III, ч. 1, ГТТИ, М.—Л., 1933.
8. Hadamard J. Sur probleme mixte aux dérivées partielles. Bull. Soc. Math. France, 1903, t. 31.
9. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. 1, ИЛ, М., 1949