ВЛИЯНИЕ АНИЗОТРОПИИ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ НА РАЗВИТИЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В НАЧАЛЬНОМ УЧАСТКЕ ПЛОСКОГО КАНАЛА

И. Б. Чекмарев (Ленинград)

Развитие профиля скоростей при течении вязкой несжимаемой электропроводной жидкости в начальном участке каналов различной формы было впервые исследовано приближенными методами Шерклифом [1,2]. Из полученных результатов следовало, что с увеличением напряженности магнитного поля сокращается длина входного участка. Недавно эта задача для плоского и кольцевого каналов была вновь рассмотрена рядом авторов [3–8].

С другой стороны, стационарное течение вязкой несжимаемой среды в бесконечно длинном плоском канале с учетом анизотропии электропроводности исследовалось в работах [9,10].

Ниже рассматривается влияние анизотропии проводимости на развитие течения в начальном участке плоского полубесконечного канала с непроводящими стенками $(-a \leqslant y \leqslant a,\ x \geqslant 0)$, в который поступает вязкая электропроводная среда, имеющая во входном сечении $x = 0$ однородный профиль скоростей $u = u_0$. В области канала $x \geqslant 0$ на жидкость действует внешнее однородное магнитное поле B_0, параллельное оси y. Плотность среды ρ, коэффициенты вязкости η и электропроводности σ считаются постоянными. Если ввести безразмерные переменные

$$x = \frac{x^*}{a}, \quad y_1 = \frac{y^* \sqrt{R}}{a}, \quad z = \frac{z^*}{a}, \quad u = \frac{u^*}{u_0}, \quad v = \frac{v^* \sqrt{R}}{u_0}, \quad w = \frac{w^*}{u_0}$$

$$p = \frac{p^*}{\rho u_0^2}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{B}^*}{B_0}, \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}^*}{u_0 B_0}, \quad \mathbf{j} = \frac{\mathbf{j}^*}{\sigma u_0 B_0} \tag{1}$$

(звездочкой отмечены размерные величины) и искать решение исходной системы (см. уравнения (1) — (3) в работе [9]) в виде рядов по степеням малых параметров R_m и $1 / \sqrt{R}$, то для нулевого приближения получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} - S j_z + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial z} + S j_x + \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y_1} = 0, \qquad j_x - \omega\tau j_z = E_x - w, \qquad j_z + \omega\tau j_x = E_z + u \tag{2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y_1} = \frac{\partial E_x}{\partial y_1} = \frac{\partial E_z}{\partial y_1} = 0, \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0$$

где

$$S = \frac{\sigma B_0^2 a}{\rho u_0}, \quad R = \frac{\rho u_0 a}{\eta}, \quad R_m = \sigma \mu u_0 a$$

При написании системы (2) предполагалось, что скорость среды не зависит от координаты z, а инерционные члены, следуя С. М. Таргу [11], учтены приближенно. Аналогичные упрощения можно также получить методом оценок, использованным Г. А. Любимовым при выводе уравнений магнитогидродинамического пограничного слоя [12].

Исключая из уравнений движения составляющие плотности тока и переходя к безразмерной переменной $y = y_1 / \sqrt{R}$, находим

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{S}{1 + (\omega\tau)^2}(E_z - \omega\tau E_x + u + \omega\tau w) - \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{S}{1 + (\omega\tau)^2}(E_x + \omega\tau E_z + \omega\tau u - w) - \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \tag{3}$$

Дифференцируя (3) по y и вводя комплексную скорость $V = u + iw$, получим для V уравнение

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^3 V}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{S(1 - i\omega\tau)}{1 + (\omega\tau)^2}\frac{\partial V}{\partial y} = 0 \tag{4}$$

При решении уравнения (4) будем считать, что объемный расход в направлении оси x задан, а объемный расход в направлении оси z равен нулю. Тогда имеем следующие граничные условия для V:

$$V|_{x=0}=1, \qquad V|_{y=\pm 1}=0, \qquad Q=\int_{-1}^{+1} V dy = 2 \tag{5}$$

Применяя к (4) и (5) преобразование Лапласа и решая полученное уравнение, находим

$$V^\circ = \frac{\operatorname{ch} m - \operatorname{ch} my}{\lambda(\operatorname{ch} m - m^{-1}\operatorname{sh} m)}, \qquad m=\sqrt{R\lambda + N^2(1-i\omega\tau)} \tag{6}$$

где

$$V^\bullet = \int_0^\infty V e^{-\lambda x}\, dx, \qquad N^2 = \frac{M^2}{1+(\omega\tau)^2}, \qquad M^2 = SR = B_0^2 a^2 \frac{\sigma}{\eta}$$

Выполняя обратное преобразование, получим

$$V = V_\infty + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\gamma_k y - \cos\gamma_k}{[\gamma_k^2 + N^2(1-i\omega\tau)]\cos\gamma_k} \exp\left(-\frac{\gamma_k^2 + N^2(1-i\omega\tau)}{R}x\right) \tag{7}$$

где

$$V_\infty = u_\infty + iw_\infty = \frac{\operatorname{ch} N\sqrt{1-i\omega\tau} - \operatorname{ch} N\sqrt{1-i\omega\tau}\, y}{\operatorname{ch} N\sqrt{1-i\omega\tau} - (N\sqrt{1-i\omega\tau})^{-1}\operatorname{sh} N\sqrt{1-i\omega\tau}} =$$

$$= 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\gamma_k y - \cos\gamma_k}{[\gamma_k^2 + N^2(1-i\omega\tau)]\cos\gamma_k}$$

а γ_k — корни уравнения $\operatorname{tg}\gamma = \gamma$.

При $\omega\tau = 0$ формула (7) переходит в решение Шерклифа

$$u = \frac{\operatorname{ch} M - \operatorname{ch} M y}{\operatorname{ch} M - M^{-1}\operatorname{sh} M} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\gamma_k y - \cos\gamma_k}{(\gamma_k^2 + M^2)\cos\gamma_k}\exp\left(-\frac{\gamma_k^2 + M^2}{R}x\right), \qquad w = 0 \tag{8}$$

которое при $M \to 0$ совпадает с результатами С. М. Тарга.

Разделяя в (7) вещественную и мнимую части, находим для u и w выражения

$$u = u_\infty + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\gamma_k y - \cos\gamma_k}{[(\gamma_k^2 + N^2)^2 + (\omega\tau N^2)^2]\cos\gamma_k}\left[(\gamma_k^2 + N^2)\cos\frac{\omega\tau N^2}{R}x - \right.$$

$$\left. - \omega\tau N^2 \sin\frac{\omega\tau N^2}{R}x\right]\exp\left(-\frac{\gamma_k^2 + N^2}{R}x\right) =$$

$$= 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\gamma_k y - \cos\gamma_k}{[(\gamma_k^2 + N^2)^2 + (\omega\tau N^2)^2]\cos\gamma_k}\left\{\left[(\gamma_k^2 + N^2)\cos\frac{\omega\tau N^2}{R}x - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \omega\tau N^2 \sin\frac{\omega\tau N^2}{R}x\right]\exp\left(-\frac{\gamma_k^2 + N^2}{R}x\right) - (\gamma_k^2 + N^2)\right\} \tag{9}$$

$$w = w_\infty + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\gamma_k y - \cos\gamma_k}{[(\gamma_k^2 + N^2)^2 + (\omega\tau N^2)^2]\cos\gamma_k}\left[(\gamma_k^2 + N^2)\sin\frac{\omega\tau N^2}{R}x + \right.$$

$$\left. + \omega\tau N^2 \cos\frac{\omega\tau N^2}{R}x\right]\exp\left(-\frac{\gamma_k^2 + N^2}{R}x\right) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\gamma_k y - \cos\gamma_k}{[(\gamma_k^2 + N^2)^2 + (\omega\tau N^2)^2]\cos\gamma_k}\left\{\left[(\gamma_k^2 + N^2)\sin\frac{\omega\tau N^2}{R}x + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \omega\tau N^2 \cos\frac{\omega\tau N^2}{R}x\right]\exp\left(-\frac{\gamma_k^2 + N^2}{R}x\right) - \omega\tau N^2\right\} \tag{10}$$

Из сравнения формул (8) с (9) и (10) видно, что анизотропия проводимости приводит к увеличению длины входного участка, так как с возрастанием $\omega\tau$ уменьшается число N, играющее в данном случае роль эффективного числа Гартмана M.

Для определения давления в канале при известных u и w проинтегрируем уравнения (3) по высоте канала. Получим

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=1} - \frac{N^2}{R}(E_z + 1 - \omega\tau E_x), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=1} + \frac{N^2}{R}(E_x + \omega\tau E_z + \omega\tau) \tag{11}$$

Дифференцируя первое уравнение по z, второе по x, приравнивая смешанные производные и используя (2), находим для составляющих напряженности внешнего электрического поля E_x и E_z систему

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{1}{N^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=1}, \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0 \tag{12}$$

которая при граничных условиях $E_x = 0$, $E_z = -1$ при $x = 0$ имеет решение

$$E_x = -\frac{1}{N^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=1}, \qquad E_z = -1 \tag{13}$$

Тогда (11) принимает вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=1} - \frac{\omega\tau}{R}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=1}, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \tag{14}$$

и распределение давления в канале находится интегрированием (14) при условии

$$p|_{x=0} = p_0$$

Поступила 26 XI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Shercliff J. A. Entry of conducting and nonconducting fluids in pipes. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1956, vol. 52, Pt. 4, p. 573—583.
2. Shercliff J. A. The flow of conducting fluids in circular pipes under transverse magnetic fields. Journal of fluid mechanics, 1956, vol. 1, N 6, p. 644—666.
3. Roidt M., Cess R. D. An approximate analysis of laminar magnetohydrodynamic flow in the entrance region of a flat duct. J. Appl. Mech., 1962, vol. 29, ser. E, N 1, p. 171—176.
4. Shohet J. L., Osterle J. F., Young F. J. Velocity and temperature profiles for laminar magnetohydrodynamic flow in the entrance region of a plane channel. The Physics of Fluids, 1962, vol. 5, N 5, p. 545—549.
5. Shohet J. L. Velocity and temperature profiles for laminar magnetohydrodynamic flow in the entrance region of an annular channel. The Physics of Fluids, 1962, vol. 5, N 8, p. 879—885.
6. Охременко Н. М. Развитие ламинарного течения вязкой электропроводной жидкости между параллельными плоскостями под действием поперечного магнитного поля. Сб. Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы. Рига, АН ЛатвССР, 1962, II, стр. 551—557.
7. Охременко Н. М. Развитие ламинарного течения проводящей жидкости в плоском канале при наличии бегущего магнитного поля. ПМТФ, 1962, № 6.
8. Регирер С. А. Течение электропроводной жидкости в начальном участке плоской трубы. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 6.
9. Чекмарев И. Б. Установившееся течение слабо ионизованного газа между параллельными пластинами с учетом анизотропии проводимости. ПММ, 1961, т. 25, № 3.
10. Баранов В. Б. Установившееся течение ионизированного газа в плоском канале с учетом анизотропии проводимости. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 3.
11. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. Гостехиздат, М.— Л., 1951.
12. Любимов Г. А. К постановке задачи о магнитогидродинамическом пограничном слое. ПММ, 1962, т. 26, № 5.