Прикладная математика и механика. Том XXVII, 1963

ОСЦИЛЛИРУЮЩИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

М. И. Шлиомис

(Иваново)

Исследовано в общем виде влияние однородного магнитного поля на характер затухания малых возмущений равновесия проводящей жидкости в полости любой формы. Показано, что при малых числах Гартмана M существуют два типа нормальных возмущений: «магнитный» и «гидродинамический». Возмущения обоих типов затухают всегда монотонно. Выше некоторого критического $M = M_*$ в спектре нормальных возмущений появляются такие, которые уже нельзя отнести ни к магнитным, ни к гидродинамическим: тип их не выражен. Эти нормальные возмущения осциллируют со временем, причем для M, немногим превышающих M_*, их частоты пропорциональны $(M - M_*)^{1/2}$. Происхождение критической точки необходимо связано с наличием двух типов возмущений при малых M. Полностью исследован характер особенности, которую имеют возмущения в самой этой точке.

1. Уравнения для нормальных возмущений. Во внешнем однородном магнитном поле

$$\mathbf{H}_0 = \gamma H_0, \qquad \gamma^2 = 1 \tag{1.1}$$

жидкость с проводимостью σ заполняет полость произвольной формы, вырезанную в бесконечном твердом массиве проводимости σ°.

В равновесии скорость жидкости всюду равна нулю, а магнитное поле равно внешнему.

При малых возмущениях равновесия жидкость движется со скоростями $\mathbf{u}$ и появляется добавочное магнитное поле $\mathbf{h}$ (как в жидкости, так и в окружающем массиве). Линеаризованные уравнения для возмущений будут [1]

$$\text{в жидкости} \qquad \begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= -\nabla p + \nabla^2\mathbf{u} + M(\gamma\nabla)\mathbf{h}, \quad \nabla\mathbf{u} = 0 \\ N\dot{\mathbf{h}} &= \nabla^2\mathbf{h} + M(\gamma\nabla)\mathbf{u}, \qquad \nabla\mathbf{h} = 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\text{в массиве} \qquad N\dot{\mathbf{h}} = \frac{\sigma}{\sigma^\circ}\nabla^2\mathbf{h}, \qquad \nabla\mathbf{h} = 0 \tag{1.3}$$

В эти уравнения входят безразмерные параметры

$$N = \frac{4\pi\eta\sigma}{\rho c^2}, \qquad M^2 = \frac{H_0^2\sigma l^2}{\eta c^2} \tag{1.4}$$

Здесь l — характерный размер полости, ρ и η — плотность и вязкость жидкости. Считая N постоянным, будем исследовать уравнения (1.2) в зависимости от числа Гартмана M.

На краю полости должна обращаться в нуль скорость жидкости, должно быть непрерывным магнитное поле и, сверх того [2], должна быть непрерывной касательная к поверхности полости компонента напряженности электрического поля. Отсюда следуют краевые условия на поверхности полости:

$$\mathbf{u} = 0, \qquad \mathbf{h} = \mathbf{h}^\circ, \qquad (\mathrm{rot}\ \mathbf{h})_t = \frac{\sigma}{\sigma^\circ}(\mathrm{rot}\ \mathbf{h}^\circ)_t \tag{1.5}$$

(Кружочком отмечаем величины в массиве.) На бесконечности $\mathbf{h} \to 0$. Легко проверить, что в силу краевых условий теорема Гаусса даст, например

$$\int\limits_V \mathbf{h}^* \cdot \nabla^2 \mathbf{h}\, dV + \frac{\sigma}{\sigma^\circ}\int\limits_{V^\circ} \mathbf{h}^* \cdot \nabla^2 \mathbf{h}\, dV = -\int\limits_V \mathrm{rot}\ \mathbf{h}^* \cdot \mathrm{rot}\ \mathbf{h}\, dV -$$

$$-\frac{\sigma}{\sigma^\circ}\int\limits_{V^\circ} \mathrm{rot}\,\mathbf{h}^* \cdot \mathrm{rot}\ \mathbf{h}\, dV = \int\limits_V \mathbf{h} \cdot \nabla^2 \mathbf{h}^*\, dV + \frac{\sigma}{\sigma^\circ}\int\limits_{V^\circ} \mathbf{h} \cdot \nabla^2 \mathbf{h}^* dV$$

и аналогично в других случаях. Для краткости будем писать

$$\int \text{ вместо } \int\limits_V + \frac{\sigma}{\sigma^\circ}\int\limits_{V^\circ} \tag{1.6}$$

Для краткости записей введем шестикомпонентное возмущение u, действующие на u операторы K и I, градиент «давления» ∇p

$$u \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix}, \qquad K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \qquad I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \nabla p \equiv \begin{bmatrix} \nabla p \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

Тогда уравнения (1.2) запишутся так:

$$K\dot{u} = -\nabla p + \nabla^2 u + M(\gamma \cdot \nabla) Iu, \qquad \nabla u = 0 \tag{1.8}$$

Величина, эрмитово-сопряженная с (1.7), будет обозначаться

$$u^+ \equiv [\mathbf{u}^*, \mathbf{h}^*] \tag{1.9}$$

и скалярным произведением v на u будет называться интеграл

$$(v \cdot u) \equiv \int v^+ u dV = \int [\mathbf{v}^*, \ \ \mathbf{g}^*] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix} dV = \int \{\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{u} + \mathbf{g}^* \cdot \mathbf{h}\}\, dV \tag{1.10}$$

Если положить $u \sim e^{-\lambda t}$, то из (1.8) получатся уравнения для нормальных возмущений

$$-\lambda K u = Lu \equiv -\nabla p + \nabla^2 u + M(\gamma \cdot \nabla) Iu, \qquad \nabla u = 0 \tag{1.11}$$

Оператор L в (1.11) — несамосопряженный. В самом деле, умножая правую часть (1.11) скалярно на v и применяя теорему Гаусса, получим

$$(v \cdot \{-\nabla p + \nabla^2 u + M(\gamma \cdot \nabla) Iu\}) = (\{-\nabla q + \nabla^2 v - M(\gamma \cdot \nabla) Iv\} \cdot u)$$

(со знаком «минус» перед M), так что сопряженные с (1.11) уравнения будут

$$-\lambda^* K v = L^+ v \equiv -\bar{\nabla} q + \bar{\nabla}^2 v - M(\gamma \nabla) Iv, \qquad \nabla v = 0 \tag{1.12}$$

Тот факт, что $L^+(M)$ оказался равен просто $L(-M)$, позволяет заключить, что если u определяемое (1.7), будет решением уравнений (1.11), то (1.12) имеет решение

$$v = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^* \\ -\mathbf{h}^* \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

Решение краевой задачи (1.11) или (1.12) с граничными условиями (1.5) даст бесконечную последовательность собственных чисел или декрементов λ_α и соответствующих им нормальных возмущений u_α; одновременно получится и последовательность сопряженных нормальных возмущений v_α с декрементами λ_α^*. Как выше замечено

$$v_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_\alpha \\ \mathbf{g}_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_\alpha^* \\ -\mathbf{h}_\alpha^* \end{bmatrix} \tag{1.14}$$

Все декременты λ_α могут оказаться «простыми», и тогда система величин u_α будет полной, т. е. любая величина u будет разлагаться в ряд по u_α. Случай вырождения (кратных декрементов) более сложен, и именно он, как окажется далее, и представляет наибольший интерес.

Легко видеть, что всякое нормальное возмущение с декрементом λ_α ортогонально в некотором смысле ко всем сопряженным нормальным возмущениям, декременты которых λ_β^* не равны λ_α^*. В самом деле, из (1.11) и (1.12) получается

$$-\lambda_\beta (v_\alpha \cdot K u_\beta) = (v_\alpha \cdot L u_\beta) = (L^+ v_\alpha \cdot u_\beta) = -\lambda_\alpha (K v_\alpha \cdot u_\beta) = -\lambda_\alpha (v_\alpha \cdot K u_\beta)$$

и, следовательно, для $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$

$$(v_\alpha \cdot K u_\beta) = \int \{\mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\beta - N \mathbf{h}_\alpha \cdot \mathbf{h}_\beta\} \, dV = 0 \tag{1.15}$$

Наконец, из (1.11) легко получить интегральные соотношения

$$(\lambda + \lambda^*) \int \{\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} + N \mathbf{h}^* \mathbf{h}\} \, dV = \int \{\mathrm{rot}\, \mathbf{u}^* \cdot \mathrm{rot}\, \mathbf{u} + \mathrm{rot}\, \mathbf{h}^* \cdot \mathrm{rot}\, \mathbf{h}\} \, dV \tag{1.16}$$

$$(\lambda - \lambda^*) \int \{\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} - N \mathbf{h}^* \cdot \mathbf{h}\} \, dV = 0 \tag{1.17}$$

Из них следует, во-первых, что $\mathrm{Re}\, \lambda > 0$, т. е. все нормальные возмущения со временем затухают, и, во-вторых, что необходимым условием существования комплексных декрементов (т. е. колебательных возмущений) является равенство нулю интеграла в (1.17).

Пусть существует число Гартмана M_* такое, что некоторое нормальное возмущение номера α затухает монотонно ($\mathrm{Im}\, \lambda_\alpha = 0$) при $M < M_*$, и осциллирует со временем при $M > M_*$. В последней области чисел Гартмана, как это следует из (1.17), величина u_α ортогональна к комплексно сопряженной с ней u_α^*

$$\int \{\mathbf{u}_\alpha^* \cdot \mathbf{u}_\alpha - N \mathbf{h}_\alpha^* \cdot \mathbf{h}_\alpha\} \, dV = 0 \tag{1.18}$$

Это равенство, справедливое для $M > M_*$, по непрерывности должно выполняться и в точке M_*, где интеграл (1.18) совпадает с нормировочным (так как $\mathrm{Im}\, \lambda_\alpha (M_*) = 0$, то собственный вектор u_α может быть выбран действительным: $u_\alpha^* = u_\alpha$). Итак, если увеличивать число Гартмана начиная от нуля (при $M = 0$ все возмущения затухают монотонно), то появлению каждого нового колебательного возмущения α всякий раз будет предшествовать обращение в нуль соответствующего нормировочного интеграла

$$(v_\alpha \{M_*\} \cdot K u_\alpha \{M_*\}) = \int \{\mathbf{u}_\alpha^2 - N \mathbf{h}_\alpha^2\} \, dV = 0 \tag{1.19}$$

Именно этот случай и надлежит исследовать.

2. Два типа нормальных возмущений при малых числах Гартмана. Если нет внешнего поля, то $M = 0$, и уравнения (1.11) распадаются на две не связанные одна с другой задачи

$$-\lambda \mathbf{u} = \nabla^2 \mathbf{u} - \nabla p, \qquad \nabla \mathbf{u} = 0; \qquad -\lambda N \mathbf{h} = \nabla^2 \mathbf{h}, \qquad \nabla \mathbf{h} = 0 \tag{2.1}$$

Решая их, получим бесконечную последовательность магнитных возмущений $\lambda_{1\alpha}$, $u_{1\alpha}$ и бесконечную же последовательность гидродинамических возмущений $\lambda_{2\alpha}$, $u_{2\alpha}$

$$\lambda_{1\alpha}, \quad u_{1\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{h}_{1\alpha} \end{bmatrix}, \qquad \lambda_{2\alpha}, \quad u_{2\alpha} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{2\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.2}$$

Во внешнем поле всякое движение жидкости будет сопровождаться возмущением магнитного поля, а всякое возмущение поля — движением жидкости, так что тип возмущения не будет выражен ясно. Однако при достаточно малых M, просто по непрерывности, можно будет условно говорить о «магнитных» и «гидродинамических» возмущениях, причем можно установить совершенно точный критерий, позволяющий различать их. Именно, как было показано в работе [1] (где, однако, наличие двух типов возмущений не было замечено), при малых M существуют разложения нормальных возмущений по степеням M^2. В работе [1] были построены ряды вида

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2^{(0)} + M^2 \mathbf{u}_2^{(1)} + M^4 \mathbf{u}_2^{(2)} + \ldots, \qquad \mathbf{h}_2 = M \mathbf{h}_2^{(1)} + M^3 \mathbf{h}_2^{(2)} + \ldots$$
$$\lambda_2 = \lambda_2^{(0)} + M^2 \lambda_2^{(1)} + M^4 \lambda_2^{(2)} + \ldots \tag{2.3}$$

При $M = 0$ здесь остается только скорость, магнитное же поле обращается в нуль, так что изображаемые ими возмущения непрерывно примыкают к гидродинамическим. Очевидно, что для них, по крайней мере для достаточно малых M, нормировочные интегралы положительны

$$\int \{\mathbf{u}_2^2 - N \mathbf{h}_2^2\}\, dV > 0 \tag{2.4}$$

Из симметрии уравнений (1.11) относительно $\mathbf{u}$ и $\mathbf{h}$ сразу следует, что будут существовать и другие разложения

$$\mathbf{u}_1 = M \mathbf{u}_1^{(1)} + M^3 \mathbf{u}_1^{(2)} + \ldots, \qquad \mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_1^{(0)} + M^2 \mathbf{h}_1^{(1)} + M^4 \mathbf{h}_1^{(2)} + \ldots$$
$$\lambda_1 = \lambda_1^{(0)} + M^2 \lambda_1^{(1)} + M^4 \lambda_1^{(2)} + \ldots \tag{2.5}$$

Изображаемые ими возмущения при $M \to 0$ непрерывно переходят в магнитные и очевидно, что для достаточно малых M их нормировочные интегралы отрицательны

$$\int \{\mathbf{u}_1^2 - N \mathbf{h}_1^2\}\, dV < 0 \tag{2.6}$$

Можно показать, как это сделано в работе [1], что все разложения (2.3) и (2.5) вещественны, так что пока они сходятся, осциллирующих возмущений нет. Возмущения при этом однозначно разделяются на «магнитные» (первый индекс *1*) и «гидродинамические» (первый индекс *2*). Как уже было показано, они ортогональны между собой и могут быть нормированы так, что

$$(v_{m\alpha} \cdot Ku_{n\beta}) \equiv \int \{\mathbf{u}_{m\alpha} \cdot \mathbf{u}_{n\beta} - N\mathbf{h}_{m\alpha} \cdot \mathbf{h}_{n\beta}\}\, dV = (-)^n \delta_{mn}\delta_{\alpha\beta}$$

$$(m,\ n = 1,\ 2;\ \alpha = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{2.7}$$

Описанное положение будет существовать до тех пор, пока при некотором $M = M_*$ нормировочный интеграл какого-либо нормального возмущения не обратится в нуль. Декременты не могут при этом остаться простыми. В самом деле, тогда все нормальные возмущения в M_* были бы по-прежнему ортогональны между собой, а одно из них (то, для которого нормировочный интеграл — нуль) было бы еще ортогонально и к самому себе. Система нормальных возмущений, следовательно, перестает быть полной [1]. Но это неправдоподобно по физическим соображениям, так как любое малое возмущение должно складываться из нормальных возмущений, описываемых уравнениями (1.11).

Очевидно, нужно исследовать точки слияния двух декрементов. При этом могут представиться следующие два случая:

1°. В точке слияния M_* существуют два собственных решения задачи (1.11), т. е. два нормальных возмущения. Сформулированное выше требование полноты системы нормальных возмущений позволяет заключить, что и в этом случае ни один нормировочный интеграл не может обратиться в нуль в точке M_*.

2°. В точке слияния двух декрементов не существует двух нормальных возмущений. Случай этот рассмотрен в следующем параграфе.

3. Точки разветвления. Несамосопряженность оператора L в задаче (1.11) уже отмечалась в § 1. Известно [3], что число собственных функций такого оператора, относящихся к вырожденному собственному значению, может быть меньше кратности вырождения. Для поставленной задачи достаточно рассмотреть случай кратности два, когда оператор L преобразует две линейно независимые величины u_1 и u_2 в линейные комбинации их самих. Одну из них всегда можно выбрать так, что она будет собственной для L

$$Lu_1 = -\lambda K u_1, \qquad Lu_2 = -\mu K u_2 + \nu K u_1 \tag{3.1}$$

Если $\mu \neq \lambda$, то легко видеть, что некоторая линейная комбинация u_1 и u_2 будет второй собственной величиной для L. Итак, для двукратно вырожденного λ существуют две величины (первая из них называется собственной, вторая — присоединенной), для которых

$$Lu_1 = -\lambda K u_1, \qquad Lu_2 = -\lambda K u_2 + K u_1 \tag{3.2}$$

(Изменив нормировку u_1, всегда можно сделать $\nu = 1$.)

---

[1] Легко видеть, что если для $u_{m\alpha}$

$$(v_{m\alpha} \cdot Ku_{m\alpha}) = 0$$

то эта величина не разлагается по $u_{n\beta}$: все коэффициенты $a_{n\beta}$ ряда

$$u_{m\alpha} = \sum_{n,\ \beta} a_{n\beta} u_{n\beta}$$

оказываются нулями.

Оказывается более удобным вместо собственной и присоединенной величин рассматривать их сумму и разность, которые будем по-прежнему обозначать u_1 и u_2. Очевидно, для них имеют место уравнения

$$Lu_1 = -\lambda K u_1 + \tfrac{1}{2} K (u_1 + u_2), \qquad Lu_2 = -\lambda K u_2 - \tfrac{1}{2} K (u_1 + u_2) \tag{3.3}$$

и для сопряженных (3.4)

$$L^+ v_1 = -\lambda^* K v_1 + \tfrac{1}{2} K (v_1 + v_2), \qquad L^+ v_2 = -\lambda^* K v_2 - \tfrac{1}{2} K (v_1 + v_2)$$

Из (3.3) и (3.4) следует

$$(v_1 \cdot K u_2) = (v_2 \cdot K u_1), \qquad (v_1 \cdot K u_1) + (v_2 \cdot K u_2) + 2 (v_1 \cdot K u_2) = 0 \tag{3.5}$$

Не трогая u_1 и u_2, можно заменить v_1 и v_2 их линейными комбинациями

$$v_1 \to a v_1 + b v_2, \qquad v_2 \to -b v_1 + (a - 2b) v_2 \tag{3.6}$$

(где a, b произвольны), снова удовлетворяющими уравнениям (3.4). Константы a и b можно подобрать так, чтобы

$$(v_1 \cdot K u_2) = 0 \tag{3.7}$$

и тогда из (3.5) следует

$$(v_1 \cdot K u_1) = -(v_2 \cdot K u_2) \tag{3.8}$$

В последних обозначениях сумма $u_1 + u_2$ представляет собственную величину оператора L, а $v_1 + v_2$ — оператора L^+. Принимая во внимание (3.7) и (3.8), найдем, что нормировочный интеграл для собственной величины равен нулю

$$((v_1 + v_2) \cdot K (u_1 + u_2)) = 0 \tag{3.9}$$

Итак, обращение нормировочного интеграла в нуль необходимо связано со слиянием двух собственных чисел и исчезновением одной собственной величины. Направление дальнейшего исследования теперь ясно.

Предположим, что в точке $M = M_*$ все декременты — вещественные, и все, кроме одного λ_*,— простые. Кратность λ_* равна двум. Этому декременту соответствуют два «квазинормальных» возмущения, удовлетворяющих уравнениям вида (3.3) (3.10)

$$-\lambda_* K u_{10} = -\nabla p_{10} + \nabla^2 u_{10} + M_* (\gamma \cdot \nabla) I u_{10} + \tfrac{1}{2} K (u_{10} + u_{20})$$

$$-\lambda_* K u_{20} = -\nabla p_{20} + \nabla^2 u_{20} + M_* (\gamma \cdot \nabla) I u_{20} - \tfrac{1}{2} K (u_{10} + u_{20})$$

Сопряженные квазинормальные возмущения, удовлетворяющие таким же уравнениям, но где M_* заменено на $-M_*$, выберем так, чтобы

$$(v_{m0}, K u_{n0}) = (-)^n \delta_{mn} \qquad (m, n = 1, 2) \tag{3.11}$$

Легко видеть, что зависящими от времени решениями уравнений (1.8), соответствующими λ_*, являются

$$e^{-\lambda_* t} (u_{10} + u_{20}), \qquad e^{-\lambda_* t} (u_{10} - u_{20}) + t e^{-\lambda_* t} (u_{10} + u_{20}) \tag{3.12}$$

Простым декрементам $\lambda_{n\alpha}$ ($n = 1, 2$; $\alpha > 0$) соответствуют нормальные возмущения $u_{n\alpha}$, для которых

$$-\lambda_{n\alpha} K u_{n\alpha} = -\nabla p_{n\alpha} + \nabla^2 u_{n\alpha} + M_* (\gamma \cdot \nabla) I u_{n\alpha} \qquad (3.13)$$

Все нормальные и квазинормальные возмущения образуют полную систему величин

$$\lambda_*, \quad u_{10}, \quad u_{20}, \qquad \lambda_{n\alpha}, \quad u_{n\alpha} \quad (n = 1, 2;\ \alpha = 1, 2, \ldots)$$

взаимно-ортогональных и нормированных согласно условию (2.7). Так что любое u разлагается в ряд вида

$$u = \sum_{n,\,\alpha} b_{n\alpha} u_{n\alpha}, \qquad b_{n\alpha} = (-1)^n (v_{n\alpha}, Ku) \quad (n = 1, 2;\ \alpha = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (3.14)$$

В дальнейшем второй индекс (нуль) у квазинормальных возмущений будем опускать.

Рассмотрим теперь значения M, близкие к M_*. При этих значениях не существует разложений u и λ по целым степеням $\xi = (M - M_*)$, т. е. точка M_* является особой. Чтобы убедиться в этом, запишем уравнение (1.11) в виде

$$-\lambda K u = -\nabla p + \nabla^2 u + M_* (\gamma \nabla) I u + \xi (\gamma \nabla) I u \qquad (3.15)$$

и положим в нем

$$u = u^{(0)} + \xi u^{(1)} + \ldots, \qquad \lambda = \lambda_* + \xi \lambda^{(1)} + \ldots \qquad (3.16)$$

Умножая (3.15) на $v_1 + v_2$ и собирая члены, не содержащие ξ, получим, в силу (3.10), $u^{(0)} \sim (u_1 + u_2)$. Из рассмотрения членов, содержащих первую степень ξ, следует

$$((v_1 + v_2) \cdot (\gamma \cdot \nabla) I (u_1 + u_2)) \equiv \int (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)(\gamma \cdot \nabla)(\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2)\, dV = 0 \qquad (3.17$$

Но интеграл (3.17) может оказаться нулем лишь чисто случайно. Действительно, как нетрудно видеть из (1.11) и (2.1), это означало бы, что при $M = 0$ два возмущения разных типов имеют одинаковые декременты

$$\lambda_{1\alpha}(0) = \lambda_{2\alpha}(0) = \lambda_*(M_*)$$

Для такого совпадения нет, разумеется, никаких физических оснований: в отсутствие внешнего поля магнитные возмущения никак не связаны с гидродинамическими.

Покажем, что особая точка M_* есть точка разветвления, около которой вырождающиеся декременты и нормальные возмущения разлагаются по целым степеням величины

$$\eta = (M - M_*)^{1/2} \qquad (3.18)$$

т. е. существуют ряды вида

$$u = u^{(0)} + \eta u^{(1)} + \eta^2 u^{(2)} + \ldots, \qquad \lambda = \lambda_* + \eta \lambda^{(1)} + \eta^2 \lambda^{(2)} + \ldots \qquad (3.19)$$

удовлетворяющие уравнениям (1.11) и соответствующие ряды для уравнений (1.12). Подстановка этих рядов в уравнения и отбор членов с одинаковыми степенями η даст последовательность уравнений, которые не будем выписывать в общем виде. Уравнение нулевого порядка будет

$$-\lambda_* K u^{(0)} = -\nabla p^{(0)} + \nabla^2 u^{(0)} + M_* (\gamma \nabla) I u^{(0)} \tag{3.20}$$

Из него следует (см. (3.10)), что

$$u^{(0)} = u_1 + u_2 \tag{3.21}$$

Это можно было предвидеть заранее, так как только сумма квазинормальных возмущений меняется со временем по чисто показательному закону, по которому при $M < M_*$ меняются нормальные возмущения. Потребуем, чтобы все $u^{(k)}$ в разложении (3.19) не содержали $(u_1 + u_2)$, что равносильно изменению нормировки. Тогда

$$u^{(k)} = b^{(k)} (u_1 - u_2) + \sum_{n,\ \alpha>0} b_{n\alpha}^{(k)} u_{n\alpha} \tag{3.22}$$

и, следовательно,

$$(v_1 \cdot K u^{(k)}) = (v_2 \cdot K u^{(k)}) = -b^{(k)} \tag{3.23}$$

Рассмотрим далее уравнение первого порядка

$$-\lambda_* K u^{(1)} + \nabla p^{(1)} - \nabla^2 u^{(1)} - M_* (\gamma \cdot \nabla) I u^{(1)} = \lambda^{(1)} K (u_1 + u_2) \tag{3.24}$$

Умножая его скалярно на v_1 (или на v_2), получим

$$(K (v_1 + v_2) \cdot u^{(1)}) = -2\lambda^{(1)}$$

т. е. по (3.23)

$$b^{(1)} = \lambda^{(1)} \tag{3.25}$$

а умножая на $v_{n\alpha}$ $(\alpha > 0)$

$$(v_{n\alpha} \cdot K u^{(1)}) = b_{n\alpha}^{(1)} = 0 \tag{3.26}$$

Следовательно,

$$u^{(1)} = \lambda^{(1)} (u_1 - u_2) \tag{3.27}$$

причем $\lambda^{(1)}$ остается неопределенным.

Второй порядок дает

$$-\lambda_* K u^{(2)} + \nabla p^{(2)} - \nabla^2 u^{(2)} - M_* (\gamma \cdot \nabla) I u^{(2)} =$$
$$= \lambda^{(1)} K u^{(1)} + \lambda^{(2)} K (u_1 + u_2) + (\gamma \cdot \nabla) I (u_1 + u_2) \tag{3.28}$$

Умножая это уравнение скалярно на $(v_1 + v_2)$, получим

$$[\lambda^{(1)}]^2 = ((v_1 + v_2) \cdot (\gamma \cdot \nabla) I (u_1 + u_2)) \equiv -B^2 \tag{3.29}$$

а умножая на $(v_1 - v_2)$

$$b^{(2)} = \lambda^{(2)} - ((v_1 - v_2) \cdot (\gamma \cdot \nabla) I (u_1 + u_2))$$

Умножение уравнения (3.28) на $v_{n\alpha}$ дало бы $b_{n\alpha}^{(2)}$ и т. д. Ясно, что таким образом можно получить все коэффициенты рядов (3.19).

При $M < M_*$, т. е. при чисто мнимом

$$\eta = i\varepsilon \qquad (\varepsilon > 0) \tag{3.30}$$

по предположению, должны получиться вещественные нормальные возмущения, соответствующие двум разным вещественным декрементам.

Их разложения, как теперь выяснено (формулы (3.21), (3.27), (3.29)), имеют вид

$$\lambda_{10}(M_* - \varepsilon^2) = \lambda_* + \varepsilon B + \ldots,$$

$$u_{10}(M_* - \varepsilon^2) = (u_1 + u_2) + \varepsilon B(u_1 - u_2) + \ldots \quad (3.31)$$

$$\lambda_{20} = \lambda_* - \varepsilon B + \ldots, \qquad u_{20} = (u_1 + u_2) - \varepsilon B(u_1 - u_2) + \ldots \quad (3.32)$$

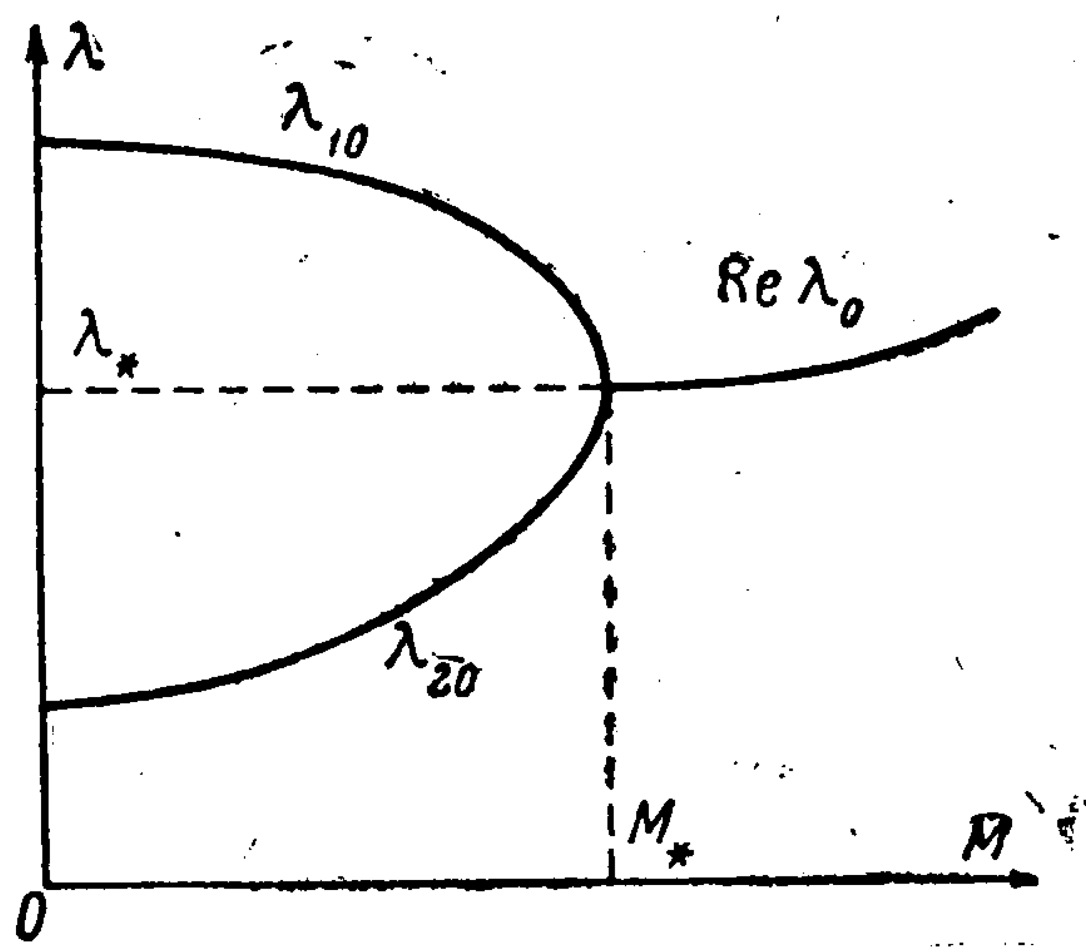
Таким образом, B вещественно, т. е. интеграл

$$((v_1 + v_2)\cdot(\gamma\cdot\nabla)\, I\, (u_1 + u_2)) < 0 \quad (3.33)$$

Выбирая $B > 0$, из (3.31) и (3.32) найдем

$$(v_{10}\cdot Ku_{10}) = -2B\varepsilon + \ldots < 0, \qquad (v_{20}\cdot Ku_{20}) = 2B\varepsilon + \ldots > 0 \quad (3.34)$$

Это приводит к важному следствию: в критической точке сливаются декременты непременно разных типов — магнитного и гидродинамического (фигура).



По другую сторону точки разветвления, т. е. при $M > M_*$, η вещественно, и получаются два комплексно-сопряженных декремента с соответствующими нормальными возмущениями. Их разложения вблизи M_* будут

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{(1,2)0} &= \lambda_* \pm iB\eta + \ldots, \\ u_{(1,2)0} &= (u_1 + u_2) \pm iB\eta\,(u_1 - u_2) + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (3.35)$$

так что со временем они изменяются, осциллируя с частотой равной

$$B\eta = B(M - M_*)^{1/2} \quad (3.36)$$

Приношу глубокую благодарность В. С. Сорокину за предложение темы настоящей работы, внимательное руководство и ценную помощь.

Поступила 12 XII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Сорокин В. С., Сушкин И. В. Устойчивость равновесия подогреваемой снизу проводящей жидкости в магнитном поле. ЖЭТФ, 1960, т. 38, вып. 2.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1957.
3. Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений. ДАН СССР, 1951, т. 77, № 1.