

РАСЧЕТ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЕ, ОБТЕКАЕМОЙ ПОТОКОМ НЕСЖИМАЕМОЙ АНИЗОТРОПНО-ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ, В ПРИСУТСТВИИ ОДНОРОДНОГО НОРМАЛЬНОГО ПЛАСТИНЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В. Б. Баранов, Г. А. Любимов, Ху Юй-инь

(Москва)

Используя результаты работ [1-3] решается задача о пограничном слое на пластине, обтекаемой несжимаемой анизотропно-проводящей жидкостью в присутствии однородного нормального пластине магнитного поля.

Решение проводится для двух различных случаев — слабо ионизованной и полностью ионизованной среды — при различных условиях во внешнем потоке.

Считается, что циклотронная частота вращения ионов мала по сравнению с частотой их соударений.

Решение строится путем линеаризации по некоторому параметру.

Численные расчеты были проведены на машине «Стрела» в вычислительном центре МГУ. Приводятся профили скоростей и температур в пограничном слое при различных значениях параметров, определяющих задачу.

Обозначения

- | | |
|--|---|
| v — вектор $\{u, v, w\}$ скорости среды, | τ_i — «время свободного пробега» электронов, |
| p — давление среды, | ρ_0 — характерная плотность задачи, |
| p_e — давление электронной компоненты среды, | L — характерный размер задачи, |
| ρ — плотность, | U — характерная скорость, |
| T — температура, | P — число Прандтля, |
| η — коэффициент вязкости, | R — число Рейнольдса, |
| λ — коэффициент теплопроводности при отсутствии магнитного поля, | M — число Маха, |
| c_p — теплоемкость при постоянном давлении, | Ω — характерная частота задачи, |
| c_v — теплоемкость при постоянном объеме, | δ — толщина динамического пограничного слоя, |
| σ — электропроводность среды при отсутствии магнитного поля, | δ° — толщина теплового пограничного слоя, |
| E — вектор напряженности $\{E_x, E_y, E_z\}$ электрического поля, | e — величина заряда электрона, |
| H_0 — напряженность однородного магнитного поля, | k — постоянная Больцмана, |
| j — вектор плотности $\{j_x, j_y, j_z\}$ электрического тока, | c — скорость света, |
| ρ_e — плотность электрического заряда, | m_i — массы электрона и иона соответственно ($i = 1, 2$), |
| ω_1 — циклотронная частота вращения электронов. | n_1 — концентрация электронов, |
| | T_w — температура пластины, |
| | T_∞ — температура в набегающем потоке, |
| | e_z — единичный вектор вдоль оси z . |

§ 1. Задача о динамическом пограничном слое. Всюду в дальнейшем рассматривается задача о пограничном слое на диэлектрической пластине, занимающей полуплоскость $z = 0, x > 0$. Магнитное поле считается однородным и нормальным пластине ($\mathbf{H} = H_0 \mathbf{e}_z$) в области $x > 0$ и отсутствующим в области $x < 0$. При $x < 0$ поток считается однородным и направленным вдоль оси x . Принимается, что $E_y = 0$ и все величины не зависят от y . Величины, характеризующие спиральный пробег электронов и ионов, считаются удовлетворяющими соотношениям: $\omega_1 \tau_1 \equiv \omega \tau \sim 1$, $\omega_2 \tau_2 \ll 1$. В этих условиях вязкость не зависит от магнитного поля. В дальнейшем для простоты вязкость (η), электропроводность в отсутствие магнитного поля (σ) и $\omega \tau$ считаются постоянными.

Постановка задачи о динамическом пограничном слое в этих условиях дана в работе [3], где эта задача решена для одной из возможных постановок задачи во внешнем потоке для случая слабо ионизованной среды. В данном параграфе эта же задача решается для других постановок задач.

Задача о динамическом пограничном слое в рассматриваемой постановке сводится к системе уравнений [3]

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + mL(-u + \omega \tau v + \omega \tau E_x^0) + \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \frac{\partial p_e}{\partial x} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= -mL(\omega \tau u + v + E_x^0) - \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \frac{\partial p_e}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Функции $p = p^*(x)$ и $E_x^0 = E_x^*(x)$ определяются из решения внешней задачи. В (1.1), как и всюду в дальнейшем, использованы следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} u &= \frac{u}{U}, \quad v = \frac{v}{U}, \quad w = \frac{w}{U}, \quad p = \frac{p}{\rho U^2} \\ \mathbf{E} &= \frac{c}{UH_0} \mathbf{E}, \quad R = \frac{\rho UL}{\eta}, \quad \mathbf{j} = \frac{L}{cH_0} \mathbf{j}, \quad mL = \frac{\sigma H^2 L}{\rho c^2 U (1 + \omega^2 \tau^2)} \end{aligned} \quad (1.2)$$

При получении уравнений (1.1) использован закон Ома в форме (в размерных величинах)

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right) - \frac{\omega \tau}{H} (\mathbf{j} \times \mathbf{H} - c \text{grad } p_e) \quad (1.3)$$

При рассмотрении полностью ионизованной среды в уравнениях (1.1) и (1.3) надо положить $2p_e = p$. При рассмотрении слабо ионизованных сред члены, содержащие электронное давление в (1.1) и (1.3), должны быть опущены. Будем искать решение системы (1.1) в виде

$$u = u_0 + mLu_1, \quad v = mLv_1, \quad w = w_0 + mLw_1, \quad p = p_0 + mLp_1 \text{ и т. д.} \quad (1.4)$$

Здесь индексом нуль обозначены величины, соответствующие задаче Блазиуса. Введем функции $f_0(\xi)$, $f_2(\xi)$, $\Phi(\xi)$ по формулам

$$\begin{aligned} u_0 &= f_0'(\xi), \quad u_1 = x f_2', \quad w_0 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{xR}} (f_0 - \xi f_0') \\ w_1 &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{R}} (3f_2 - f_2' \xi), \quad v = \omega \tau x \Phi(\xi), \quad \xi = z \sqrt{\frac{R}{x}} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Учитывая, что $\partial p_0 / \partial x = 0$, из (1.1) получим следующую систему уравнений для определения $f_2(\xi)$ и $\Phi(\xi)$

$$2f_2''' + f_0 f_2'' - 2f_0' f_2' + 3f_0'' f_2 - 2f_0' - 2 \left(\frac{\partial p_1^*}{\partial x} - \omega \tau E_{x_0}^* \right) + 2 \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \frac{\partial p_{e1}^*}{\partial x} = 0$$

$$2\Phi'' + f_0 \Phi' - 2f_0' \Phi - 2f_0' - 2 \left(\frac{1}{\omega \tau} E_{x_0}^* + \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} \frac{\partial p_{e1}^*}{\partial x} \right) = 0 \quad (1.6)$$

Здесь $f_0(\xi)$ — функция Блазиуса.

Для решения уравнений (1.6) необходимо определить $\partial p_1^* / \partial x$ и $E_{x_0}^*(x)$ и граничные условия для функций f_2 и Φ при $\xi = \infty$. Для этого необходимо решить следующие уравнения, определяющие добавки к решению Блазиуса ($u^* = 1$, $v^* = w^* = 0$, $\partial p_0^* / \partial x = 0$) во внешнем потоке

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial x} = - \frac{\partial p_1^*}{\partial x} - 1 + \omega \tau E_{x_0}^* + \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \frac{\partial p_{e1}^*}{\partial x}, \quad \frac{\partial w_1^*}{\partial x} = - \frac{\partial p_1^*}{\partial z}$$

$$\frac{\partial v_1^*}{\partial x} = - \omega \tau - E_{x_0}^* - \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \frac{\partial p_{e1}^*}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_1^*}{\partial x} + \frac{\partial w_1^*}{\partial z} = 0 \quad (1.7)$$

а также следующие уравнения, определяющие электрическое поле (E_0^*) во внешнем потоке:

$$\operatorname{div} E_0^* = 4\pi \rho_e^0 = - \omega^2 \tau^2 \frac{\partial E_{z_0}^*}{\partial z} - \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \left[(1 + \omega^2 \tau^2) \frac{\partial p_{1e}^*}{\partial z} + \frac{\partial^2 p_{e1}^*}{\partial x^2} \right]$$

$$\operatorname{rot} E_0^* = 0 \quad (1.8)$$

Причем, так как пластина считается диэлектриком, то

$$E_{z_0}^*(z=0) = 0$$

Для уравнений (1.7) — (1.8) возможны различные постановки задач.

Для решения уравнений (1.8), кроме условия на пластине $E_{z_0}^*(z=0) = 0$, необходимо сформулировать условие на бесконечности, которое зависит от того, каким образом замыкаются в бесконечности токи, текущие в плоскости xz .

В качестве такого условия будет использоваться одно из двух следующих условий. Либо будет считаться, что потенциал электрического поля постоянен на бесконечности, что соответствует полной нейтрализации заряда, переносимого токами в плоскости xz на бесконечности. При этом решение (1.8) имеет вид $E_0^* = 0$ и во внешнем потоке циркулируют токи в направлении оси x . Либо будет считаться, что плотность тока в плоскости xz исчезает на бесконечности $j_{xz\infty}^* = 0$.

В последнем случае можно показать, что из (1.8) следует $j_{xz}^* = 0$, а $E^* \neq 0$. Этот случай соответствует тому, что переносимый на бесконечность токами в плоскости xz заряд создает электрическое поле, уравновешивающее поле, индуцированное движением жидкости. Величина электрического поля при этом может быть рассчитана из закона Ома. Отметим, что в рассматриваемой постановке ($E_y^* = 0$) ток в направлении оси y всегда отличен от нуля. Если электрическое поле задано, то для определения внешнего потока необходимо решить систему (1.7).

В дальнейшем будут использоваться решения (1.7), соответствующие либо поступательному потоку ($u^* = U + mLu_1^* = U$, $u_1^* = 0$), либо течению с нулевым градиентом давления вдоль оси x ($\partial p_1^* / \partial x = 0$). Первый случай соответствует условиям, при которых электромагнитная сила во внешнем потоке (в первом приближении она постоянна) уравновешивается постоянным градиентом давления. Второй случай соответствует условиям, при которых внешний поток тормозится электромагнитными силами. При этом скорость во внешнем потоке будет функцией x ($u^*(x) = U + mLu_1^*(x)$),

определяемой системой (1.7). Отметим, что в случае $\partial p_1^* / \partial x = 0$ из уравнения неразрывности во внешнем потоке будет следовать, что $w \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow \infty$. Это указывает на то, что решения такого вида не существуют во всем потоке, их можно рассматривать только как решения, верные вблизи пластины, и сопрягать с решением вдали от пластины, где $\partial p_1^* / \partial x \neq 0$ (аналогичная ситуация имела место в [4]). В дальнейшем такое сопряжение рассматриваться не будет.

§ 2. Решение задачи о динамическом пограничном слое. В дальнейшем при решении задачи о пограничном слое будут рассмотрены четыре различные постановки задачи во внешнем потоке, соответствующие следующим решениям уравнений (1.7) — (1.8):

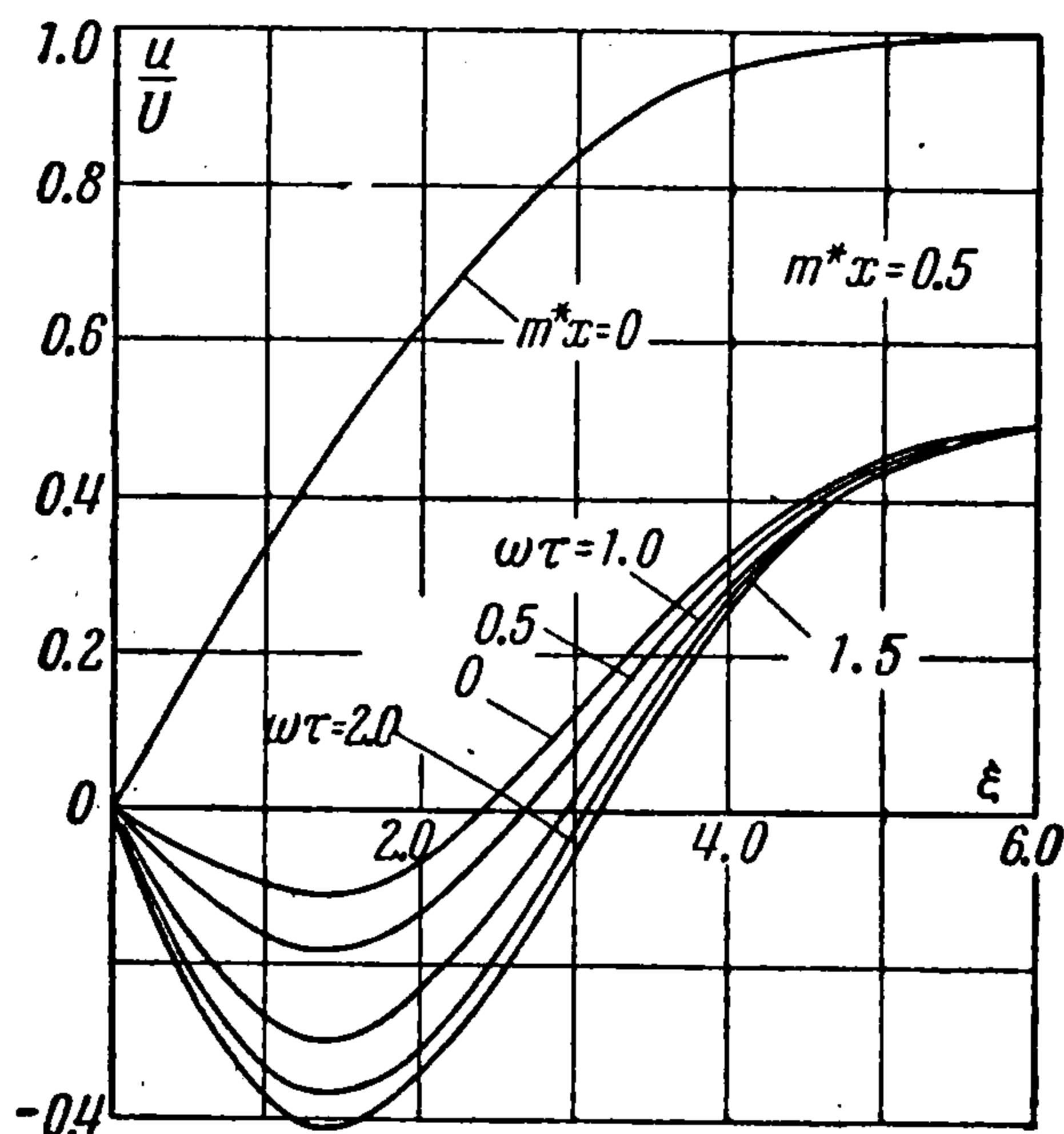
для слабоионизованной среды

$$j_{x1}^* = 0, \quad u_1^* = 0, \quad E_{x0}^* = -\omega\tau, \quad E_{z0}^* = 0, \quad v_1^* = 0, \quad w_1^* = 0$$

$$\frac{\partial p_1^*}{\partial x} = -(1 + \omega^2\tau^2), \quad j_{y1}^* = \frac{\rho U^2}{H_0^2} (1 + \omega^2\tau^2), \quad j_{z1}^* = 0 \quad (2.1)$$

$$E_{x0}^* = 0, \quad u_1^* = 0, \quad E_{z0}^* = 0, \quad v_1^* = -\omega\tau x, \quad w_1^* = 0, \quad \frac{\partial p_1^*}{\partial x} = -1$$

$$j_{x1}^* = \omega\tau \frac{\rho U^2}{H_0^2}, \quad j_{y1}^* = -\frac{\rho U^2}{H_0^2}, \quad j_{z1}^* = 0 \quad (2.2)$$



Фиг. 1 (2.5)

для полностью ионизованной среды

$$j_{x1}^* = 0, \quad u_1^* = 0, \quad E_{x0}^* = -0.5\omega\tau$$

$$E_{z0}^* = 0, \quad v_1^* = 0, \quad w_1^* = 0$$

$$\frac{\partial p_1^*}{\partial x} = -(1 + \omega^2\tau^2)$$

$$j_{y1}^* = -(1 + \omega^2\tau^2) \frac{\rho U^2}{H_0^2}, \quad j_{z1}^* = 0 \quad (2.3)$$

$$E_{x0}^* = 0, \quad u_1^* = 0, \quad E_{z0}^* = 0$$

$$v_1^* = -0.5\omega\tau \frac{1 + \omega^2\tau^2}{1 + 0.5\omega^2\tau^2} x, \quad w_1^* = 0$$

$$\frac{\partial p_1^*}{\partial x} = -\frac{1 + \omega^2\tau^2}{1 + 0.5\omega^2\tau^2}$$

$$j_{x1}^* = 0.5\omega\tau \frac{1 + \omega^2\tau^2}{1 + 0.5\omega^2\tau^2} \frac{\rho U^2}{H_0^2} \quad (2.4)$$

$$j_{y1}^* = -\frac{1 + \omega^2\tau^2}{1 + 0.5\omega^2\tau^2} \frac{\rho U^2}{H_0^2}, \quad j_{z1}^* = 0$$

Постановки, совпадающие для слабо и полностью ионизованной среды

$$j_{x1}^* = 0, \quad \frac{\partial p_1^*}{\partial x} = 0, \quad E_{x0}^* = -\omega\tau, \quad E_{z0}^* = 0, \quad u_1^* = -(1 + \omega^2\tau^2)x$$

$$v_1^* = 0, \quad w_1^* = (1 + \omega^2\tau^2)z, \quad j_{y1}^* = -\frac{\rho U^2}{H_0^2} (1 + \omega^2\tau^2), \quad j_{z1}^* = 0 \quad (2.5)$$

$$E_{x0}^* = 0, \quad \frac{\partial p_1^*}{\partial x} = 0, \quad E_{z0}^* = 0, \quad u_1^* = -x, \quad v_1^* = -\omega\tau x, \quad w_1^* = z$$

$$j_{x1}^* = \omega\tau \frac{\rho U^2}{H_0^2}, \quad j_{y1}^* = -\frac{\rho U^2}{H_0^2}, \quad j_{z1}^* = 0 \quad (2.6)$$

Подставляя решения (2.1) — (2.6) в (1.5) и (1.6), получим обыкновенные дифференциальные уравнения и граничные условия для определения

функций $f_2(\xi)$ и $\Phi(\xi)$ в каждом из указанных случаев. Эти уравнения интегрировались численно. Результаты, обработанные по формулам

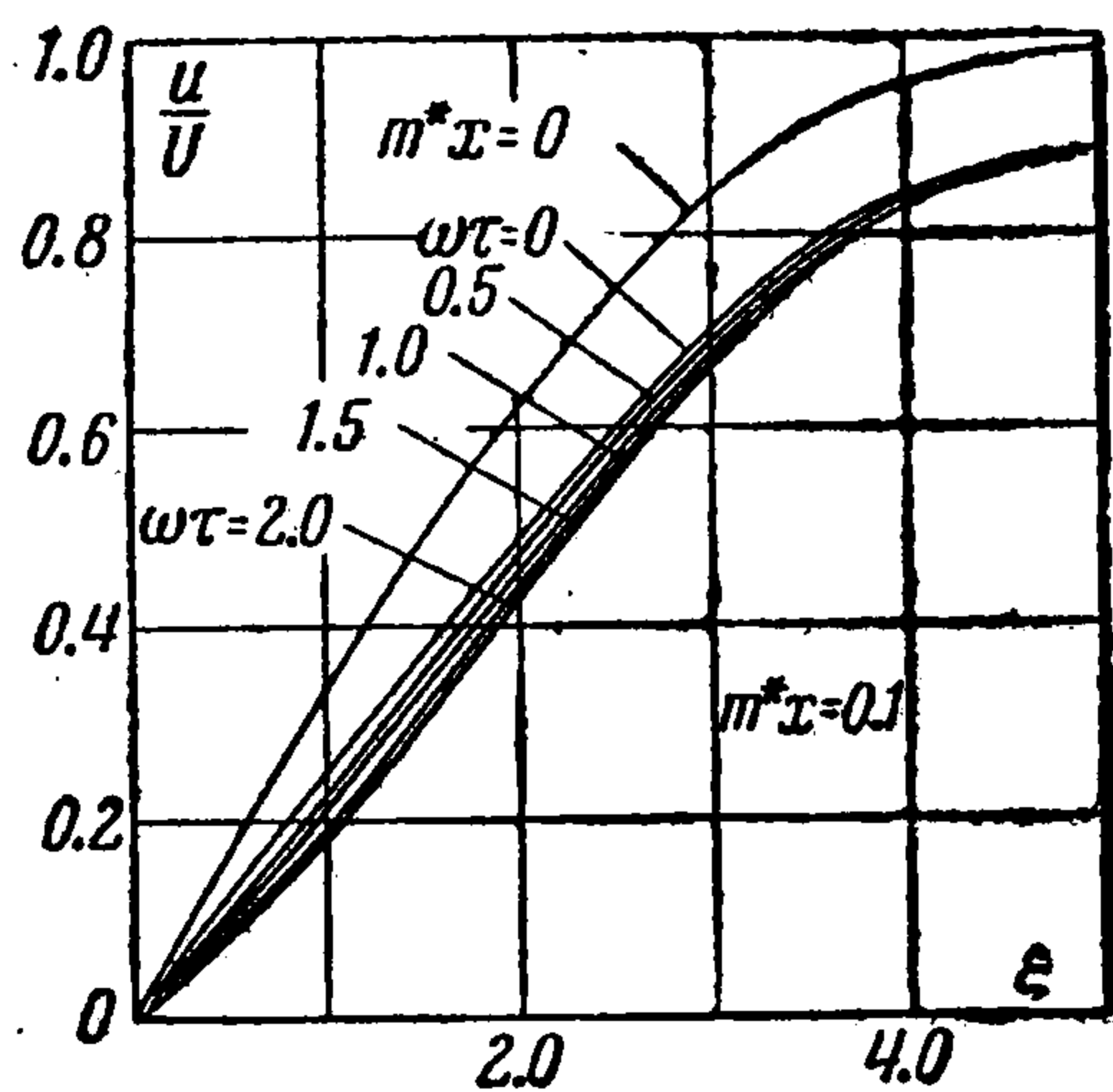
$$u = u_0 + mLu_1 = f_0' + \frac{m^*x}{1 + \omega^2\tau^2} f_2'$$

$$v = mLv_1 = \omega\tau \frac{m^*x}{1 + \omega^2\tau^2} \Phi, m^*x = \frac{\sigma H_0^2 x}{\rho U c^2}$$

иллюстрируются¹ фиг. 1—5, построенными для $m^*x = 0.5$ и различных значений $\omega\tau$ (естественно, что, зная функции f_2 и Φ , можно построить распределения скоростей для любых m^*x).

На всех графиках для сравнения приводится кривая для $m^*x = 0$, соответствующая задаче Блазиуса.

В работе [3] рассмотрен случай (2.2), но распределение продольной скорости u , приведенное в [3], будет одним и тем же для (2.1) — (2.4), а распределение поперечной скорости v — для (2.2), (2.6)².



Фиг. 3 (2.5)

Коэффициенты продольного C_x и поперечного C_y трения могут быть рассчитаны для различных случаев по формулам

$$C_x = 2\rho U^{-2}\eta \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{2}{\sqrt{R_x}} \left[f_0''(0) + \frac{m^*x}{1 + \omega^2\tau^2} f_2''(0) \right] \quad \left(R_x = \frac{\rho U x}{\eta} \right)$$

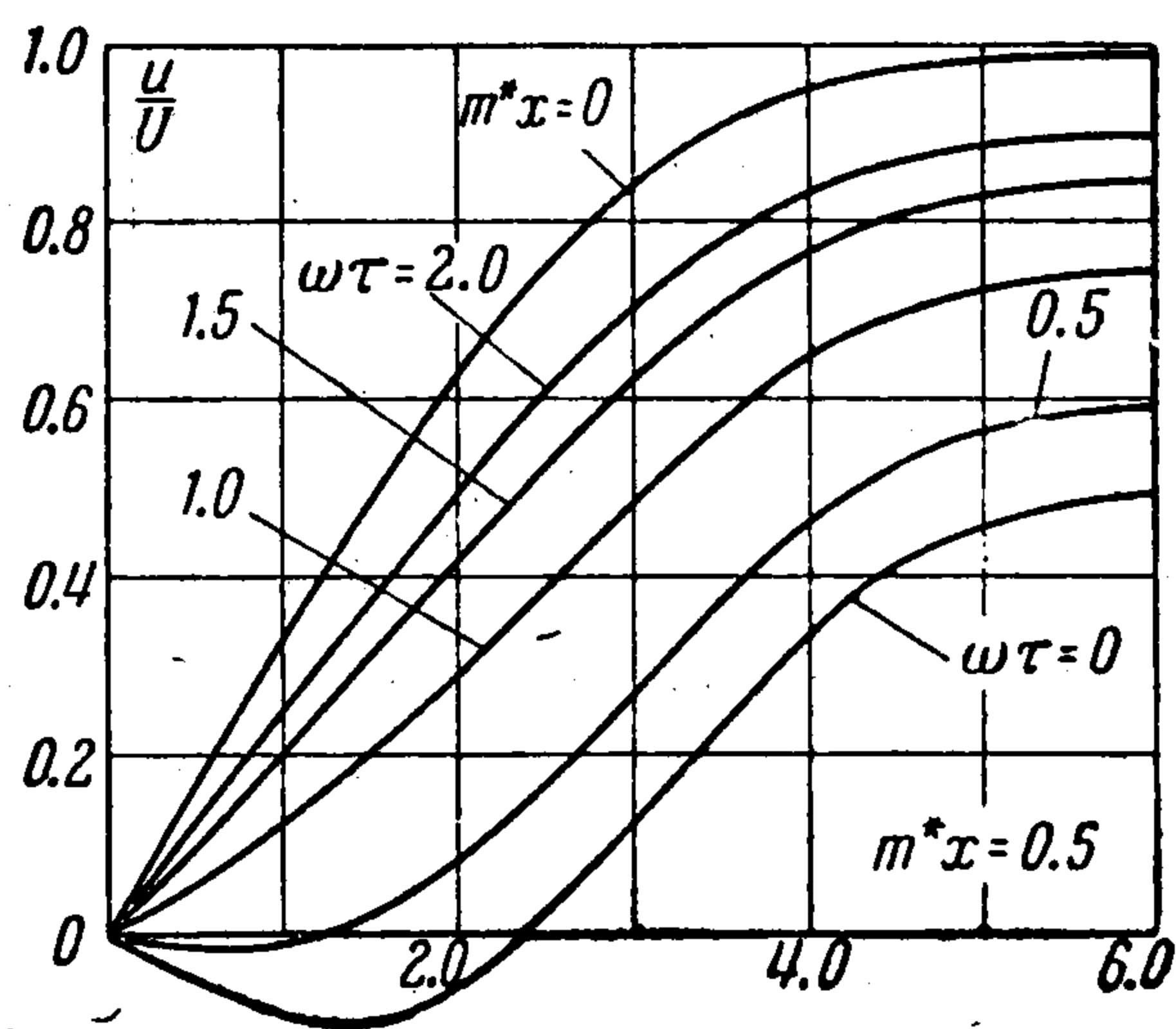
$$C_y = 2\rho U^{-2} \eta \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{2}{\sqrt{R_x}} m^*x \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \Phi'(0)$$

Здесь $f_0'' = 0.332$, значения $f_2''(0)$ и $\Phi'(0)$ приведены в табл. 1³.

¹ Авторами были проделаны расчеты профилей скоростей и температур (см. ниже) для $\omega\tau$, равных 0; 0.5, 1; 1.5, 2, и m^*x , равных 0.1 и 0.5; здесь результаты расчетов приводятся неполностью (цифры под фигурами указывают, какому из решений (2.1)—(2.6) соответствует данный график).

² В силу выбора системы координат скорость v в данной работе и w в [3] равны по величине и обратны по знаку.

³ Приведенные здесь значения $f_2''(0)$ отличаются от соответствующих значений, приведенных в [4] и перенесенных из [4] в [3]. Кроме того, пользуемся случаем указать, что значение $\Phi'(0)$ для случая (2.2) дано в [3] неверно.



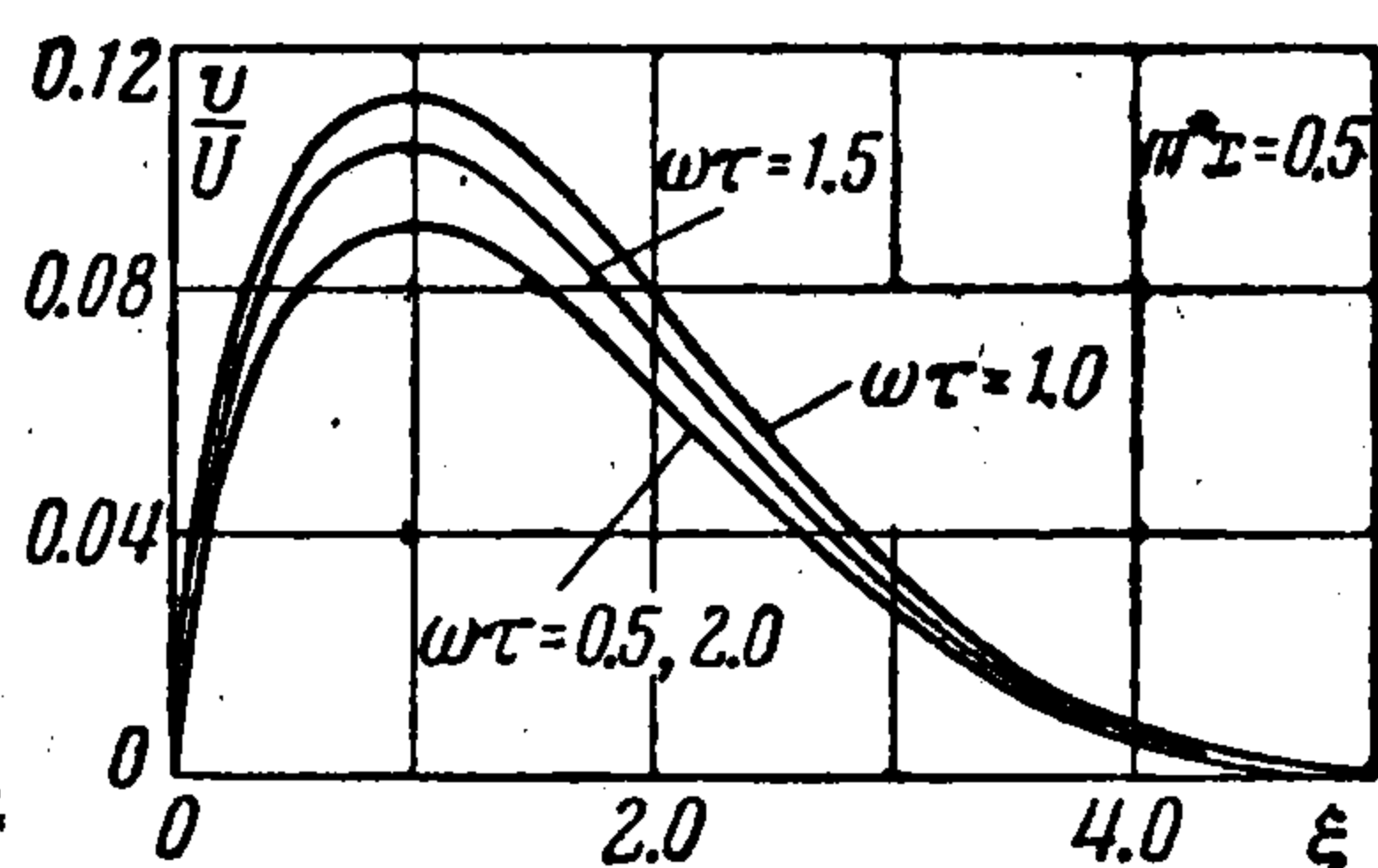
Фиг. 2 (2.6)

Таблица 1

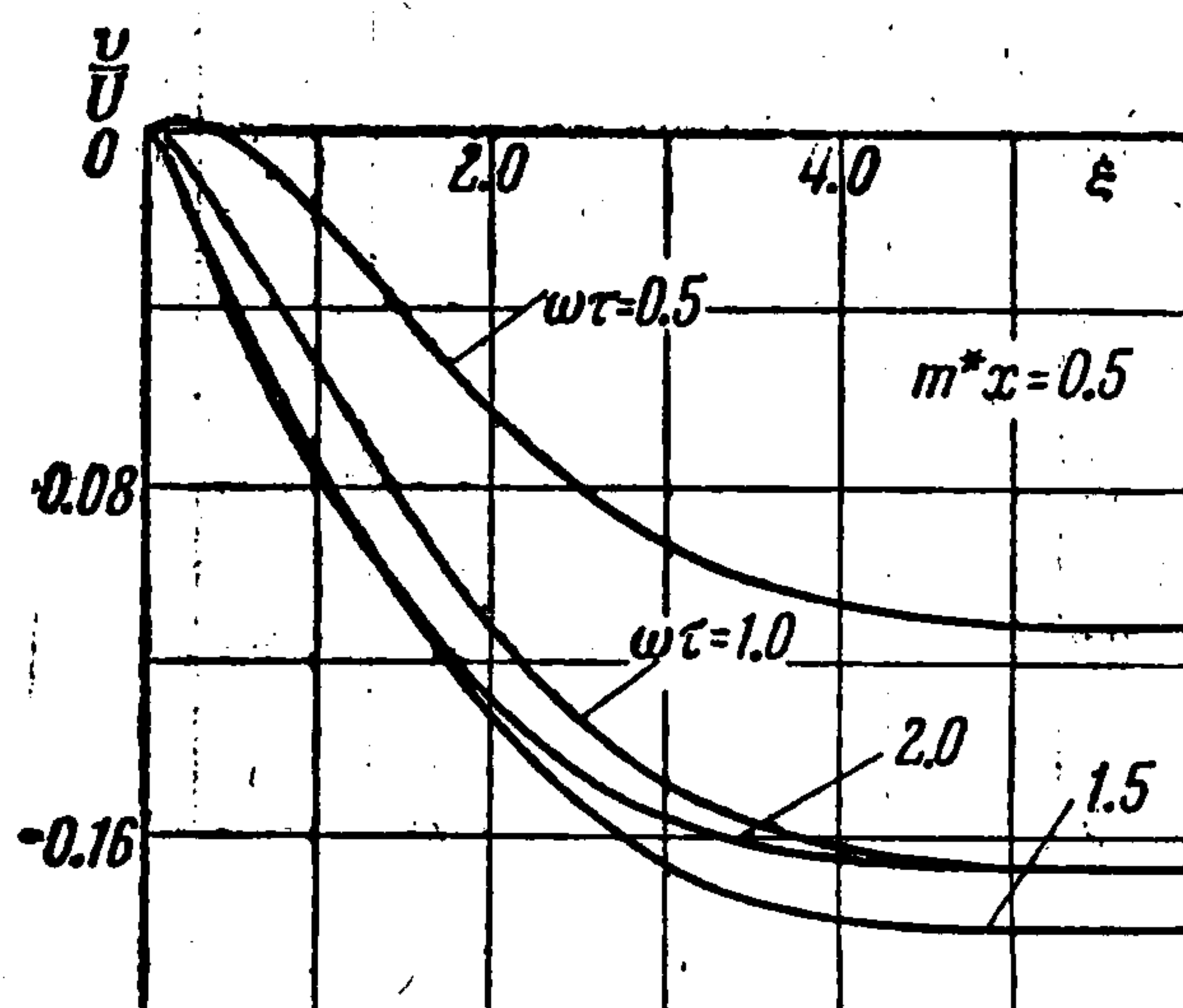
Значения $f_2''(0)$				Значения $\Phi'(0)$			
$\omega\tau$	(2.1) — (2.4)	(2.5)	(2.6)	$\omega\tau$	(2.1), (2.3), (2.5)	(2.4)	(2.2), (2.6)
0	1.139	-0.908	-0.908	0.5	0.871	0.083	-0.547
0.5	1.139	-1.419	-0.908	1	0.871	-0.074	-0.547
1	1.139	-2.955	-0.908	1.5	0.871	-0.213	-0.547
1.5	1.139	-5.513	-0.908	2	0.871	-0.311	-0.547
2	1.139	-9.096	-0.908				

§ 3. Уравнение энергии для пограничного слоя в электропроводном газе с анизотропными свойствами переноса. Пренебрегая спиральным пробегом ионов ($\omega_2\tau_2 \ll 1$), уравнение энергии для полностью ионизованного газа можно записать в виде [1]

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{dT}{dt} = \frac{dp}{dt} + \mathbf{j} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right) + \eta \left[2 \sum_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2 - (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 \right] + \\ + \eta \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{1}{3} \eta (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + \\ + \operatorname{div} (\lambda \kappa \nabla T) + \frac{\partial}{\partial z} \lambda (1 - \kappa) \frac{\partial T}{\partial z} + \operatorname{div} \lambda' \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \lambda (\iota - \iota') j_z - \\ - \left(\frac{\partial}{\partial x} \lambda \omega \tau \kappa' \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \lambda \omega \tau \kappa' \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \\ - \left(\frac{\partial}{\partial x} \lambda \omega \tau \iota'' j_y - \frac{\partial}{\partial y} \lambda \omega \tau \iota'' j_x \right) \quad (3.1) \end{aligned}$$



Фиг. 4 (2.1), (2.3), (2.5)



Фиг. 5(2.4)

Здесь

$$\kappa = (1.47\omega^2\tau^2 + 3.77)\Delta, \quad \kappa' = (0.791\omega^2\tau^2 + 6.86)\Delta$$

$$\iota = 2.03, \frac{TH_0}{\omega\tau\rho c}, \quad \iota' = (1.58\omega^4\tau^4 + 26.6\omega^2\tau^2 + 7.66) \frac{TH_0\Delta}{\omega\tau\rho c}$$

$$\iota'' = (0.949\omega^2\tau^2 + 1.93) \frac{TH_0\Delta}{\omega\tau\rho c}, \quad \frac{1}{\Delta} = \omega^4\tau^4 + 14.79\omega^2\tau^2 + 3.77$$

Уравнение (3.1) записано в предположении, что магнитное поле направлено вдоль оси z .

Отметим, что в полностью ионизованном газе вязкость определяется ионами, а теплопроводность (в случае $\omega_2\tau_2 \ll 1$) электронами. В уравнении (3.1), кроме обычных членов, связанных с притоком тепла за счет теплопроводности, вязкой и джоулевой диссипаций и работой сил давления, содержатся члены, связанные с притоком тепла за счет диффузии электронов (эффект Томсона)

$$\left[\operatorname{div} \lambda' \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \lambda (\iota - \iota') j_z \right]$$

и за счет спирального пробега электронов (эффекты Эттингсхаузена и Ледюка — Риги [1]).

$$\frac{\partial}{\partial x} \lambda \omega \tau'' j_y - \frac{\partial}{\partial y} \lambda \omega \tau'' j_x + \frac{\partial}{\partial x} \lambda \omega \tau \kappa' \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \lambda \omega \tau \kappa' \frac{\partial T}{\partial x}$$

Для того чтобы из уравнения (3.1) получить уравнения пограничного слоя, надо проделать обычные оценки пограничного слоя [2, 5] и сохранить в уравнении только главные члены. При этом из (3.1) для пограничного слоя на пластине в постановке § 1 ($H = H_0 e_z$, $E_y = 0$, $\partial / \partial y = 0$, $H_0 = \text{const}$) получим следующее уравнение энергии:

$$\begin{aligned} \rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \lambda \frac{\partial T}{\partial z} + \eta \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] - \\ - \frac{2}{3} \eta (\text{div } v)^2 + j_x^\circ \left(E_x^\circ + \frac{H_0}{c} v \right) - \frac{H_0}{c} j_y^\circ u + \frac{\partial}{\partial z} \lambda j_z^1 + \\ + \frac{\partial}{\partial x} (\lambda' j_x^\circ) - \frac{\partial}{\partial x} (\omega \tau \lambda'' j_y^\circ) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь j_x° , j_y° , j_z° , E_x° , E_z° — компоненты плотности тока и электрического поля [2], вычисленные с точностью до членов порядка единицы (по δ), а j_z^1 — плотность тока вдоль оси z , вычисленная с точностью до членов порядка δ .

Для пограничного слоя [3] на диэлектрической пластине имеем $j_z^\circ = 0$. В дальнейшем, кроме (1.2), будут использоваться безразмерные величины:

$$\rho = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad T = \frac{c_p T}{U^2}, \quad P = \frac{\eta c_p}{\lambda}, \quad B = \frac{\sigma k H_0}{c e \rho_0 c_p} \quad (3.3)$$

Здесь ρ_0 — характерная плотность, e — величины заряда электрона, остальные обозначения общеизвестны.

Используя закон Ома в форме (1.3) и безразмерные величины (1.2), (3.3), приведем уравнение (3.2) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\rho_0} \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{PR} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{R} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] - \\ - \frac{2}{3} \eta (\text{div } v)^2 + mL \left[(E_x^\circ + v) \left(E_x^\circ + v + \omega \tau u + \frac{0.5 \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \frac{1}{mL} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \right. \\ \left. - u \left(\omega \tau E_x^\circ + \omega \tau v - u + \frac{0.5 \omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \frac{1}{mL} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] + 3.21 B \frac{\partial}{\partial z} (T j_z^1) + \\ + B \frac{\partial}{\partial x} \left\{ T \left[\frac{\alpha}{1 + \omega^2 \tau^2} \left(E_x^\circ + v + \omega \tau u + \frac{0.5 \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \frac{1}{mL} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\beta \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \left(\omega \tau E_x^\circ - u + \omega \tau v + \frac{0.5 \omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \frac{1}{mL} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь

$$\alpha = 1.58 \frac{1.58 \omega^4 \tau^4 + 26.6 \omega^2 \tau^2 + 7.66}{\omega^4 \tau^4 + 14.79 \omega^2 \tau^2 + 3.77}, \quad \beta = 1.58 \frac{0.95 \omega^2 \tau^2 + 1.93}{\omega^4 \tau^4 + 14.79 \omega^2 \tau^2 + 3.77}$$

При получении этого уравнения и в дальнейшем для упрощения предполагается, что теплоемкость, коэффициенты переноса и $\omega \tau$ постоянны.

Легко заметить, что в рассматриваемом случае ($j_x^\circ \sim j_y^\circ \sim 1$, $j_z \sim \delta$) члены, связанные с эффектами Томсона и Эттингсхаузена, имеют одинаковый порядок величины, а их отношение к членам, стоящим в левой части уравнения (3.4), определяется параметром B .

Если преобразовать величины, входящие в B , по формулам кинетики, то получим

$$B = \frac{\sigma k H_0}{c \rho_0 e c_p} = \frac{n_1 e^2 \tau_1}{m_1} \frac{k H_0}{c \rho_0} \frac{m_2}{5k} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\omega \tau}{5} \quad (3.5)$$

При этом c_p выражено по обычным формулам для смеси, состоящей из электронов и однократно заряженных ионов, в пренебрежении теплоемкостью, связанной с потенциальной энергией взаимодействия частиц

$$c_p = \frac{m_1}{m_2} c_{p1} + c_{p2} = \frac{m_1}{m_2} \frac{5}{2} \frac{k}{m_1} + \frac{5}{2} \frac{k}{m_2} = 5 \frac{k}{m_2}$$

Таким образом, параметр B для полностью ионизованного газа связан с $\omega \tau$ и не является независимым параметром задачи. При $\omega \tau \sim 1$ параметр $B \sim 1$, и, следовательно, члены, связанные с эффектами Томсона и Эттингсхаузена, сравнимы по величине с конвективными членами в уравнении (3.4).

В дальнейшем уравнение энергии для полностью ионизованного газа будет использоваться в форме (3.4).

Величина j_z^1 определяется по формуле

$$j_z^1 = (1 + \omega^2 \tau^2) m L \frac{\rho U^2}{H_0^2} \left(E_z^1 + \frac{0.5 \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \frac{1}{m L} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (3.6)$$

Для определения E_z^1 , используя уравнение неразрывности для плотности тока, обобщенный закон Ома в форме (1.3), а также оценки пограничного слоя в уравнениях Максвелла [2, 3], получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \left(E_z^1 + \frac{0.5 \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \frac{1}{m L} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \\ & = \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} \left(\omega \tau \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{0.5 \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \frac{1}{m L} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial E_x^\circ}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Следует заметить, что для полностью ионизованного газа число Прандтля является малой величиной. Действительно,

$$P = \frac{\eta c_p}{\lambda} = 5 \frac{k}{m_2} 0.96 n k T \tau_2 \frac{m_1}{1.58 \rho k \tau_1} \sim \frac{n k T}{\rho} \frac{m_1}{m_2} \frac{\tau_2}{\tau_1} \sim \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \ll 1 \quad (3.8)$$

Отметим, кроме того, что в полностью ионизованном газе существует следующая связь между числом Рейнольдса и другими параметрами, определяющими задачу

$$\begin{aligned} R = \frac{\rho U L}{\eta} & \sim \frac{1}{\omega \tau} \frac{\omega_2}{\Omega} \frac{\gamma U^2}{(\gamma - 1) c_p T} \frac{1}{P} \sim \frac{1}{\omega \tau} \frac{\omega_2}{\Omega} \frac{1}{P} \gamma M^2 \sim \frac{m^* L}{\omega^2 \tau^2} \frac{1}{P} \gamma M^2 \\ & \left(\gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad m^* L = \frac{\sigma H_0^2 L}{\rho c^2 U} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь M — число Маха, Ω — характерная частота задачи. Соотношение (3.9) показывает, что в полностью ионизованном газе

$$m^* L = \omega \tau \omega_2 / \Omega \sim 1 \quad \text{при} \quad \Omega / \omega_2 \sim \omega \tau \sim 1$$

(в этом случае закон Ома [6] имеет форму (1.3)).

Уравнения пограничного слоя справедливы в этом случае только при больших скоростях набегающего потока ($M^2 \gg 1$), так как кроме выполнения неравенства

$$(\delta^2) \sim \frac{1}{R} \ll 1$$

должно выполняться условие малости толщины δ° теплового пограничного слоя [5]

$$(\delta^\circ)^2 = \left(\frac{\delta^\circ}{L}\right)^2 \sim \frac{1}{RP} \ll 1$$

Если уменьшать $\omega\tau$ при постоянном H_0 и других параметрах, то, как следует из (3.9), число Рейнольдса возрастает, что связано с уменьшением вязкости, так как

$$\tau_2 \sim \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \tau_1, \quad R \sim (\gamma - 1) M^2 \frac{L}{U\tau_2} \quad (3.10)$$

При увеличении $\omega\tau$ число Рейнольдса уменьшается. Таким образом, для полностью ионизованного газа число Рейнольдса не будет независимым от параметров $\omega\tau$ и Ω/ω_2 , определяющих электромагнитное воздействие на поток. Эта связь устанавливается соотношением (3.9). При независимом задании M , $\omega\tau$, Ω/ω_2 (M , $\omega\tau$, m^*L) число Рейнольдса является определяемой величиной, и, следовательно, в таком случае надо всегда проверить возможность использования модели пограничного слоя.

Если газ частично ионизован, то, как следует из работы [7], коэффициенты при эффектах Томсона [и Эттингсхаузена в уравнении (3.2) становятся, грубо говоря, пропорциональными степени ионизации. Поэтому при рассмотрении пограничного слоя в слабо ионизованном газе соответствующими членами в уравнении энергии можно пренебречь, а обобщенный закон Ома будет иметь вид (1.3) без члена с градиентом давления электронного газа. Кроме того, в слабо ионизованном газе теплопроводность и вязкость определяются нейтральными частицами, и, следовательно, число Прандтля имеет порядок единицы.

Таким образом, в слабо ионизованном газе уравнение энергии для пограничного слоя в рассматриваемом случае ($j_z^\circ = 0$) можно записать в виде (ср. с (3.4)):

$$\frac{\rho}{\rho_0} \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{RP} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{R} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] - \quad (3.11)$$

$$- \frac{2}{3} \eta (\operatorname{div} v)^2 + mL [(E_x^\circ + v)(E_y^\circ + v + \omega\tau u) - u(\omega\tau E_x^\circ + \omega\tau v - u)]$$

Параметры P , R , mL , $\omega\tau$ для слабоионизованного газа являются независимыми, так как P и R определяются нейтральным газом и не зависят от mL и $\omega\tau$, связанных с заряженной компонентой. Уравнение (3.11) отличается от соответствующего уравнения в изотропной магнитной гидродинамике [4] только измененным членом, связанным с джоулевым теплом.

§ 4. Тепловой пограничный слой на пластине, обтекаемой потоком слабо ионизованного несжимаемого газа с анизотропной электропроводностью. Уравнение энергии для слабо ионизованной несжимаемой среды запишется в виде:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{RP} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{R} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] + mL [(E_x^\circ + v) \times \quad (4.1)$$

$$\times (E_x^\circ + v + \omega\tau u) - u(\omega\tau E_x^\circ + \omega\tau v - u)] \quad \left(T = \frac{c_v T}{U^2}, P = \frac{\eta c_v}{\lambda} \right)$$

Здесь все величины безразмерные; c_v — теплоемкость газа при постоянном объеме. Решение уравнения (4.1) аналогично § 1 будем искать в виде

$$T = T_0 + mL T_1 \quad (4.2)$$

Подставляя в (4.1) соотношения (1.4) и (4.2), получим для T_0 уравнение

$$u_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} + w_0 \frac{\partial T_0}{\partial z} = \frac{1}{R} \left[\frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (4.3)$$

Здесь и во всех конкретных расчетах рассматриваемого случая считается $P=1$. Решение уравнения (4.3) соответствует решению для распределения температур в несжимаемой жидкости в обычном пограничном слое ($H_0 = 0$). При граничных условиях

$$T_0 = T_w \quad \text{при } z = 0, \quad T_0 = T_\infty = T_w = \text{const} \quad \text{при } z = \infty$$

решение (4.3) имеет вид

$$T_0 = T_w + \theta(\xi) = T_w - \frac{1}{2} [1 - f_0'(\xi)] + \frac{1}{2} [1 - f_0'^2(\xi)] \quad (4.4)$$

$$\xi = z \sqrt{R/x}$$

Здесь $f_0(\xi)$ — функция Блазиуса. Для T_1 получим уравнение

$$u_0 \frac{\partial T_1}{\partial x} + w_0 \frac{\partial T_1}{\partial z} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} = -u_1 \frac{\partial T_0}{\partial x} - w_1 \frac{\partial T_0}{\partial z} + \frac{2}{R} \frac{\partial u_0}{\partial z} \frac{\partial u_1}{\partial z} + \\ + E_{x_0}^\circ (E_{x_0}^\circ + \omega \tau u_0) - u_0 (\omega \tau E_{x_0}^\circ - u_0) \quad (4.5)$$

Здесь u_0, w_0 определяются решением Блазиуса, T_0 определяется по формуле (4.4), $u_1, w_1, E_{x_0}^\circ$ определены решением динамического пограничного слоя и внешнего потока в § 2. Решение для T_1 будем искать в виде

$$T_1 = x \Psi(\xi) \quad (4.6)$$

Тогда уравнение (4.5) можно преобразовать к виду

$$f_0' \Psi - \frac{1}{2} f_0 \Psi' - \Psi'' = -\frac{3}{2} f_2 f_0'' \left(f_0' - \frac{1}{2} \right) + 2 f_0'' f_2'' + f_0'^2 + (E_{x_0}^\circ)^2 \quad (4.7)$$

Так как температура пластины считается заданной, то граничным условием для функции $\Psi(\xi)$ будет

$$\Psi(0) = 0 \quad \text{при } \xi = 0 \quad (4.8)$$

Во внешнем потоке (при $\xi = \infty$) текут электрические токи. Эти токи благодаря джоулевой диссипации нагревают жидкость, поэтому температура жидкости во внешнем потоке не будет постоянной, если учесть члены порядка mL . Чтобы определить функцию T_1 во внешнем потоке, надо решить уравнение

$$\frac{\partial T_1^*}{\partial x} = 1 + (E_{x_0}^\circ)^2 \quad (4.9)$$

которое легко получить из (4.1), положив $w = 0$ и $R = \infty$ и сохраняя члены только порядка mL . Решение (4.9) имеет вид ($T_1 = 0$ при $x = 0$)

$$T_1^* = (1 + E_{x_0}^{\circ 2}) x$$

Используя это решение, получим следующее граничное условие

$$\Psi(\infty) = 1 + (E_{x_0}^\circ)^2 \quad \text{при } \xi = \infty \quad (4.10)$$

Подставляя в (4.7) и (4.10) значения $E_{x_0}^* = E_{x_0}^\circ$ во внешнем потоке для случаев (2.1) — (2.6), получим в каждом случае уравнения для определения функции Ψ , которые решались численно.

На фиг. 6—7 представлено поведение функции

$$\Theta = T_0 + \frac{m^*x}{1 + \omega^2\tau^2} \Psi(\xi) \quad \left(\Theta = \frac{c_v(T - T_w)}{U^2} \right) \quad (4.11)$$

которая выражает безразмерную разность температур текущей точки и стенки. Графики построены для $m^*x = 0.5$ и при различных значениях $\omega\tau$.

Таблица 2

Значения $\Psi'(0)$

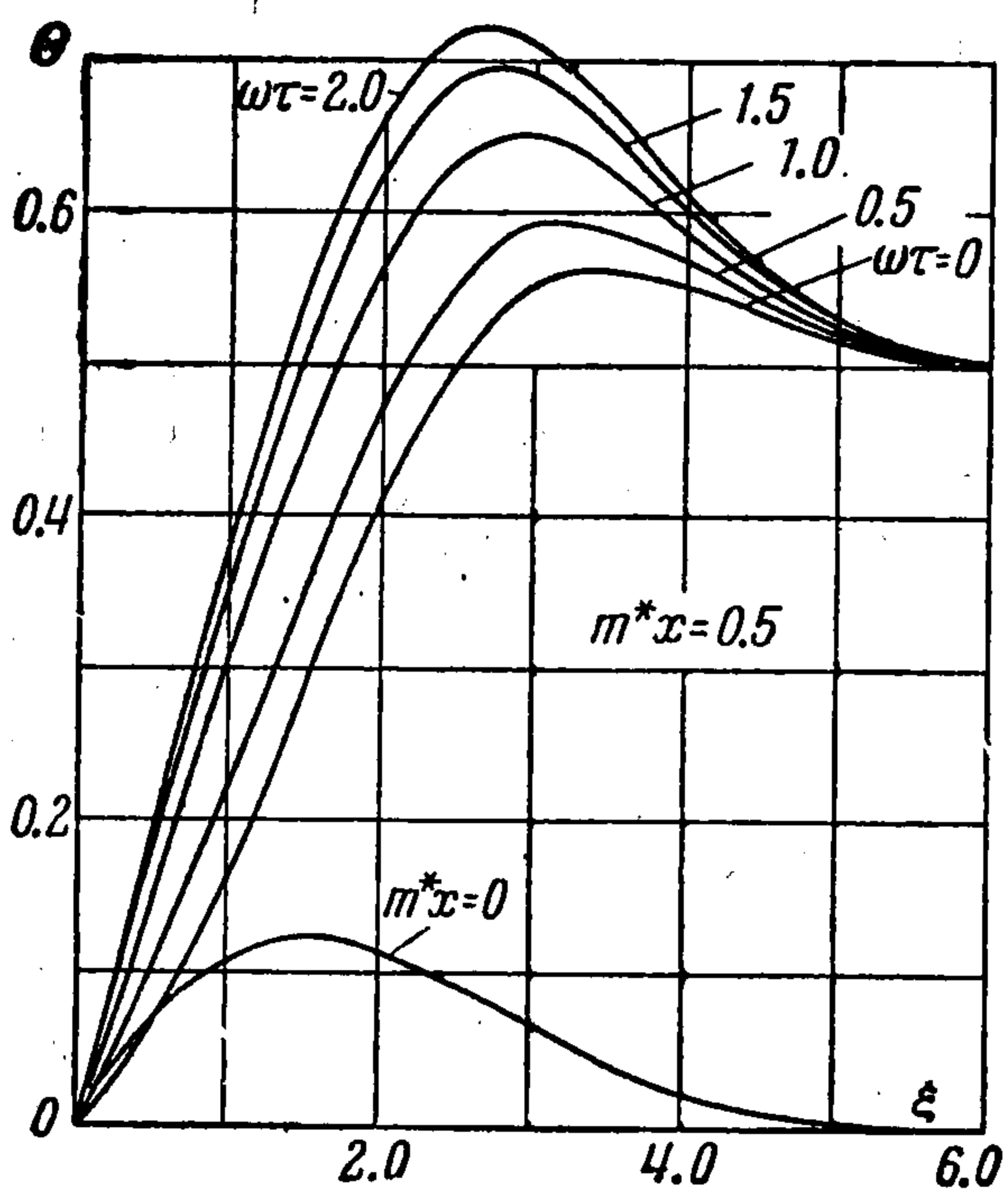
$\omega\tau$	(2.1), (2.5)	(2.2), (2.6)
0	-0.176	-0.176
0.5	-0.040	-0.176
1	0.389	-0.176
1.5	1.355	-0.176
2	2.104	-0.176

Коэффициент теплопередачи с точностью до членов порядка mL для слабо ионизованной среды будет иметь вид:

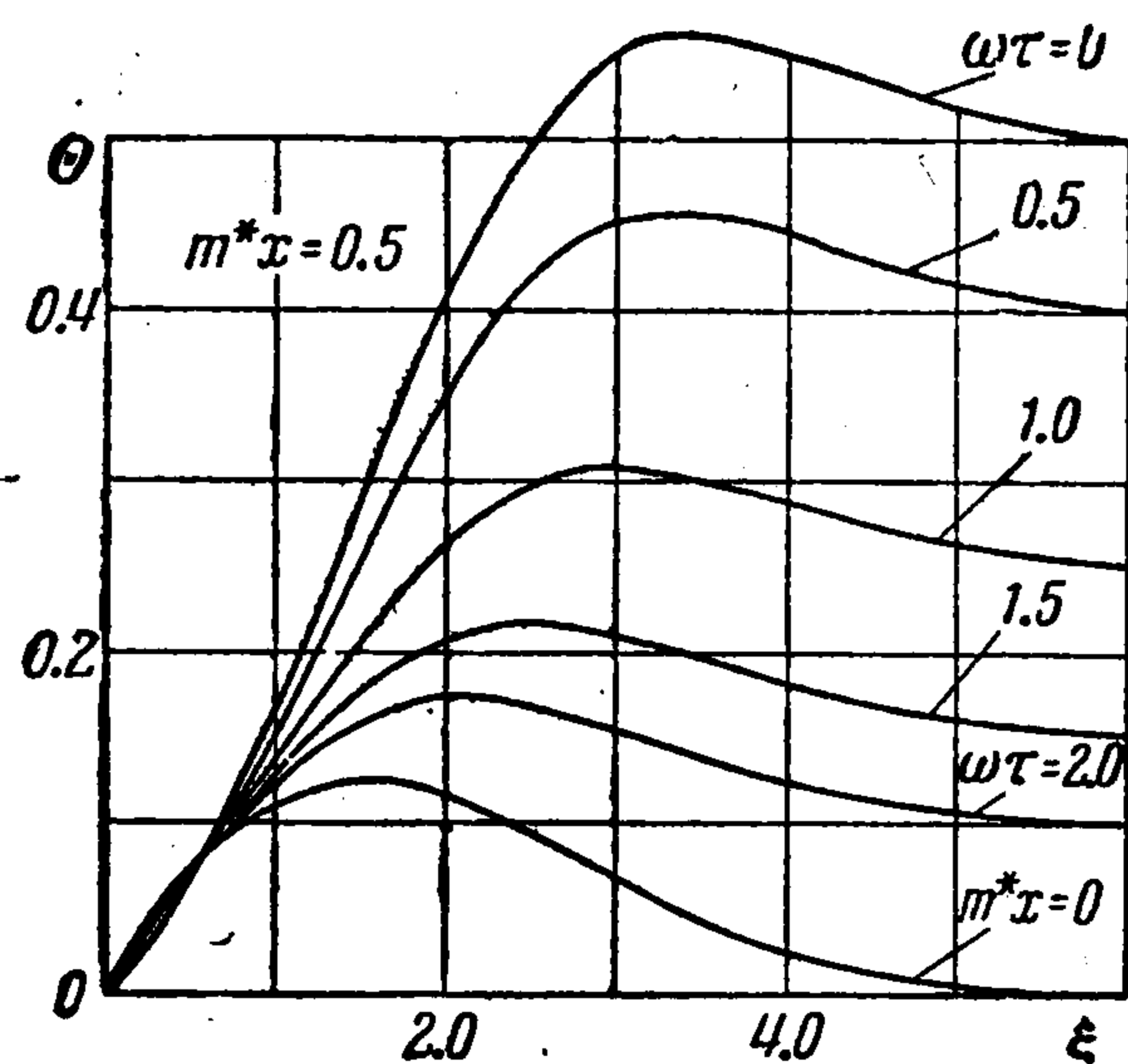
$$h = \frac{c_v q}{U^2} = \frac{c_v \lambda}{U^2} \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=0} = \frac{\rho U c_v}{\sqrt{R_x}} \left[0.166 + \frac{m^*x}{1 + \omega^2\tau^2} \Psi'(0) \right] \quad (4.12)$$

Значения $\Psi'(0)$ для различных случаев можно найти в табл. 2.

Фиг. 6 и 7 показывают, что подогрев в пограничном слое в случаях (2.2) и (2.6) уменьшается с ростом $\omega\tau$, что связано с уменьшением эффективной проводимости. В случаях (2.1), (2.5)



Фиг. 6 (2.1), (2.5)



Фиг. 7 (2.2), (2.6)

подогрев в пограничном слое увеличивается с ростом $\omega\tau$. При $\omega\tau \rightarrow 0$ профили температур во всех случаях совпадают.

§ 5. Тепловой пограничный слой на пластине, обтекаемой потоком полностью ионизованного несжимаемого газа с анизотропными свойствами переноса. Используя (3.4) и (3.6), имеем уравнение энергии

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{PR} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{R} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] + mL \left[(E_x^\circ + v) \left(E_x^\circ + v + \omega\tau u + \frac{0.5 \omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \frac{1}{mL} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - u \left(\omega\tau E_x^\circ + \omega\tau v - u + \frac{0.5 \omega^2\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2} \frac{1}{mL} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] + 3.21 B \frac{\partial}{\partial z} \left[T \left(E_z^1 + \frac{0.5 \omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \frac{1}{mL} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right] + B \frac{\partial}{\partial x} \left\{ T \left[\frac{\alpha}{1 + \omega^2\tau^2} \left(E_x^\circ + v + \omega\tau u + \frac{0.5 \omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \frac{1}{mL} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{\omega\tau\beta}{1 + \omega^2\tau^2} \left(\omega\tau E_x^\circ - u + \omega\tau v + \frac{0.5 \omega^2\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2} \frac{1}{mL} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] \right\}$$

$$T = c_v T / U^2, \quad P = \eta c_v / \lambda, \quad B = \sigma k H_0 / \text{серс}_v = \omega\tau / 3$$

Решение уравнения (5.1) будем искать в виде (1.4), (4.2). Тогда в нулевом приближении по mL получим

$$u_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} + w_0 \frac{\partial T_0}{\partial z} - \frac{1}{RP} \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} \right)^2 = \frac{\omega\tau}{3(1+\omega^2\tau^2)} \left\{ 3.21 \frac{\partial T_0 \omega_0}{\partial z} \bar{\omega}\tau + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x} T_0 \left[\alpha \left(E_{x_0}^{\circ} + \omega\tau u_0 + \frac{0.5 \omega\tau}{1+\omega^2\tau^2} \frac{\partial p_1^*}{\partial x} \right) - \beta\omega\tau \left(\omega\tau E_{x_0}^{\circ} - u_0 + \frac{0.5 \omega^2\tau^2}{1+\omega^2\tau^2} \frac{\partial p_1^*}{\partial x} \right) \right] \right\} \quad (5.2)$$

При получении (5.2) и далее, для задач настоящего параграфа используется решение уравнения (3.7) с учетом малости величины mL .

Максимальное значение параметра $\omega\tau / 3(1+\omega^2\tau^2)$, стоящего перед выражением в правой части (5.2), достигается при $\omega\tau = 1$ и равно $1/6$. При $\omega\tau \rightarrow 0$ или $\omega\tau \rightarrow \infty$ этот параметр стремится к нулю. В связи с этим, для упрощения задачи будем искать решение уравнения (5.2) в виде

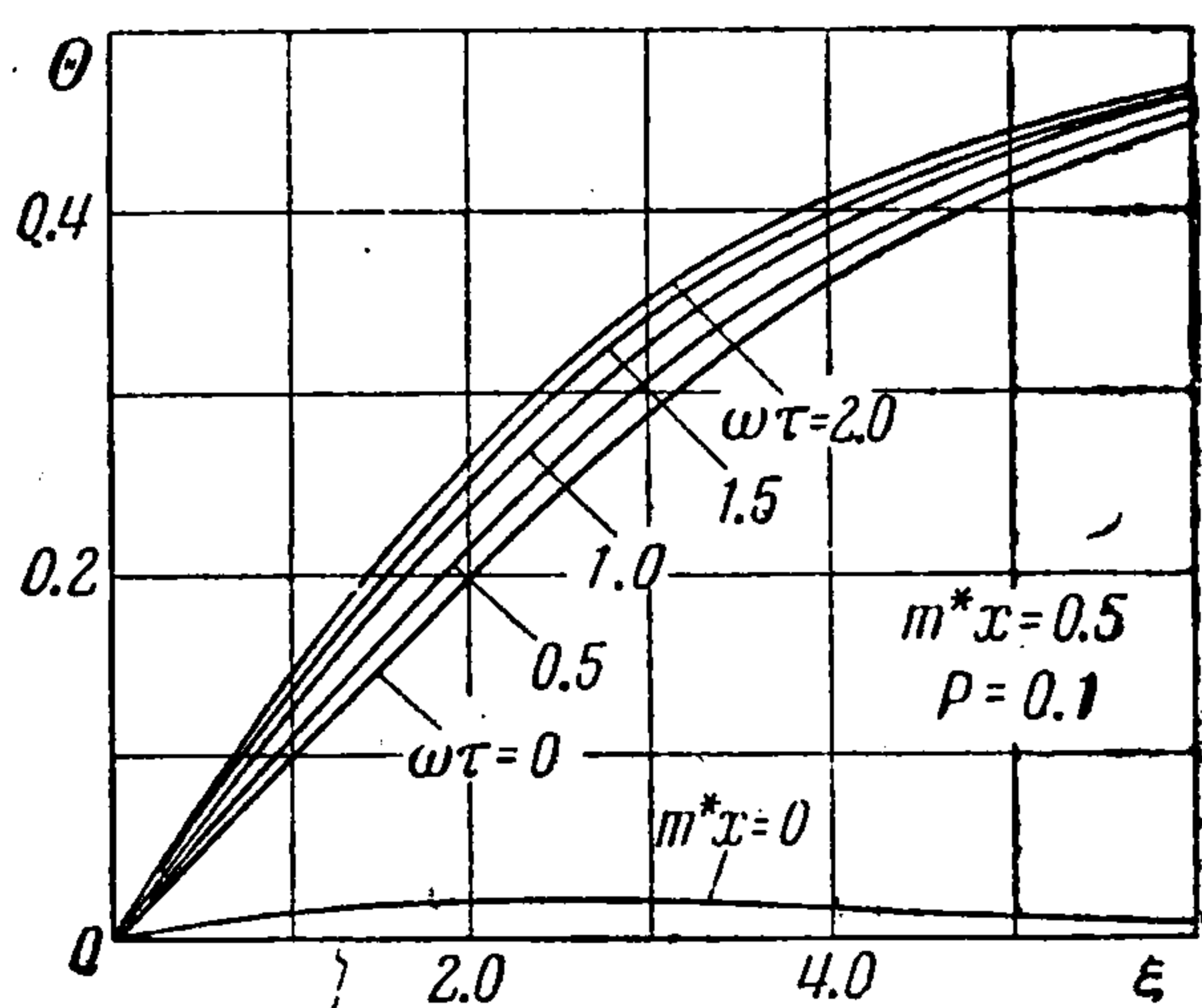
$$T_0 = T_w + \theta(\xi) + \frac{\omega\tau}{3(1+\omega^2\tau^2)} F(\xi), \quad \xi = z \sqrt{\frac{R}{x}} \quad (5.3)$$

Считая параметр $\omega\tau / 3(1+\omega^2\tau^2)$ малым, из (5.2) для функций $\theta(\xi)$ и $F(\xi)$ получим уравнения

$$\theta'' + \frac{P}{2} f_0 \theta' + P f_0'' \theta = 0 \quad (5.4)$$

$$\frac{1}{P} F'' + \frac{1}{2} f_0 F' = 3.21 \frac{\omega\tau}{2} [(f_0 - \xi f_0') \theta' - \xi f_0'' (T_w + \theta)] + \\ + \frac{1}{2} \left[\alpha \left(E_{x_0}^{\circ} + \frac{0.5 \omega\tau}{1+\omega^2\tau^2} \frac{\partial p_1^*}{\partial x} \right) - \omega\tau\beta \left(\omega\tau E_{x_0}^{\circ} + \frac{0.5 \omega^2\tau^2}{1+\omega^2\tau^2} \frac{\partial p_1^*}{\partial x} \right) \right] \xi \theta' + \\ + \omega\tau(\alpha + \beta) \frac{\xi}{2} [f_0' \theta' + (T_w + \theta) f_0''] \quad (5.5)$$

Естественно, что можно было бы искать решение для T_0 прямо из уравнения (5.2), не используя малости $\omega\tau / 3(1+\omega^2\tau^2)$, тем более, что уравнение (5.2) имеет автомодельное



Фиг. 8 (2.3)

решение по переменной Блазиуса. Но предлагаемый здесь путь отыскания решения в форме (5.3) представляется более удобным.

Легко проверить, что уравнение (5.2), записанное для внешнего потока, имеет решение $T_0 = \text{const}$. Поэтому, если считать, что $T_w = T_\infty$, то решение уравнений (5.4), (5.5) надо искать при граничных условиях:

$$\theta(0) = 0, \quad \theta(\infty) = 0 \quad (5.6)$$

$$F(0) = 0, \quad F(\infty) = 0 \quad (5.7)$$

Из уравнения (5.1), пренебрегая всюду произведениями малых величин mL и $\omega\tau / 3(1+\omega^2\tau^2)$, для T_1 получим уравнение

$$u_{01} \frac{\partial T_1}{\partial x} + w_0 \frac{\partial T_1}{\partial z} - \frac{1}{RP} \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} = -u_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} - w_1 \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{2}{R} \frac{\partial u_0}{\partial z} \frac{\partial u_1}{\partial z} + \\ + E_{x_0}^{\circ} \left(E_{x_0}^{\circ} + \omega\tau u_0 + \frac{0.5 \omega\tau}{1+\omega^2\tau^2} \frac{\partial p_1^*}{\partial x} \right) - u_0 \left(\omega\tau E_{x_0}^{\circ} - u_0 + \frac{0.5 \omega^2\tau^2}{1+\omega^2\tau^2} \frac{\partial p_1^*}{\partial x} \right) \quad (5.8)$$

Будем искать решение уравнения (5.8) в виде

$$T_1 = x\Psi_1(\xi) \quad (5.9)$$

При этом для определения $\Psi_1(\xi)$ получим уравнение

$$f_0'\Psi_1 - \frac{1}{2}f_0\Psi_1' - \frac{1}{P}\Psi_1'' = \frac{3}{2}f_2\theta' + 2f_0''f_2'' + f_0'^2 + (E_{x_0^\circ})^2 + \\ + E_{x_0^\circ} \frac{0.5\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2} \frac{\partial p_1^*}{\partial x} - f_0' \frac{0.5\omega^2\tau^2}{1+\omega^2\tau^2} \frac{\partial p_1^*}{\partial x} \quad (5.10)$$

Чтобы поставить граничные условия для уравнения (5.10), надо решить уравнение, аналогичное (5.8), для внешнего потока

$$\frac{\partial T_1^*}{\partial x} = 1 - \frac{0.5\omega^2\tau^2}{1+\omega^2\tau^2} \frac{\partial p_1^*}{\partial x} + (E_{x_0^\circ})^2 + \frac{0.5\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2} \frac{\partial p_1^*}{\partial x} E_{x_0^\circ}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$T_1^* = \left[1 - \frac{0.5\omega^2\tau^2}{1+\omega^2\tau^2} \frac{\partial p_1^*}{\partial x} + (E_{x_0^\circ})^2 + \frac{0.5\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2} \frac{\partial p_1^*}{\partial x} E_{x_0^\circ} \right] x \quad (5.11)$$

Отсюда для уравнения (5.10) следуют граничные условия

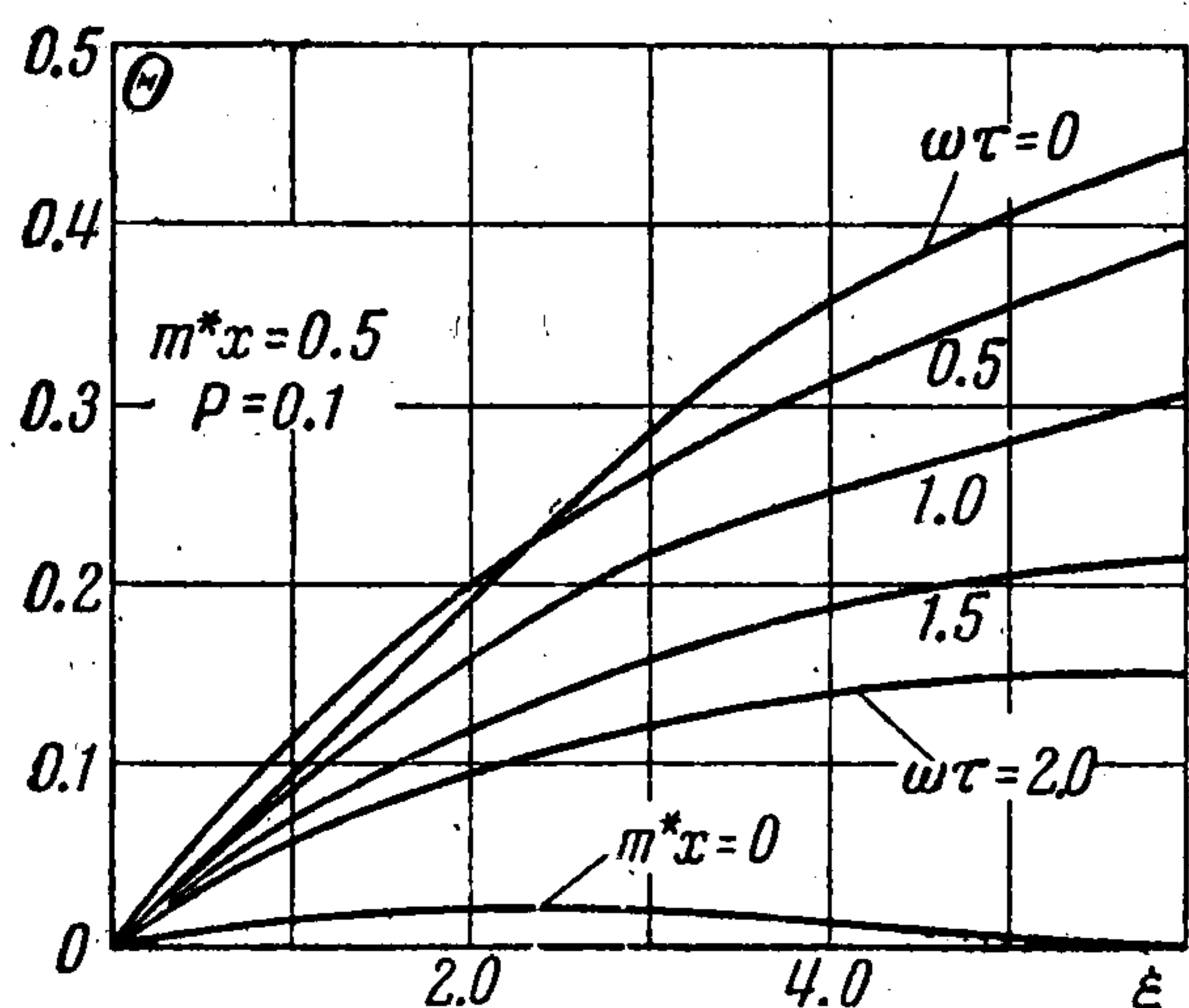
$$\Psi_1(0) = 0, \quad \Psi_1(\infty) = \left[1 - \frac{0.5\omega^2\tau^2}{1+\omega^2\tau^2} \frac{\partial p_1^*}{\partial x} + (E_{x_0^\circ})^2 + \frac{0.5\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2} \frac{\partial p_1^*}{\partial x} E_{x_0^\circ} \right]$$

Конкретные расчеты задач (5.4), (5.6); (5.5); (5.7); (5.10), (5.11) были приведены для различных значений $\omega\tau$, m^*x и для значений числа Прандтля $P=0.1$ и $P=0.01$. При интегрировании считалось, что $T_w \equiv c_v T_w/U^2 = 0.1$.

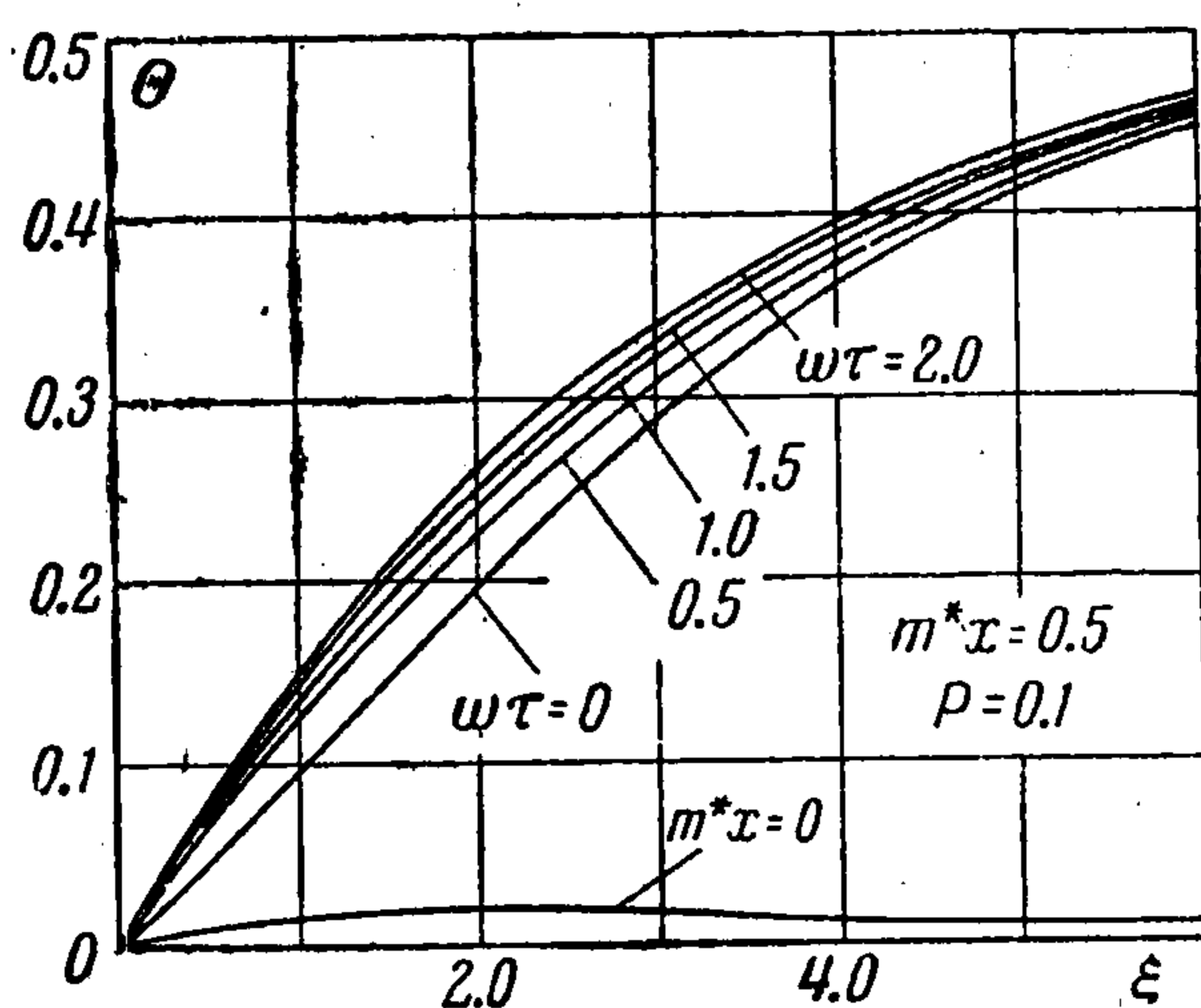
На фиг. 8—11 для иллюстрации представлено поведение функции

$$\Theta = \theta(\xi) + \frac{\omega\tau}{3(1+\omega^2\tau^2)} F(\xi) + \frac{m^*x}{1+\omega^2\tau^2} \Psi_1(\xi) \quad (5.12)$$

соответствующей безразмерной разности температур текущей точки и стенки для $m^*x=0.5$ и $P=0.1$ для различных случаев (2.3)—(2.6).



Фиг. 9 (2.4)



Фиг. 10 (2.5)

Фиг. 8—11 показывают, что определяющим фактором в распределении температур является подогрев жидкости во внешнем потоке. При этом из физических соображений ясно, что чем больше теплопроводность, (меньше число Прандтля), тем ближе профиль температур должен приближаться к линейному. Расчеты, приведенные для $P=0.01$, подтверждают этот вывод. В тех случаях, когда подогрев жидкости во внешнем потоке не зависит от $\omega\tau$, кривые, соответствующие распределению температур для различных $\omega\tau$, практически сливаются в одну кривую,

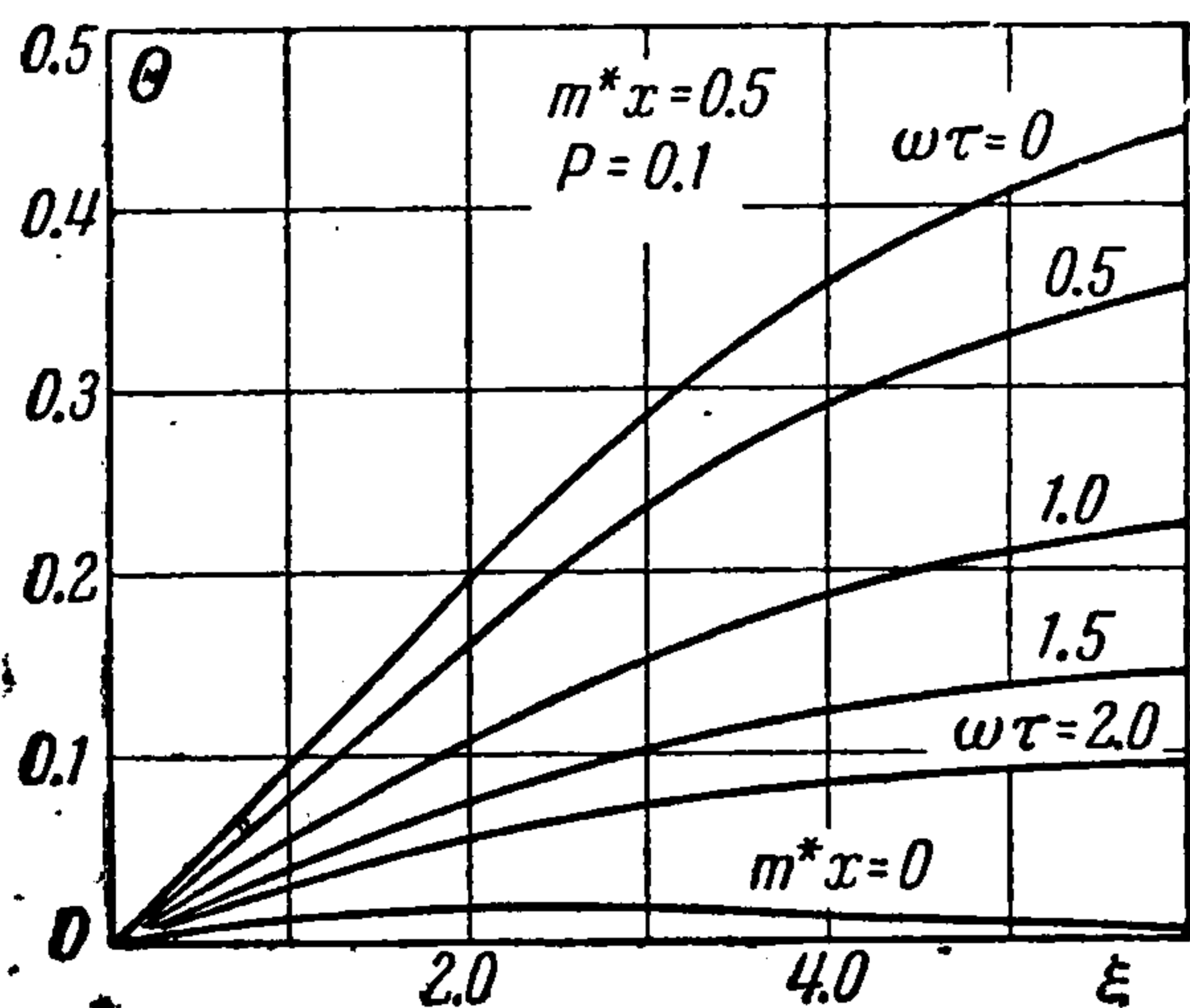
близкую к прямой. В тех же случаях, когда подогрев во внешнем потоке зависит от $\omega\tau$, распределение температур различно при разных $\omega\tau$, но для каждого $\omega\tau$ оно близко к линейному (см., например, фиг. 12).

Коэффициент теплоотдачи с точностью до членов порядка mL для полностью ионизованной среды будет иметь вид: (5.13)

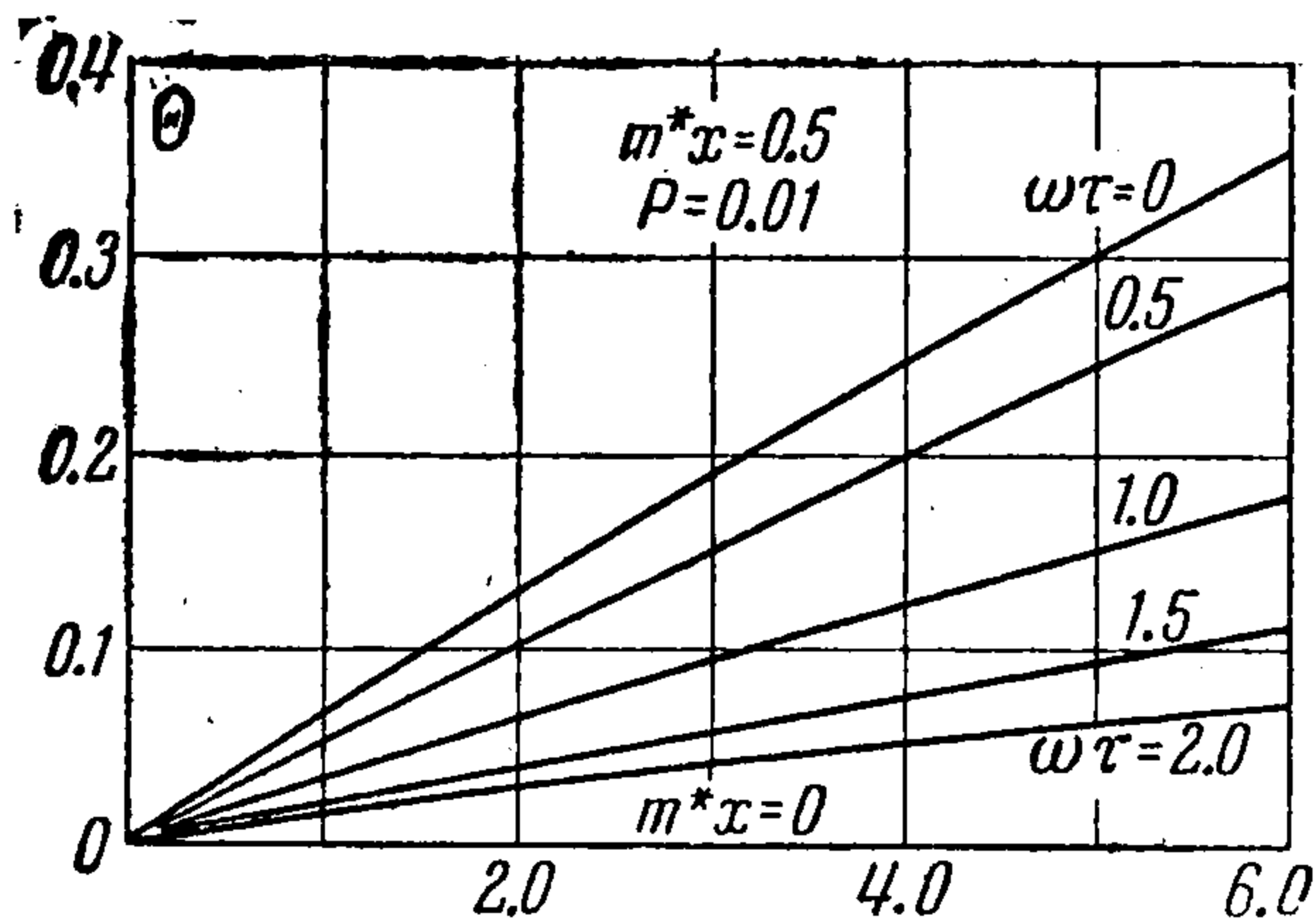
$$h = \frac{c_v q}{U^2} = \frac{c_v \lambda}{U^2} \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\rho U c_v}{\sqrt{R_x}} \left[\theta'(0) + \frac{m^* x}{1 + \omega^2 \tau^2} \Psi_1'(0) + \frac{\omega \tau}{3(1 + \omega^2 \tau^2)} F'(0) \right]$$

Значения $\Psi_1'(0)$ и $F'(0)$ для различных случаев приведены в табл. 3 ($\theta'(0) = 0.021$ для $P = 0.1$ и $\theta'(0) = 0.002$ для $P = 0.01$).

Таблица 3



Фиг. 11 (2.6)



Фиг. 12 (2.6)

Значения $F'(0)$

$\omega\tau$	P	(2.3), (2.5)	(2.4)	(2.6)
0.5	0.1	-0.0007	0.0001	0.0009
	0.01	0	0	0
1.0	0.1	0.0006	0.0026	0.0036
	0.01	0	0	0
1.5	0.1	0.0022	0.0055	0.0066
	0.01	0.0002	0.0002	0.0002
2.0	0.1	0.0042	0.0087	0.0096
	0.01	0.0004	0.0004	0.0004

Значения $\Psi_1'(0)$

$\omega\tau$	P	(2.3)	(2.4)	(2.5)	(2.6)
0	0.1	0.120	0.120	0.120	0.120
	0.01	0.130	0.130	0.130	0.130
0.5	0.1	0.132	0.276	0.195	0.120
	0.01	0.166	0.147	0.154	0.130
1	0.1	0.541	0.358	0.391	0.120
	0.01	0.271	0.180	0.256	0.130
1.5	0.1	0.922	0.430	0.719	0.120
	0.01	0.447	0.209	0.427	0.130
2	0.1	1.457	0.480	1.178	0.120
	0.01	0.692	0.229	0.665	0.130

Авторы считают своим долгом поблагодарить М. Н. Когана и А. Г. Куликовского за обсуждение результатов и полезные критические замечания, а также сотрудников вычислительного центра МГУ Г. С. Рослякова и Е. Н. Старову за помощь при расчетах.

Поступила 21 I 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Баранов В. Б. К выводу уравнений анизотропной магнитной гидродинамики. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 6.
2. Любимов Г. А. К постановке задачи о магнитогазодинамическом пограничном слое. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 5.
3. Любимов Г. А. Магнитогазодинамический пограничный слой в среде с анизотропной проводимостью при малых магнитных числах Рейнольдса. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 6.
4. Rossow V. I. On flow of electrically conducting fluids over a flat plate in the presence of a transverse magnetic field. NASA Report, 1958, 1358.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. ИИЛ, 1956.
6. Баранов В. Б., Любимов Г. А. О форме обобщенного закона Ома в полностью ионизованном газе. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 3.
7. Жданов В. М. Явления переноса в частично ионизованном газе. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 2.