Прикладная математика и механика. Том XXVII, 1963

ИНВАРИАНТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ОДНОАТОМНОГО ГАЗА И НОВЫЕ КЛАССЫ ИХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ

А. А. Никольский

(Москва)

Рассматривается преобразование уравнений движения идеального одноатомного газа к координатам однородно расширяющегося пространства. При соответствующем преобразовании времени, полей скоростей, давлений, плотности, температуры в новых переменных получаются те же уравнения движения, что и в неподвижных координатах. Это позволяет распространить всю обычную газовую динамику на динамику расширяющегося газа и сопоставить всем имеющимся точным решениям уравнений газовой динамики новые точные решения. При рассмотренных новых движениях газа за бесконечный интервал времени t (до $t=\infty$) реализуются процессы, подобные тем, которые реализуются для исходных обычных движений газа на конечном интервале времени.

В разделе 1 исследованы в общем виде движения газа с поверхностями разрыва (сильного разрыва, тангенциального разрыва). Доказаны основные теоремы для таких течений.

В разделе 2 рассмотрены примеры новых точных решений:

а) однородное расширение и однородное сжатие газа;

б) движение типа источника или стока;

в) «простые волны» в однородно расширяющемся и однородно сжимающемся газе.

В разделах 3 и 4 исследована задача о точечном взрыве в однородно расширяющемся и однородно сжимающемся газе.

1. Постановка задачи и основные теоремы. Для одноатомного газа показатель γ адиабаты равен $^5/_3$, и поэтому общие уравнения движения такого газа при отсутствии внешних сил, трения и теплопередачи имеют вид [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\qquad (uvw, xyz)\tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \ln\rho}{\partial t}+u\frac{\partial \ln\rho}{\partial x}+v\frac{\partial \ln\rho}{\partial y}+w\frac{\partial \ln\rho}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\tag{1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{p}{\rho^{5/3}}+u\frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\rho^{5/3}}+v\frac{\partial}{\partial y}\frac{p}{\rho^{5/3}}+w\frac{\partial}{\partial z}\frac{p}{\rho^{5/3}}=0\tag{1.3}$$

Здесь t — время, p — давление, ρ — плотность, x, y, z — координаты эвклидова пространства; u, v, w — компоненты вектора скорости относительно осей x, y, z; символы (xyz), (uvw) означают, что остальные формулы получаются круговой перестановкой.

Введем новые независимые переменные

$$\tau=a-\frac{b^2}{t-c},\qquad \xi=\frac{b}{t-c}x,\qquad \eta=\frac{b}{t-c}y,\qquad \zeta=\frac{b}{t-c}z\tag{1.4}$$

и новые функции

$$u' = \frac{t-c}{b} u - \frac{x}{b}, \quad v' = \frac{t-c}{b} v - \frac{y}{b}, \quad w' = \frac{t-c}{b} w - \frac{z}{b} \tag{1.5}$$

$$\rho' = \left(\frac{t-c}{b}\right)^3 \rho, \qquad p' = \left(\frac{t-c}{b}\right)^5 p \tag{1.6}$$

Здесь a, b, c — произвольные постоянные с размерностью времени. Верны также равенства

$$u = \frac{a-\tau}{b} u' + \frac{\xi}{b}, \qquad v = \frac{a-\tau}{b} v' + \frac{\eta}{b}, \qquad w = \frac{a-\tau}{b} w' + \frac{\zeta}{b} \tag{1.7}$$

$$\rho = \left(\frac{a-\tau}{b}\right)^3 \rho', \qquad p = \left(\frac{a-\tau}{b}\right)^5 p', \qquad \frac{b}{t-c} = \frac{a-\tau}{b} \tag{1.8}$$

Для операций дифференцирования имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{b^2}{(t-c)^2}\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{b}{(t-c)^2}\left(x\frac{\partial}{\partial \xi} + y\frac{\partial}{\partial \eta} + z\frac{\partial}{\partial \zeta}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{a-\tau}{b}\frac{\partial}{\partial \xi} \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{a-\tau}{b}\frac{\partial}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{a-\tau}{b}\frac{\partial}{\partial \zeta}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} = \frac{b^2}{(t-c)^2}\frac{\partial}{\partial \tau} -$$

$$- \frac{b}{(t-c)^2}\left(x\frac{\partial}{\partial \xi} + y\frac{\partial}{\partial \eta} + z\frac{\partial}{\partial \zeta}\right) + \frac{b}{t-c}\left(u\frac{\partial}{\partial \xi} + v\frac{\partial}{\partial \eta} + w\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)$$

Последнее соотношение преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{a-\tau}{b}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + u'\frac{\partial}{\partial \xi} + v'\frac{\partial}{\partial \eta} + w'\frac{\partial}{\partial \zeta}\right) \tag{1.10}$$

Если подставить выражения (1.7), (1.8) в уравнения (1.1) — (1.3), то, пользуясь правилами дифференцирования (1.9) и (1.10), получим уравнения, которые совпадают с уравнениями (1.1) — (1.3), если в последних заменить t, x, y, z, p, ρ соответственно на $\tau, \xi, \eta, \zeta, p', \rho'$; таким образом, система уравнений (1.1) — (1.3) инвариантна относительно преобразований (1.4) — (1.6) переменных. В связи с этим справедлива теорема.

Теорема 1.1 Если совокупность функций

$$u = u'(t, x, y, z), \qquad v = v'(t, x, y, z), \qquad w = w'(t, x, y, z)$$

$$\rho = \rho'(t, x, y, z), \qquad p = p'(t, x, y, z) \tag{1.11}$$

удовлетворяет системе уравнений (1.1) — (1.3), то той же системе уравнений удовлетворяет совокупность функций

$$u = u_0(t, x, y, z) = \frac{a-\tau}{b} u'(\tau, \xi, \eta, \zeta) + \frac{\xi}{b} \tag{1.12}$$

$$v = v_0(t,x,y,z) = \frac{a-\tau}{b} v'(\tau,\xi,\eta,\zeta) + \frac{\eta}{b}$$

$$w = w_0(t, x, y, z) = \frac{a-\tau}{b} w'(\tau, \xi, \eta, \zeta) + \frac{\zeta}{b}$$

$$\rho = \rho_0(t, x, y, z) = \left(\frac{a-\tau}{b}\right)^3 \rho'(\tau, \xi, \eta, \zeta)$$

$$p = p_0(t; x, y, z) = \left(\frac{a-\tau}{b}\right)^5 p'(\tau, \xi, \eta, \zeta) \tag{1.13}$$

$$\tau = a - \frac{b^2}{t-c}, \qquad \xi = \frac{b}{t-c} x, \qquad \eta = \frac{b}{t-c} y, \qquad \zeta = \frac{b}{t-c} z$$

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = \frac{b}{t-c}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1.14}$$

Здесь, как и выше, a, b, c — произвольные постоянные. При этом из условия положительности величин ρ_0, p_0 следует, что новое решение можно рассматривать только в области, где $(a-\tau)/b>0$, т. е. $b/(t-c)>0$.

В справедливости теоремы (1.1) можно убедиться и непосредственной подстановкой выражений (1.12) — (1.14) в систему (1.1) — (1.3) при использовании того условия, что функции (1.11) удовлетворяют этой системе.

Обозначим через E' движение, определяемое функциями (1.11):

$$\Omega' = \Omega'(t, x, y, z) = \{u'(t, x, y, z),\ v'(t, x, y, z),\ w'(t, x, y, z)\}$$
$$\rho'(t, x, y, z), \qquad p'(t, x, y, z) \tag{1.15}$$

а через E_0 движение, характеризуемое функциями (1.12), так что

$$\Omega_0 = \Omega_0(t, x, y, z) = \{u_0(t, x, y, z),\ v_0(t, x, y, z)\ w_0(t, x, y, z)\}$$
$$\rho_0(t, x, y, z), \qquad p_0(t, x, y, z) \tag{1.16}$$

Здесь Ω' и Ω_0 — векторы скорости движений. Будем теперь рассматривать движение газа с поверхностями Σ сильного разрыва

$$F(t, x, y, z) = 0 \tag{1.17}$$

Поверхность Σ делит пространство на две области: с одной стороны от этой поверхности $F(x, y, z, t)<0$, с другой $F(t, x, y, z)>0$.

Как это сделано в [1], первую область назовем отрицательной; значения, к которым стремится некая скалярная или векторная функция $b(t, x, y, z)$, если приближаться к Σ, оставаясь в отрицательной области, обозначим через b_-; вторую область назовем положительной, а соответствующие ей значения b на Σ обозначим b_+. Введем также обозначение

$$b_+ - b_- = [b]$$

На поверхностях Σ сильного разрыва с уравнением (1.17) при движении E' выполняются условия динамической совместности (см. [1], гл. 1, § 2)

$$\left[\rho'\left(\frac{\partial F}{\partial t} + u'\frac{\partial F}{\partial x} + v'\frac{\partial F}{\partial y} + w'\frac{\partial F}{\partial z}\right)\right] = 0 \tag{1.18}$$

$$\rho'\left(\frac{\partial F}{\partial t} + u'\frac{\partial F}{\partial x} + v'\frac{\partial F}{\partial y} + w'\frac{\partial F}{\partial z}\right)[\Omega'] = -[p']\left(\frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\mathbf{k}\right) \tag{1.19}$$

$$\rho'\left(\frac{\partial F}{\partial t} + u'\frac{\partial F}{\partial x} + v'\frac{\partial F}{\partial y} + w'\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left[\frac{\Omega'\Omega'}{2} + \frac{5}{2}\frac{p'}{\rho'}\right] =$$
$$= -\left[p'\left(u'\frac{\partial F}{\partial x} + v'\frac{\partial F}{\partial y} + w'\frac{\partial F}{\partial z}\right)\right] \tag{1.20}$$

Здесь $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы по осям x, y, z. Кроме того, должна выполняться теорема Цемплена (см. [1], гл. 1, § 5)

$$\left[u'\frac{\partial F}{\partial x} + v'\frac{\partial F}{\partial y} + w'\frac{\partial F}{\partial z}\right] < 0 \tag{1.21}$$

Теорема 1.2. Для движений E_0 поверхностью сильного разрыва (на которой выполняются условия динамической совместимости) будет поверхность Σ_0 с уравнением

$$F(\tau, \xi, \eta, \zeta) = 0$$
$$\tau = a - \frac{b^2}{t-c}, \qquad \xi = \frac{b}{t-c}x, \qquad \eta = \frac{b}{t-c}y, \qquad \zeta = \frac{b}{t-c}z \tag{1.22}$$

Для доказательства получим предварительно вспомогательное соотношение; умножая скалярно равенство (1.19) на $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$, имеем

$$\rho'\left(\frac{\partial F}{\partial t} + u'\frac{\partial F}{\partial x} + v'\frac{\partial F}{\partial y} + w'\frac{\partial F}{\partial z}\right)[\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}] = -[p']\left(\frac{\partial F}{\partial x}x + \frac{\partial F}{\partial y}y + \frac{\partial F}{\partial z}z\right) \quad (1.23)$$

Подставим в соотношения (1.18) — (1.20), (1.21) вместо функции $F(t, x, y, z)$ функцию $F_0(t, x, y, z) = F(\tau, \xi, \eta, \zeta)$, а вместо u', v', w', ρ', p' — функции u_0, v_0, w_0, ρ_0, p_0, определяемые соотношениями (1.12), (1.13), (1.14), и заменим производные по t, x, y, z через производные по τ, ξ, η, ζ, пользуясь правилами (1.9), (1.10) дифференцирования. Тогда, используя при преобразованиях равенства (1.20) равенство (1.23), а также равенство $[\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}] = 0$, получим соотношения, которые получаются из соотношений (1.18) — (1.21) формальной заменой t, x, y, z, u', v', w' соответственно на $\tau, \xi, \eta, \zeta, u_0, v_0, w_0$.

Таким образом, условия (1.18) — (1.21), справедливые для движения E' на поверхностях $F(t, x, y, z) = 0$, будут эквивалентны условиям, описанным на поверхностях $F(\tau, \xi, \eta, \zeta) = 0$ для движения E_0.

Отсюда следует, что на поверхностях Σ_0 при движении E_0 выполняются динамические условия совместности, если они выполняются на поверхностях Σ' при движении E', и, таким образом, теорема (1.2) доказана. Если поверхность Σ' с уравнением (1.17) является поверхностью стационарного (тангенциального) разрыва для движения E', то поверхность Σ_0 с уравнением (1.22) будет тоже поверхностью тангенциального разрыва; действительно, если на поверхности Σ' для движения E' выполняются условия того, что поверхность Σ' все время состоит из одних и тех же частиц для каждой из разделяемых ею областей

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u_+\frac{\partial F}{\partial x} + v_+\frac{\partial F}{\partial y} + w_+\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t} + u_-\frac{\partial F}{\partial x} + v_-\frac{\partial F}{\partial y} + w_-\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (1.24)$$

условия динамической совместности

$$[p] = 0 \quad (1.25)$$

то они выполняются на поверхности Σ_0 для движения E_0; это легко проверить соответствующими подстановками.

Если в движении E' поверхность $F(t, x, y, z) = 0$ представляет собой непроницаемую границу, то поверхность $F(\tau, \xi, \eta, \zeta) = 0$ будет непроницаемой границей в движении E_0.

Полученные результаты позволяют любым движениям E' идеального газа, как без сильных разрывов, так и с сильными разрывами, сопоставить движения E_0.

2. Примеры новых точных решений. (a) Пусть $u' = v' = w' = 0$, $\rho' = \rho'(x, y, z)$, $p' = p_1 = \mathrm{const}$, т. е. имеет место состояние покоя для E'. Для E_0 получаем

$$u_0 = \frac{x}{t-c}, \qquad v_0 = \frac{y}{t-c}, \qquad w_0 = \frac{z}{t-c} \quad (2.1)$$

$$\rho_0 = \left(\frac{b}{t-c}\right)^3 \rho'\left(\frac{b}{t-c}x, \frac{b}{t-c}y, \frac{b}{t-c}z\right), \qquad p_0 = \left(\frac{b}{t-c}\right)^5 p_1 \quad (2.2)$$

где ρ' — произвольная положительная функция аргументов. Эти движения для любого γ и $p' = \text{const}$ были получены Л. И. Седовым [2] как частный случай автомодельных движений газа, обладающих центральной симметрией. Однако особого внимания эти движения заслуживают потому, что обладают свойством однородности: поля скоростей частиц относительно системы координат, связанной с любой движущейся материальной частицей, одинаковы, и, таким образом, точка $x = y = z = 0$ в этом смысле ничем не отличается от других точек. В самом деле, для любой фиксированной частицы x_*, y_*, z_* уравнения (2.1), очевидно, дают следующий закон движения:

$$\frac{dx_*}{dt} = \frac{x_*}{t-c}, \qquad \frac{dy_*}{dt} = \frac{y_*}{t-c}, \qquad \frac{dz_*}{dt} = \frac{z_*}{t-c} \tag{2.3}$$

$$\frac{x_*}{t-c} = u_* = \text{const}, \qquad \frac{y_*}{t-c} = v_* = \text{const}, \qquad \frac{z_*}{t-c} = w_* = \text{const} \tag{2.4}$$

Рассматриваемая частица движется с постоянной скоростью u_*, v_*, w_*. Каждая частица движется с постоянной скоростью, скорости двух разных частиц, различны. Связывая систему координат с рассматриваемой частицей, положим

$$x_1 = x - x_*, \qquad y_1 = y - y_*, \qquad z_1 = z - z_*$$
$$u_1 = u - u_*, \qquad v_1 = v - v_*, \qquad w_1 = w - w_*$$

Тогда уравнения (2.1) примут вид

$$u_1 = \frac{x_1}{t-c}, \qquad v_1 = \frac{y_1}{t-c}, \qquad w_1 = \frac{z_1}{t-c}$$

что и утверждалось. Рассматриваемые при $c < t$, $b > 0$ равенства (2.1), (2.2) дают однородное расширение газа, рассматриваемые при $c > t$, $b < 0$ они дают однородное сжатие газа.

При движениях однородного расширения и сжатия, характеризуемых равенствами (2.1), (2.2), в каждый момент времени во всем пространстве вектор скорости $\Omega = (t-c)^{-1}\,\mathbf{r}$ (пропорционален радиусу вектору $\mathbf{r}$), а давление p зависит только от времени.

Если известно, что некоторое движение в какой-то момент времени $t = t_0$ обладает этими свойствами, то оно будет обладать ими и при $t > t_0$.

Решим следующую задачу Коши. Пусть

$$u = \lambda x, \qquad v = \lambda y, \qquad w = \lambda z \qquad (\lambda = \text{const})$$
$$\rho = f(x, y, z), \qquad p = p_0 = \text{const} \qquad \text{при } t = t_0$$

Найдем движение при $t > t_0$. Полагая в равенствах (2.1), (2.2)

$$b = 1/\lambda, \qquad c = t_0 - 1/\lambda$$

и заменяя произвольную функцию ρ' на f, получим решение поставленной задачи Коши

$$u = \frac{\lambda x}{\lambda(t-t_0)+1}, \qquad v = \frac{\lambda y}{\lambda(t-t_0)+1}, \qquad w = \frac{\lambda z}{\lambda(t-t_0)+1} \tag{2.5}$$

$$\rho = \frac{1}{(\lambda t - \lambda t_0 + 1)^3} f\left(\frac{x}{\lambda t - \lambda t_0 + t_0}, \frac{y}{(\lambda t - \lambda t_0 + 1)}, \frac{z}{(\lambda t - \lambda t_0 + 1)}\right) \tag{2.6}$$

$$p = \frac{1}{(\lambda t - \lambda t_0 + 1)^5} p_0 \tag{2.7}$$

Таким образом, движение при $t > t_0$ действительно является движением однородного расширения или сжатия.

(б) Движение E' будет стационарным движением типа сферического источника или стока идеального одноатомного газа. Оно определяется известными соотношениями [1]

$$4\pi r^2 \rho v = Q, \qquad \rho = \rho_0 \left(1 - \frac{1}{10} \frac{\rho_0}{p_0} v^2\right)^{3/2}, \qquad p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{5/3}$$
$$Q = \mathrm{const}, \qquad \rho_0 = \mathrm{const}, \qquad p_0 = \mathrm{const} \tag{2.8}$$

По теореме 1.1 для получения движения E_0 здесь следует заменить v, ρ, p, r соответственно на

$$\frac{t-c}{b}\left(v - \frac{r}{t-c}\right), \qquad \left(\frac{t-c}{b}\right)^3 \rho, \qquad \left(\frac{t-c}{b}\right)^5 p, \qquad \frac{b}{t-c} r$$

Новое решение будет нестационарным и определяется соотношениями

$$4\pi \left(\frac{t-c}{b}\right)^2 r^2 \rho \left(v - \frac{r}{t-c}\right) = Q$$
$$\rho = \rho_0 \left(\frac{b}{t-c}\right)^3 \left[1 - \frac{1}{10} \frac{\rho_0}{p_0} \left(\frac{t-c}{b} v - \frac{r}{b}\right)^2\right]^{3/2}, \qquad p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{5/3} \tag{2.9}$$

(в) Движение E' является «простой волной» Римана; связь между величинами для волн двух типов дается соотношениями [1]

$$x = \left(\tfrac{4}{3} u + \alpha\right) t + f(u), \qquad v = 0, \qquad w = 0 \qquad (\alpha = \mathrm{const}) \tag{2.10}$$
$$\beta p^{1/5} = \pm \frac{1}{3} u \pm \alpha, \qquad \rho = \frac{5}{3} \frac{1}{\beta^2} p^{3/5} \qquad (\beta = \mathrm{const}) \tag{2.11}$$

Здесь $f(u)$ — произвольная функция аргумента. Для движения E_0, пользуясь теоремой 1.1 и выбором произвольных постоянных преобразования переменных в соответствии со случаем (а), получим «простые волны» в однородно расширяющемся и сжимающемся газе: (2.12)

$$\frac{x}{\lambda(t-t_0)+1} = \left\{\tfrac{4}{3} [(\lambda t - \lambda t_0 + 1) u - \lambda x] + \alpha\right\} \tau + f[(\lambda t - \lambda t_0 + 1) u - \lambda x]$$
$$v = \frac{\lambda y}{\lambda(t-t_0)+1}, \qquad w = \frac{\lambda z}{\lambda(t-t_0)+1}, \qquad \rho = \frac{5}{3} \frac{1}{\beta^2} p^{3/5}, \qquad \tau = \frac{t-t_0}{\lambda(t-t_0)+1}$$
$$\beta(\lambda t - \lambda t_0 + 1) p^{1/5} = \pm \tfrac{1}{3} [(\lambda t - \lambda t_0 + 1) u - \lambda x] \pm \alpha$$

Взяв в правой части первого из соотношений (2.11) верхний знак (плюс) и положив $f(u) \equiv 0$, $\alpha = \beta p_1^{1/5}$, $p_1 = \mathrm{const}$, получим известное решение задачи о движении при $t > 0$ газа, в котором при $t = 0$

для полупространства $x > 0$

$$u = 0, \qquad p = p_1 = \mathrm{const}, \qquad \rho = \rho_1 = \frac{5}{3} \frac{1}{\beta^2} p_1^{3/5}$$

для полупространства $x < 0$ $p = 0$, $\rho = 0$:

$$u = \frac{3}{4}\left[\frac{x}{t} - \left(\frac{5}{3} \frac{p_1}{\rho_1}\right)^{1/2}\right], \qquad v = w = 0, \tag{2.13}$$
$$\frac{x}{t} < \left(\frac{5}{3} \frac{p_1}{\rho_1}\right)^{1/2}, \qquad \left(\frac{5}{3} \frac{p_1}{\rho_1}\right)^{1/2} \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/5} = \frac{1}{4} \frac{x}{t} + \frac{3}{4} \left(\frac{5}{3} \frac{p_1}{\rho_1}\right)^{1/2}$$

Соответствующее движение E_0 характеризуется соотношениями

$$u = \frac{3}{4}\left[\frac{x}{t-t_0} - \left(\frac{5}{3} \frac{p_1}{\rho_1}\right)^{1/2}\right] (\lambda t - \lambda t_0 + 1)^{-1} + \frac{\lambda x}{\lambda(t-t_0)+1}$$
$$v = \frac{\lambda y}{\lambda(t-t_0)+1}, \qquad w = \frac{\lambda z}{\lambda(t-t_0)+1} \tag{2.14}$$
$$\left(\frac{5}{3} \frac{p_1}{\rho_1}\right)^{1/2} \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/5} = \frac{1}{\lambda(t-t_0)+1} \left[\frac{1}{4} \frac{x}{t-t_0} + \frac{3}{4} \left(\frac{5}{3} \frac{p_1}{\rho_1}\right)^{1/2}\right]$$

Эти соотношения дают решение задачи о движении при $t > t_0$ газа, который в момент времени $t = t_0$ в полупространстве $x < 0$ удовлетворял условиям $p = 0$, $\rho = 0$, а в полупространстве $x > 0$ подчинялся соотношениям $u = \lambda x$, $v = \lambda y$, $w = \lambda z$, $\rho = \rho_1 = \text{const}$, $p = p_1 = \text{const}$.

Интересно, что скорость частиц газа, граничащих с областью нулевого давления, для движений E' и E_0 одинакова и равна $3\,(^5/_3\; p_1/\rho_1)^{1/2}$.

3. Точечный взрыв в однородно-расширяющемся и в однородно-сжимающемся газе. В движении E' при $t = 0$

$$u = v = w = 0, \qquad \rho = \rho_1 = \text{const}, \qquad p = p_1 = \text{const}$$

При $t = 0$ в точке $x = y = z = 0$ мгновенно выделяется [2] энергия E. При $t > 0$ имеются две области, разделяемые ударной волной: область возмущенного движения, примыкающая к точке $r = 0$ $(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$, и область невозмущенного движения. Запишем закон изменения расстояния r_2 волны от точки $r = 0$ в виде

$$r_2 = \left(\frac{E}{p_1}\right)^{1/3} F(t''), \qquad t'' = E^{-1/3} \rho_1^{-1/2} p_1^{5/6}\, t \qquad (F(0) = 0) \tag{3.1}$$

Рассматривая ниже движения со сферической симметрией, обозначим через v проекцию вектора скорости на радиус-вектор. Для скорости v_+, плотности ρ_+, давлений p_+ за волной имеют место соотношения [2]

$$v_+ = \frac{3}{4}\left(\frac{p_1}{\rho_1}\right)^{1/2}\left\{N(t'') - \frac{5}{3}\frac{1}{N(t'')}\right\}, \qquad N(t'') = \frac{dF(t'')}{dt''}$$

$$N(\infty) = \sqrt{\frac{5}{3}}, \qquad N(0) = \infty \tag{3.2}$$

$$\frac{\rho_+}{\rho_1} = 4\left\{1 + \frac{5}{N(t'')^2}\right\}^{-1}, \qquad \frac{p_+}{p_1} = \frac{3}{4}\left\{N(t'')^2 - \frac{1}{3}\right\} \tag{3.3}$$

Движение внутри области возмущения предположим заданным в виде

$$v = v_+ V(t'', r/r_2), \qquad \rho = \rho_+ R(t'', r/r_2) \qquad p = p_+ P(t'', r/r_2)$$

$$V(t'', 1) = 1, \qquad R(t'', 1) = 1, \quad P(t'', 1) = 1 \tag{3.4}$$

При $t'' \ll 1$ главными членами для $F(t'')$ и $N(t'')$ будут выражения

$$F(t'') = \alpha^{-1/5} t''^{2/5}, \qquad N(t'') = \frac{2}{5}\alpha^{-1/5} t''^{-3/5} \qquad (\alpha = 0.487) \tag{3.5}$$

где приведенное значение α получено численным интегрированием [3].

Главные члены в выражениях (3.1) — (3.3) будут (3.6)

$$r_2 = \left(\frac{E}{\alpha\rho_1}\right)^{1/5} t^{2/5}, \quad v_+ = \frac{3}{10}\left(\frac{E}{\alpha\rho_1}\right)^{1/5} t^{-3/5} \quad \rho_+ = 4\rho_1, \quad p_+ = \frac{3}{25}\rho_1 \left(\frac{E}{\alpha\rho_1}\right)^{2/5} t^{-6/5}$$

Последние выражения являются точными, если положить $p_1 = 0$ (сильный взрыв). Внутри области возмущения имеем соотношения [3]

$$\frac{v}{v_+} = \frac{r}{r_2}\mu, \qquad \frac{r}{r_2} = \frac{(5\mu - 4)^{2/13}}{\mu^{2/5}}\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\mu\right)^{-82/195}, \qquad 4/ \leqslant \mu \leqslant 1) \tag{3.7}$$

$$\frac{\rho}{\rho_+} = \frac{(5\mu - 4)^{9/13}}{(4 - 3\mu)^6}\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\mu\right)^{82/13}, \qquad \frac{p}{p_+} = \frac{\mu^{6/5}}{(4 - 3\mu)^5}\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\mu\right)^{82/15}$$

Пользуясь теоремой 1.2 (равенства (1.22)) и равенством (3.1), получим, что в движении E_0 в газе распространяется ударная волна па закону

$$r_2 = \frac{t-c}{b}\left(\frac{E}{p_1}\right)^{1/3} F(\tau''), \qquad \tau'' = E^{-1/3}\rho_1^{-1/2}p_1^{5/6}\left(a - \frac{b^2}{t-c}\right) \quad (3.8)$$
$$a = \mathrm{const}, \quad b = \mathrm{const}, \quad c = \mathrm{const}$$

В движении E_0 вне сферической ударной волны (перед ней) по формулам (1.12), (1.13), (1.14) получим (через v обозначена проекция вектор скорости на радиус-вектор)

$$v = \frac{r}{t-c}, \qquad \rho = \rho_1\left(\frac{b}{t-c}\right)^3, \qquad p = p_1\left(\frac{b}{t-c}\right)^5 \quad (3.9)$$

т. е. имеет место однородное расширение или сжатие газа. Подберем постоянные a, b, c так, чтобы движение E_0 давало решение задачи о движении газа при начальных условиях

$$u = \lambda x, \quad v = \lambda y, \quad w = \lambda z \quad (\lambda = \mathrm{const}); \quad \rho = \rho_1, \quad p = p_1 \neq 0 \text{ при } t = t_0$$

В точке $r = 0$ при $t = t_0$ мгновенно выделяется энергия E. Имея в в виду соотношения (2.5), (2.6), (2.7) и их вывод, положим $b = 1/\lambda$, $c = t_0 - 1/\lambda$. Требуя в равенстве (3.8) условия $r_2 = 0$ при $t = t_0$, положим, кроме того, $a = 1/\lambda$. Тогда формулы (3.8) и (3.9) примут вид

$$r_2 = (\lambda t - \lambda t_0 + 1)\left(\frac{E}{p_1}\right)^{1/3} F(\tau''), \qquad \tau'' = E^{-1/3}\rho_1^{-1/2}p_1^{5/6}\frac{t-t_0}{\lambda(t-t_0)+1} \quad (3.10)$$

$$v = \frac{\lambda r}{\lambda(t-t_0)+1}, \qquad \rho = \frac{\rho_1}{(\lambda t - \lambda t_0 + 1)^3}, \qquad p = \frac{p_1}{(\lambda t - \lambda t_0 + 1)^5} \quad (3.11)$$

При малых значениях τ'' (значениях t, близких к t_0) равенство (3.10) в главном члене совпадает с равенством (3.1), если в последнем заменить t на $t - t_0$. Отсюда следует, что в формулах (3.10) и (3.11) величина E равна энергии, мгновенно подводимой при $t = t_0$ уже в движении E_0 (в однородно расширяющемся или сжимающемся газе). Пользуясь равенствами (1.12), (1.13), (1.14) и (3.10) для движения E_0, вместо формул (3.2) — (3.4) получим

$$v = \frac{3}{4}\left(\frac{p_1}{\rho_1}\right)^{1/2}\left\{N(\tau'') - \frac{5}{3}\frac{1}{N(\tau'')}\right\}\frac{V(\tau'', r/r_2)}{\lambda(t-t_0)+1} + \frac{\lambda r}{\lambda(t-t_0)+1} \quad (3.12)$$

$$\rho = 4\frac{\rho_1 R(\tau'', r/r_2)}{[\lambda(t-t_0)+1]^3}\left\{1 + \frac{5}{N(\tau'')^2}\right\}^{-1}, \quad p = \frac{3}{4}\frac{p_1 P(\tau'', r/r_2)}{[\lambda(t-t_0)+1]^5}\left\{N(\tau'')^2 - \frac{1}{3}\right\} \quad (3.13)$$

$$v_+ = \frac{3}{4}\left(\frac{p_1}{\rho_1}\right)^{1/2}\left\{N(\tau'') - \frac{5}{3}\frac{1}{N(\tau'')}\right\}(\lambda t - \lambda t_0 + 1)^{-1} + \lambda\left(\frac{E}{p_1}\right)^{1/3} F(\tau'') \quad (3.14)$$

$$\frac{\rho_+}{\rho_1(\lambda t - \lambda t_0 + 1)^{-3}} = 4\left\{1 + \frac{5}{N(\tau'')^2}\right\}^{-1}, \qquad \frac{p_+}{p_1(\lambda t - \lambda t_0 + 1)^{-5}} = \frac{3}{4}\left\{N(\tau'')^2 - \frac{1}{3}\right\} \quad (3.15)$$

Рассмотрим сначала случай $\lambda > 0$ (взрыв в расширяющемся газе). По второму из равенств (3.10) имеем при $\lambda > 0$

$$\tau_\infty'' = \lim_{t\to\infty}\tau'' = \frac{1}{\lambda}E^{-1/3}\rho_1^{-1/2}p_1^{5/6} \quad (3.16)$$

По формулам (3.10), (3.11) получим, что масса M газа, заключенного внутри сферы, совпадающей с ударной волной, равна

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho_1 \frac{E}{p_1} F(\tau'')^3 \qquad (3.17)$$

Эта масса при возрастании t остается ограниченной

$$\lim_{t\to\infty} M = M_\infty = \frac{4}{3}\pi\rho_1 \frac{E}{p_1} F(\tau_\infty'')^3 \qquad (3.18)$$

Пользуясь равенством (3.14), получим

$$\lim_{t\to\infty} v_+ = v_{+\infty} = \lambda\left(\frac{E}{p_1}\right)^{1/3} F(\tau_\infty'') \qquad (3.19)$$

Дифференцирование равенства (3.10) и переход к пределу дает

$$\lim \frac{dr_2}{dt} = N_\infty = \lambda\left(\frac{E}{p_1}\right)^{1/3} F(\tau_\infty'') \qquad (3.20)$$

Обозначим через v_- скорость газа непосредственно перед волной. В первой формуле (3.11) положим $r = r_2$ (причем r_2 определяется равенством (3.10)) и перейдем к пределу; получим

$$\lim_{t\to\infty} v_- = v_{-\infty} = \lambda\left(\frac{E}{p_1}\right)^{1/3} F(\tau_\infty'') \qquad (3.21)$$

Равенства (3.19), (3.20), (3.21) показывают, что при $t \to \infty$ скорость распространения ударной волны относительно движущихся частиц невозмущенного ею газа стремится к нулю, к нулю стремится и приращение скорости частиц при прохождении волны через них. Третье из равенств (3.11) показывает, что знаменатель левой части второго равенства (3.15) представляет собой давление p_- перед ударной волной; имеем

$$\lim_{t\to\infty} \frac{p_+}{p_-} = \frac{3}{4}\left\{N(\tau_\infty'')^2 - \frac{1}{3}\right\} \qquad (3.22)$$

При $t \to \infty$ величины давлений p_-, p_+ стремятся к нулю. Правая часть равенства (3.22) равна 1 только при $\tau_\infty'' = \infty$, при конечных значениях τ_∞'' она больше 1. Поэтому при любой комбинации исходных величин в выражении (3.16) для τ_∞'' отношение p_+ / p_- при $t \to \infty$ стремится к предельному значению, большему единицы.

Рассмотрим выражение для кинетической энергии E_v массы газа внутри сферы ударной волны

$$E_v = 4\pi\int_0^{r_2} \rho\frac{v^2}{2} r^2\,dr = 4\pi r_2^3\int_0^1 \rho\frac{v^2}{2}\left(\frac{r}{r_2}\right)^2 d\left(\frac{r}{r_2}\right) \qquad (3.23)$$

Найдем предел E_v при $t \to \infty$. При этом предельном переходе роль первого слагаемого в правой части равенства (3.12) исчезает. Пользуясь равенствами (3.10), (3.12), (3.13), (3.16), получим (3.24)

$$\lim_{t\to\infty} E_v = 8\pi\rho_1\lambda^2\left(\frac{E}{p_1}\right)^{5/3} F(\tau_\infty'')^5 \left\{1 + \frac{5}{N(\tau''_\infty)^2}\right\}^{-1} \int_0^1 R\left(\tau_\infty'', \frac{r}{r_2}\right)\left(\frac{r}{r_2}\right)^4 d\left(\frac{r}{r_2}\right)$$

Для внутренней энергии E_p массы газа внутри сферы ударной волны для одноатомного газа ($\gamma = 5/3$) имеем выражение

$$E_p = 4\pi\int_0^{r_2} \frac{3}{2} pr^2 dr = 6\pi r_2^3\int_0^1 p\left(\frac{r}{r_2}\right)^2 d\left(\frac{r}{r_2}\right) \qquad (3.25)$$

Пользуясь (3.10), (3.13), получим $\lim E_p = 0$ при $t \to \infty$.

Если бы в массе M газа, определяемой равенством (3.17), взрыва не было, то состояние газа в ней определялось бы равенствами (3.11). При $t \to \infty$ внутренняя ее энергия стремилась бы к нулю, а кинетическая энергия, очевидно, стремилась бы к выражению

$$\lim_{t\to\infty} E_v = \frac{2}{5}\pi\rho_1\lambda^2\left(\frac{E}{p_1}\right)^{5/3} F\,(\tau_\infty'')^5 \tag{3.26}$$

Разность между правыми частями равенств (3.24) и (3.26) равна энергии E взрыва. Рассматривая эту разность и заменяя величину λ из равенства (3.16), получим

$$E = 2\pi\frac{E}{\tau_\infty''^2}F(\tau_\infty'')^5\left\{\left[\frac{1}{4}+\frac{5/4}{N\,(\tau_\infty'')^2}\right]^{-1}\int_0^1 R\left(\tau_\infty'', \frac{r}{r_2}\right)\left(\frac{r}{r_2}\right)^4 d\left(\frac{r}{r_2}\right)-\frac{1}{5}\right\}$$

или после сокращения на величину E

$$2\pi\frac{F\,(\tau_\infty'')^5}{\tau_\infty''^2}\left\{\left[\frac{1}{4}+\frac{5/4}{N\,(\tau_\infty'')^2}\right]^{-1}\int_0^1 R\left(\tau_\infty'', \frac{r}{r_2}\right)\left(\frac{r}{r_2}\right)^4 d\left(\frac{r}{r_2}\right)-\frac{1}{5}\right\}=1 \tag{3.27}$$

Величина τ_∞'' может принимать, как это видно из соотношения (3.16), любые значения от 0 до ∞. Мы получили столь своеобразным способом некоторое интегральное соотношение для точечного взрыва в покоящемся одноатомном газе, так как входящие в это соотношение функции F, N, R по их определению соотношениями (3.1), (3.2), (3.4) относятся именно к этому случаю.

Предыдущий анализ показывает, что при решении задачи о точечном взрыве в однородно расширяющемся газе, пользуясь одним и тем же универсальным решением задачи о точечном взрыве в покоящемся газе, мы получаем однопараметрическое семейство решений, где параметром является величина τ_∞''. Для каждого фиксированного значения τ_∞'' при решении задачи о точечном взрыве в расширяющемся газе вплоть до $t \to \infty$ используется только «кусок» решения задачи о точечном взрыве в покоящемся газе, определяемый диапазоном изменения безразмерного времени $0 < t'' < \tau_\infty''$. В расширяющемся газе происходит своеобразное «замораживание» процессов, соответствующих аналогичным процессам, происходящим в покоящемся газе. Это «замораживание» может наступить в стадии сильного взрыва, если для соответствующего τ_∞'' в соответствии с равенством (3.3) имеем:

$$\frac{3}{4}\left\{N\,(\tau_\infty'') - \frac{5}{3}\right\} \gg 1$$

в стадии «сильного взрыва» с противодавлением, если

$$\frac{3}{4}\left\{N\,(\tau_\infty'') - \frac{5}{3}\right\} \approx 1$$

в стадии затухания взрыва, если

$$\frac{3}{4}\left\{N\,(\tau_\infty'') - \frac{5}{3}\right\} \ll 1$$

Если $\lambda < 0$ (взрыв в однородно сжимающемся пространстве), то при $t \to t_0 - 1\,/\,\lambda = t^\circ$ по формуле (3.10) $\tau'' \to \infty$, и, следовательно, в интервале времени $t_0 < t < t_0 - 1/\lambda$ реализуются режимы, подобные тем, которые реализуются при взрыве в покоящемся газе на бесконечном интервале безразмерного времени: $0 < t'' < \infty$. Второе равенство (3.15) при этом дает

$$\lim_{t \to t^\circ} \frac{p_+}{p_-} = \lim_{\tau'' \to \infty} \frac{3}{4} \left\{ N(\tau'')^2 - \frac{1}{3} \right\} = 1 \qquad (3.28)$$

Таким образом, относительное приращение давления в ударной волне при $t \to t_0 - 1/\lambda$ становится бесконечно малым. При больших t'' функция $F(t'') \to \infty$, как $t'' \sqrt{5/3}$ (ударная волна звуковая). Пользуясь этой асимптотикой, по формулам (3.10) получим

$$\lim_{t \to t^\circ} r_2 = r_{2\infty} = -\frac{1}{\lambda} \left(\frac{5}{3} \frac{p_1}{\rho_1} \right)^{1/2} = -\frac{1}{\lambda} a_1 \qquad (3.29)$$

Здесь a_1 — скорость звука в сжимающемся газе при $t = t_0$. Смысл соотношения (3.29) легко раскрыть. Соотношения (3.11) характеризуют невозмущенное состояние сжимающегося газа. В этом состоянии область, в которой скорость больше или равна скорости звука, определяется значениями

$$r \geqslant -\frac{1}{\lambda} \left(\frac{5}{3} \frac{p_1}{\rho_1} \right)^{1/2} \qquad (3.30)$$

Ударная волна распространяется по частицам газа, скорость которых направлена к точке $r = 0$. Если волна становится акустической, ее положение в пространстве фиксируется при значении r_2, определяемом равенством (3.29), когда скорость ее распространения по частицам газа равна скорости частиц в их движении к точке $r = 0$.

Очевидно, что при $t \to t_0 - 1/\lambda$ каждая из частиц газа войдет в сферу ударной волны, так как при $t \to t_0 - 1/\lambda$ любая фиксированная частица вне ударной волны, движущаяся по закону (3.11), приближается как угодно близко к точке $r = 0$. Выражение (3.29) для $r_{2\infty}$ не зависит от энергии E взрыва. Вместе с тем из физических соображений ясно, что если зафиксировать величины λ, ρ_1, p_1 и некоторый момент $t = t_1$, $t_0 < t_1 < t_0 - 1/\lambda$, то при достаточно большой величине E в момент времени $t = t_1$ величина r_2 будет сколь угодно велика и, во всяком случае, может быть сделана больше величины $r_{2\infty}$. Но это означает, что при таких значениях E радиус r_2 сферы ударной волны при $t > t_0$ во времени сначала возрастает, а затем уменьшается до значения $r_{2\infty}$.

Найдем при движении, определяемом равенствами (3.11) (при $\lambda < 0$), границу $r = r'(t)$ изменения во времени области бесконечно-малого возмущения, вызванного в точке $r = 0$ при $t = t_2$, где $t_0 < t_2 < t_0 - 1/\lambda$, имеем

$$\frac{dr'}{dt} = \frac{\lambda r'}{\lambda(t - t_0) + 1} + \left(\frac{5}{3} \frac{p_1}{\rho_1} \right)^{1/2} \frac{1}{\lambda(t - t_0) + 1} \qquad (3.31)$$

Интегрируя и требуя выполнения условия $r' = 0$ при $t = t_2$, получаем

$$r' = -\frac{1}{\lambda} \left(\frac{5}{3} \frac{p_1}{\rho_1} \right)^{1/2} \frac{t - t_2}{t_0 - 1/\lambda - t_2} \qquad (3.32)$$

При $t = t_0 - 1/\lambda$ $r' = r_{2\infty}$, где $r_{2\infty}$ определяется формулой (3.29). Таким образом, фронт звуковой волны движется с постоянной скоростью, равной скорости звука при $t = t_2$. При $t = t_0 - 1/\lambda$ звуковые волны, вызванные в точке $r = 0$ в любой момент времени, достигают сферы $r = r_{2\infty}$. Все акустические возмущения, вызванные в точке $r = 0$, сосредоточены внутри этой сферы.

4. Точное решение задачи о точечном взрыве без противодавления в однородно расширяющемся и однородно сжимающемся газе. Рассмотрим теперь случай $p_1 = 0$, $\rho_1 \neq 0$ (сильный взрыв без противодавления). Для удобства подставим выражения (3.6) в выражения (3.7), чтобы выразить величины через t, r, μ, получим

$$\begin{aligned} r &= \left(\frac{E}{\alpha\rho_1}\right)^{1/5} t^{2/5}\mu^{-2/5}(5\mu - 4)^{2/13}\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\mu\right)^{-82/195} \\ v &= \frac{3}{10}\left(\frac{E}{\alpha\rho_1}\right)^{1/5} t^{-3/5}\mu^{3/5}(5\mu - 4)^{2/13}\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\mu\right)^{-82/195} \\ \rho &= 4\rho_1(5\mu - 4)^{9/13}(4 - 3\mu)^{-6}\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\mu\right)^{82/13} \\ p &= \frac{3}{25}\rho_1\left(\frac{E}{\alpha\rho_1}\right)^{2/5} t^{-6/5}\mu^{6/5}(4 - 3\mu)^{-5}\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\mu\right)^{82/15} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Принимаем функции v, ρ, p, определяемые этими равенствами, за функции, обозначенные штрихом сверху в равенствах (1.12); тогда, заменяя r и t в формулах (4.1) соответственно на

$$\frac{r}{\lambda t - \lambda t_0 + 1}, \qquad \frac{t - t_0}{\lambda(t - t_0) + 1} = \tau \tag{4.2}$$

получим точное решение в параметрическом виде задачи о сильном точечном взрыве в однородно расширяющемся и сжимающемся пространстве

$$\begin{aligned} r &= \left(\frac{E}{\alpha\rho_1}\right)^{1/5} \tau^{2/5}(\lambda t - \lambda t_0 + 1)\,\mu^{-2/5}(5\mu - 4)^{2/13}\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\mu\right)^{-82/195} \\ v &= \frac{3}{10}\left(\frac{E}{\alpha\rho_1}\right)^{1/5} \tau^{-3/5}\frac{\mu^{3/5}(5\mu - 4)^{2/13}}{\lambda t - \lambda t_0 + 1}\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\mu\right)^{-82/195} + \frac{\lambda r}{\lambda(t - t_0) + 1} \\ \rho &= 4\rho_1(\lambda t - \lambda t_0 + 1)^{-3}(5\mu - 4)^{9/13}(4 - 3\mu)^{-6}\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\mu\right)^{82/13} \\ p &= \frac{3}{25}\rho_1\left(\frac{E}{\alpha\rho_1}\right)^{2/5}\tau^{-6/5}(\lambda t - \lambda t_0 + 1)^{-5}\mu^{6/5}(4 - 3\mu)^{-5}\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\mu\right)^{82/15} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Для получения закона движения ударной волны и значений величин непосредственно за ней в последних равенствах нужно положить $\mu = 1$. Тогда получим

$$r_2 = \left(\frac{E}{\alpha\rho_1}\right)^{1/5}\left[\frac{t - t_0}{\lambda(t - t_0) + 1}\right]^{2/5}(\lambda t - \lambda t_0 + 1) \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} v_+ &= \frac{3}{10}\left(\frac{E}{\alpha\rho_1}\right)^{1/5}\left[\frac{t - t_0}{\lambda(t - t_0) + 1}\right]^{-3/5}(\lambda t - \lambda t_0 + 1)^{-1} + \\ &\quad + \left(\frac{E}{\alpha\rho_1}\right)^{1/5}\lambda\left[\frac{t - t_0}{\lambda(t - t_0) + 1}\right]^{2/5} \\ p_+ &= \frac{3}{25}\rho_1\left(\frac{E}{\alpha\rho_1}\right)^{2/5}\left[\frac{t - t_0}{\lambda(t - t_0) + 1}\right]^{-6/5}(\lambda t - \lambda t_0 + 1)^{-5} \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\rho_+ = \frac{4\rho_1}{(\lambda t - \lambda t_0 + 1)^3} \tag{4.6}$$

Вне ударной волны $p \equiv 0$, а v и ρ определяются формулами (3.11). Выражение для массы газа внутри ударной волны имеет вид

$$M = \rho_1(\lambda t - \lambda t_0 + 1)^{-3}\frac{4}{3}\pi r_2^3 = \frac{4}{3}\pi\rho_1\left(\frac{E}{\alpha\rho_1}\right)^{3/5}\left[\frac{t - t_0}{\lambda(t - t_0) + 1}\right]^{6/5} \tag{4.7}$$

При $\lambda > 0$ (расширение) для $t \to \infty$ и при $\lambda < 0$ (сжатие) имеем для $t \to t^\circ = t_0 - 1/\lambda$ соответственно (4.8)

$$\lim_{t\to\infty} M = M_\infty = \frac{4}{3}\pi\rho_1\left(\frac{E}{\alpha\rho_1}\right)^{3/5}\lambda^{-6/5} \quad (\lambda>0), \qquad \lim_{t\to t^\circ} M = \infty \quad (\lambda<0)$$

При $\lambda > 0$ ударная волна «захватит» при своем движении только частицы, которые при $t = t_0$ находились в сфере, радиус которой определяется выражением

$$r = \left(\frac{E}{\alpha\rho_1}\right)^{1/5}\lambda^{-2/5} \tag{4.9}$$

При $\lambda > 0$ ударная волна «захватит» при своем движении (когда $t \to t_0 - 1/\lambda$) каждую из частиц газа. При $\lambda < 0$ выражение (4.5) для r_2 равно нулю при $t = t_0$ и $t = t_0 - 1/\lambda$.

Максимальное значение r_2 равно

$$r_2 = r_{2\max} = \frac{3}{5}\left(-\frac{2}{3\lambda}\right)^{2/5}\left(\frac{E}{\alpha\rho_1}\right)^{1/5} \qquad \left(\text{при } t - t_0 = -\frac{2}{5}\frac{1}{\lambda}\right) \tag{4.10}$$

Таким образом, при $\lambda < 0$ закон изменения r_2 во времени для $p_1 = 0$ всегда имеет немонотонный характер. Выражение (4.5) легко преобразуется к виду

$$v_+ = \left(\frac{E}{\alpha\rho_1}\right)^{1/5}(t - t_0)^{-3/5}[\lambda(t - t_0) + 1]^{-2/5}\left[\frac{3}{10} + \lambda(t - t_0)\right] \tag{4.11}$$

Для $\lambda < 0$ оно меняет знак при $t = t_0 - 3/10\lambda^{-1}$, т. е. еще до того, как радиус волны начинает уменьшаться. При $t \to t_0 - 1/\lambda$ имеем $v_+ \to -\infty$, скорость за ударной волной направлена к центру взрыва. Если $\lambda > 0$ и значение параметра τ_∞'', определяемого равенством (3.16), достаточно мало, то формулы (4.3), (4.2) достаточно точно характеризуют движение на всем бесконечном диапазоне времени $0 < t - t_0 < \infty$. Если $\lambda < 0$, то при $p_1 \neq 0$, как это было показано выше, ударная волна при $t \to t_0 - 1/\lambda$ становится акустической, и поэтому указанные формулы годятся только на некотором начальном участке диапазона $0 < t - t_0 < -1/\lambda$ времени. Заметим, что полученное нами точное решение о сильном взрыве при $p_1 = 0$ уже неавтомодельно; это решение зависит от трех размерных параметров: ρ_1, E, λ. Параметр t_0 является несущественным, так как можно заменить величину $t - t_0$ на величину t, меняя начало отсчета времени.

В заключение следует отметить, что рецензентами редакции по данной работе высказано компетентное суждение о том, что инвариантные преобразования (1.4), (1.5), (1.6) могут быть извлечены из результатов Л. В. Овсянникова [4], к сожалению, эта книга автору стала известной после сдачи работы в редакцию.

Поступила 20 XII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. ОГИЗ, 1948.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехтеоретиздат, 1954.
3. Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В. Теория точечного взрыва. Физматгиз, 1961.
4. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Изд. СО АН СССР, Новосибирск, 1962.