

## ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ТЕЛ МИНИМАЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЗАКОНОВ СОПРОТИВЛЕНИЯ НЬЮТОНА И БУЗЕМАНА

А. Н. Крайко

(Москва)

Точное решение задачи о форме головных частей плоских и осесимметричных тел минимального волнового сопротивления в сверхзвуковом потоке газа получено лишь для частных случаев [1-4]. В этой задаче давление на поверхности тела, определяемое уравнениями в частных производных и граничными условиями, зависящими от формы контура, представляет собой функционал неизвестного заранее вида. Упомянутые точные решения удалось получить благодаря предложенному А. А. Никольским [5] переходу от контура тела к характеристическому контуру, что в ряде случаев позволяет свести задачу к известной задаче вариационного исчисления. Однако таким образом решение удастся построить лишь для частной зависимости между размерами тела и числом Маха  $M$  невозмущенного потока. Например, в плоском случае для каждого  $M$  и некоторого зависящего от  $M$  удлинения телом минимального сопротивления будет клин. Образующие тел других удлинений не найдены. Точные решения с ограничениями на объем, площадь поверхности и т. п. пока отсутствуют.

Отметим два приближенных подхода. Первый связан с линеаризацией уравнений движения, которые затем удается проинтегрировать и получить выражение для сопротивления тела в виде некоторого функционала от формы контура. В этом случае задача сводится к обычной задаче вариационного исчисления. Так могут быть найдены оптимальные тела для любых сверхзвуковых скоростей [6-9], если определяемые тела оказываются тонкими и заостренными. Другой подход основан на применении приближенных формул для давления на поверхности, полученных на основе элементарных представлений для больших сверхзвуковых скоростей ( $M \gg 1$ ). Обычно для этих целей используются законы сопротивления Ньютона и Буземана [10, 11]. Для наиболее интересных видов ограничений и произвольной толщины тел уравнение контура находится в конечном виде. Дальнейшее упрощение для тонких тел не является необходимым, а иногда [12] вводится лишь для сокращения объема вычислений. Ко второму направлению относятся значительно больше работ, чем к первому. В частности, первая задача в такой постановке рассмотрена еще Ньютоном [13]. Однако в работах этого направления обращается недостаточное внимание на то, что контур тела минимального сопротивления в общем случае состоит из экстремальных участков (участков двустороннего экстремума) и из участков краевого экстремума. Последние будут границами области допустимого изменения параметров и определяются как постановкой задачи, так и областью применимости приближенных формул. Игнорирование этого приводит к возникновению определенных трудностей, а также к потере некоторых решений.

Целью настоящей работы является определение оптимальных тел при произвольных ограничениях. Сначала решение проводится для закона сопротивления Ньютона. Получены как необходимые условия экстремума, так и необходимые условия минимума сопротивления (последние и достаточны при строгих неравенствах). В качестве примера дано решение для случая заданных размеров тел. Для осесимметричных тел с потоком и для плоских тел получены некоторые новые результаты. Например, оказывается, что клин не всегда оптимальное тело. Аналогичное исследование проведено для закона сопротивления Буземана. В этом случае, если тело не является

тонким, полное решение известно только в случае задания размеров тела. Для тонких тел решение недавно получено и для ряда других ограничений [12]. В данной работе найдено решение для тел при произвольных ограничениях. Аналогичное исследование может быть проведено и для других законов сопротивления (например, диффузное или зеркальное отражение частиц в свободно-молекулярном потоке).

1. Условимся о некоторых обозначениях. Изопериметрические условия запишем в виде

$$L^j = \int_{y_0}^{y_1} f^j(y, x, x') dy \quad (j = 1, \dots, m)$$

Здесь  $x, y$  — прямоугольные координаты; ось  $y$  перпендикулярна скорости  $V$  невозмущенного потока; ось  $x$ , как и  $V$ , направлена слева направо и в осесимметричном случае совпадает с осью симметрии;  $L^j$  — заданные константы;  $f^j$  — известные функции;  $m$  — число изопериметрических условий;  $x' = dx/dy$  индексы 0 и 1 приписываются величинам в начальной и конечной точках контура, всегда можно считать  $y_0$  и  $x_0$  фиксированными и  $x_0 = 0$ .

За положительное направление обхода контура примем направление от точки 0 к точке 1. Соответственно определяется положительное направление касательной. Угол наклона контура  $\sigma = \arcsin x'$  отсчитывается от оси  $x$  против часовой стрелки. Угол излома контура положителен (отрицателен), если при переходе через излом контур поворачивается против (по) часовой стрелки.

Введем  $m$ -мерные векторы  $\mathbf{L} = (L^1, \dots, L^m)$ ,  $\mathbf{f} = (f^1, \dots, f^m)$ ,  $\mathbf{f}_y = (f_y^1, \dots, f_y^m)$  и т. п.; умножение на скаляр и скалярное произведение определим обычным образом. Например, если  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^1, \dots, \lambda^m)$ , то

$$(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{f}) = \lambda^1 f^1 + \dots + \lambda^m f^m$$

Наконец, пусть  $p$  — давление на поверхности тела и  $\nu = 0$  и  $1$  в плоском и осесимметричном течении, соответственно.

Сформулируем вариационную задачу. Среди допустимых функций

$$x = x(y), \quad x_0(y_0) = 0 \quad (1.1)$$

найти ту, которая обеспечивает минимум сопротивления

$$\chi = (2\pi)^\nu \int_{y_0}^{y_1} p y^\nu dy \quad (1.2)$$

при изопериметрических условиях

$$\mathbf{L} = \int_{y_0}^{y_1} \mathbf{f}(y, x, x') dy \quad (1.3)$$

Кроме того, могут быть заданы длина тела  $x_1$  и размер  $y_1$ . Выражение для  $p$  и класс допустимых функций определяются после принятия конкретного закона сопротивления. Из физического смысла величин  $x$  и  $y$  следует, что функции (1.1) кусочно-гладкие.

2. Закон сопротивления Ньютона. По закону сопротивления Ньютона для  $0 \leq \sigma \leq \pi$  давление на поверхности тела определяется местным углом наклона контура

$$p = \rho V^2 \sin^2 \sigma = \rho V^2 (1 + x'^2)^{-1} \quad (2.1)$$

где  $\rho$  — плотность невозмущенного потока. Поэтому с точностью до не существенного постоянного положительного множителя

$$\chi = \int_{y_0}^{y_1} \frac{y^v}{1 + x'^2} dy \quad (2.2)$$

Определению оптимальных тел с применением (2.1) посвящены работы [13-24]. Для осесимметричных тел без протока наиболее полное исследование дано М. А. Лаврентьевым и Л. Л. Люстерником [14] и Эггером, Резниковым и Деннисом [15].

Класс допустимых функций определяется областью применимости формулы (2.1). Еще Лежандр [16] указал на абсурдность того, что, в соответствии с формулой (2.1), образование на поверхности тела глубоких выемок или острых пиков уменьшает сопротивление. Такой результат объясняется несоответствием картины течения в указанных случаях схеме, принятой при выводе (2.1). Последнее очевидно, если вспомнить сделанное при выводе предположение о том, что частицы газа достигают без торможения поверхности тела, где теряют только нормальную к ней составляющую импульса.

Для исключения из рассмотрения выемок и пиков, уменьшающих сопротивление только из-за несовершенства формулы (2.1), можно ограничить класс допустимых кривых условием

$$0 \leq \sigma \leq \pi / 2 \quad \text{или} \quad 0 \leq x' \leq \infty \quad (2.3)$$

По той же причине целесообразно исключить из рассмотрения кривые с положительными углами излома. Итак, класс допустимых функций состоит из кусочно-гладких кривых, выходящих из точки  $y = y_0$ ,  $x = 0$ , удовлетворяющих (2.3) и не имеющих положительных углов излома.

Уравнения экстремальных участков и условия стыковки различных участков находятся из необходимых условий экстремума. Участками краевого экстремума могут быть участки границ области (2.3)

$$x = \text{const}, \quad y = \text{const} \quad (2.4)$$

и кривые, определяемые постановкой задачи. Таковыми могут быть лишь прямые

$$x = 0, \quad x = x_1, \quad y = y_0, \quad y = y_1 \quad (2.5)$$

которые получаются, если кроме изопериметрических условий заданы размеры тела, и, как легко видеть, включаются в (2.4). Естественно, что оптимальные контуры содержат прямые (2.4) лишь тогда, когда допустимое варьирование последних ведет только к росту сопротивления.

Для решения задачи, составим функционал

$$I = \int_{y_0}^{y_1} \left[ \frac{y^v}{1 + x'^2} + (\lambda, f) \right] dy \quad (2.6)$$

где  $\lambda^1, \dots, \lambda^m$  — множители Лагранжа. Так как при допустимом варьировании вариация правой части (1.3) равна нулю, то все вариации  $I$  и  $\chi$  совпадают. Контур может иметь угловые точки; интервал интегриро-

вания разобьем на конечное число интервалов непрерывности  $x'$ . Значения величин в  $i$ -й точке излома обозначим индексом  $i$ , причем  $i = 2, 3, \dots$ , а индексы  $-$  и  $+$  припишем значениям функций до и после излома. Проводя варьирование и интегрирование по частям, найдем

$$\begin{aligned} \delta I = & \left[ \frac{y^v}{1+x'^2} + (\lambda, f) \right]_1 \Delta y_1 - \left[ \frac{2y^v x'}{(1+x'^2)^2} - (\lambda, f_{x'}) \right]_1 \delta x_1 + \\ & + \left[ y^v \left( \frac{1}{1+x'^2} - \frac{1}{1+x'^2} \right) + (\lambda, f_- - f_+) \right]_i \Delta y_i - \left[ \frac{2y^v x'}{(1+x'^2)^2} - (\lambda, f_{x'}) \right]_{i-} \delta x_{i-} + \\ & + \left[ \frac{2y^v x'}{(1+x'^2)^2} - (\lambda, f_{x'}) \right]_{i+} \delta x_{i+} + \int_{y_0}^{y_1} \left\{ (\lambda, f_x) + \frac{d}{dy} \left[ \frac{2y^v x'}{(1+x'^2)^2} - (\lambda, f_{x'}) \right] \right\} \delta x dy \end{aligned}$$

где;  $\Delta y_1$  и  $\Delta y_i$  — изменения ординат концевой и угловых точек; по повторяющимся индексам проводится суммирование по всем точкам излома; буквой  $\delta$  обозначены вариации. Можно показать, что в точках 1 и  $i$

$$\delta x = \Delta x - x' \delta y - \delta x' \Delta y - x'' (\Delta y)^2 / 2 + \dots \quad (2.7)$$

Здесь  $\Delta x$  — смещение абсциссы концевой или угловых точек, многообразием обозначены члены более высокого порядка малости. С учетом (2.7) получаем

$$\begin{aligned} \delta I = & \left[ y^v \frac{1+3x'^2}{(1+x'^2)^2} + (\lambda, f - x' f_{x'}) \right]_1 \Delta y_1 - \left[ \frac{2y^v x'}{(1+x'^2)^2} - (\lambda, f_{x'}) \right]_1 \Delta x_1 + \\ & + \left\{ y^v \left[ \frac{1+3x'^2}{(1+x'^2)^2} - \frac{1+3x'^2}{(1+x'^2)^2} \right] + (\lambda, f_- - x'_- f_{x'-} - f_+ + x'_+ f_{x'+}) \right\}_i \Delta y_i - \\ & - \left\{ 2y^v \left[ \frac{x'_-}{(1+x'^2)^2} - \frac{x'_+}{(1+x'^2)^2} \right] - (\lambda, f_{x'-} - f_{x'+}) \right\}_i \Delta x_i + \\ & + \int_{y_0}^{y_1} \left\{ (\lambda, f_x) + \frac{d}{dy} \left[ \frac{2y^v x'}{(1+x'^2)^2} - (\lambda, f_{x'}) \right] \right\} \delta x dy \end{aligned} \quad (2.8)$$

Используя это выражение, прежде всего найдем уравнения экстремалей и условия стыковки. Если экстремаль не совпадает с (2.4), то на ней  $\delta x$  произвольно. Следовательно, на таких участках необходимое условие экстремума (уравнение Эйлера) имеет вид

$$(\lambda, f_x) + \frac{d}{dy} \left[ \frac{2y^v x'}{(1+x'^2)^2} - (\lambda, f_{x'}) \right] = 0 \quad (2.9)$$

Для многих практически интересных изопериметрических условий  $f = f(y, x')$

$$f = f(y, x') \quad (2.10)$$

т. е.  $f_x \equiv 0$ . В таком случае уравнения экстремалей можно записать в конечной форме. Для этого введем обозначение  $q = x'$  и примем  $q$  за параметр. В силу (2.10) из (2.9) имеем

$$\frac{2y^v q}{(1+q^2)^2} - (\lambda, f_{x'}) = C \quad (C = \text{const}) \quad (2.11)$$

Здесь  $f_{x'}$  — функция  $y$  и  $q$ . Из (2.11) находим зависимость  $y = y(q)$  или  $q = q(y)$ , а затем

$$x = x(q) = \int q \frac{dy(q)}{dq} dq + C_1 \quad (2.12)$$

или

$$x = x(y) = \int q(y) dy + C_1 \quad (C_1 = \text{const}) \quad (2.13)$$

Уравнения (2.12), (2.13) для ряда конкретных случаев приведены в работах [10, 14, 15, 23].

Найдем условия сопряжения различных участков. Прежде всего возникает вопрос, имеет ли контур угловые точки, соединяющие экстремальные участки. Если имеет, то в них, ввиду произвольности  $\Delta y_i$  и  $\Delta x_i$ , одновременно

$$y^v \left[ \frac{1 + 3x_-'^2}{(1 + x_-'^2)^2} - \frac{1 + 3x_+'^2}{(1 + x_+'^2)^2} \right] + (\lambda, f_- - x_-' f_{x_-}' - f_+ + x_+' f_{x_+}') = 0$$

$$2y^v \left[ \frac{x_-'}{(1 + x_-'^2)^2} - \frac{x_+'}{(1 + x_+'^2)^2} \right] - (\lambda, f_{x_-}' - f_{x_+}') = 0$$

Пусть  $y, x, x'$  — произвольная точка экстремали. Обозначим  $x'$  через  $x_-'$ . Для наличия излома рассматриваемого типа необходимо существование корня этих уравнений  $x_+' > x_-'$ . Окончательное выяснение этого должно проводиться для конкретных функций  $f$ . Однако в силу независимости приведенных уравнений нетривиальные корни, если и есть, то лишь в весьма специальных примерах. В точках же сопряжения экстремалей с прямыми  $x = 0$  и  $y = y_1$  (другие прямые (2.4) исключаются ввиду отсутствия положительных углов излома) требуется выполнение лишь одного из приведенных уравнений. В точке сопряжения с прямой  $x = 0$ , когда  $i = 2$ , величина  $\Delta y_2$  — произвольна, а  $\Delta x_2 \geq 0$ . Поэтому

$$y_2^v \left[ 1 - \frac{1 + 3x_+'^2}{(1 + x_+'^2)^2} \right]_2 + (\lambda, f_- - f_+ + x_+' f_{x_+}')_{y=y_2, x=x_-'=0} = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{2y_2^v x_+'}{(1 + x_+'^2)^2} + (\lambda, f_{x_-}' - f_{x_+}')_{y=y_2, x=x_-'=0} \geq 0 \quad (2.15)$$

Здесь первое уравнение (условие Вейрштрасса — Эрдмана) — необходимое условие экстремума, а второе — необходимое условие минимума. Кроме того, так как на отрезке  $x = 0$  величина  $\delta x \geq 0$ , то еще одним необходимым условием минимума будет

$$\left[ (\lambda, f_x) - \frac{d}{dy} (\lambda, f_{x'}) \right]_{x \equiv x' \equiv 0} \geq 0 \quad (y_0 \leq y \leq y_2) \quad (2.16)$$

Аналогичные рассуждения для точки  $i = 3$  — точки сопряжения экстремали с прямой  $y = y_1$ , где  $\Delta x_3$  — произвольно, а  $\Delta y_3$  и  $\delta y \leq 0$  (при варьировании участка  $y = y_1$  независимая переменная —  $x$ ) приводят к необходимому условию экстремума ( $x_+' = \infty$ )

$$\frac{2y_1^v x_3-'}{(1 + x_3-'^2)^2} - (\lambda, f_{x_-}' - f_{x_+}')_{y=y_1, x=x_3, x_+'=\infty} = 0 \quad (2.17)$$

и к необходимым условиям минимума

$$y_1^v \frac{1 + 3x_3-'^2}{(1 + x_3-'^2)^2} + (\lambda, f_- - x_-' f_{x_-}' - f_+ + x_+' f_{x_+}')_{y=y_1, x=x_3, x_+'=\infty} \leq 0 \quad (2.18)$$

$$\left[ \frac{(\lambda, f_y)}{x'} - \frac{d}{dx} (\lambda, f - x' f_{x'}) \right]_{y \equiv y_1, x' \equiv \infty} \leq 0 \quad (x_3 \leq x \leq x_1) \quad (2.19)$$

Выражение (2.8) дает и концевые условия. При свободной длине

$$\frac{2y_1 v x_1'}{(1 + x_1'^2)^2} - (\lambda, f_{x'})_1 = 0 \quad (\Delta x_1 \neq 0) \quad (2.20)$$

и при свободной концевой ординате

$$y_1 v \frac{1 + 3x_1'^2}{(1 + x_1'^2)^2} + (\lambda, f - x' f_{x'})_1 = 0 \quad (\Delta y_1 \neq 0) \quad (2.21)$$

Непосредственный расчет показывает, что число условий равно числу произволов. Таким образом, контур тела минимального сопротивления может быть построен. В общем случае он может содержать торец, экстремаль и прямую  $y = y_1$ . Чтобы построенный контур был оптимальным, помимо необходимых условий минимума на граничных участках (2.15), (2.16), (2.18) и (2.19) должны выполняться аналогичные условия для экстремалей. Для получения таких условий вычислим вторую вариацию  $\delta^2 I$ , причем будем иметь в виду, что нужно учитывать лишь вариации, соответствующие двустороннему экстремуму (для краевых вариаций отличны от нуля уже соответствующие слагаемые в  $\delta I$ ). Кроме того, ограничимся случаем (2.10). Выражение второй вариации функционала

$$J = \int_{y_0}^{y_1} F(y, x') dy$$

если  $x \equiv 0$ , при  $y_0 \leq y \leq y_2$ , имеет вид

$$\delta^2 J = \int_{y_2}^{y_1} F_{x'x'} (\delta x')^2 dy + \frac{1}{2} (F_{y-} - F_{y+})_2 (\Delta y_2)^2 + \frac{1}{2} F_{y1} (\Delta y_1)^2 \quad (2.22)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае для минимума сопротивления необходимо, чтобы на экстремали ( $y_2 \leq y \leq y_1, 0 \leq x \leq x_3$ )

$$\frac{2y v (3x'^2 - 1)}{(1 + x'^2)^3} + (\lambda, f_{x'x'}) \geq 0 \quad (2.23)$$

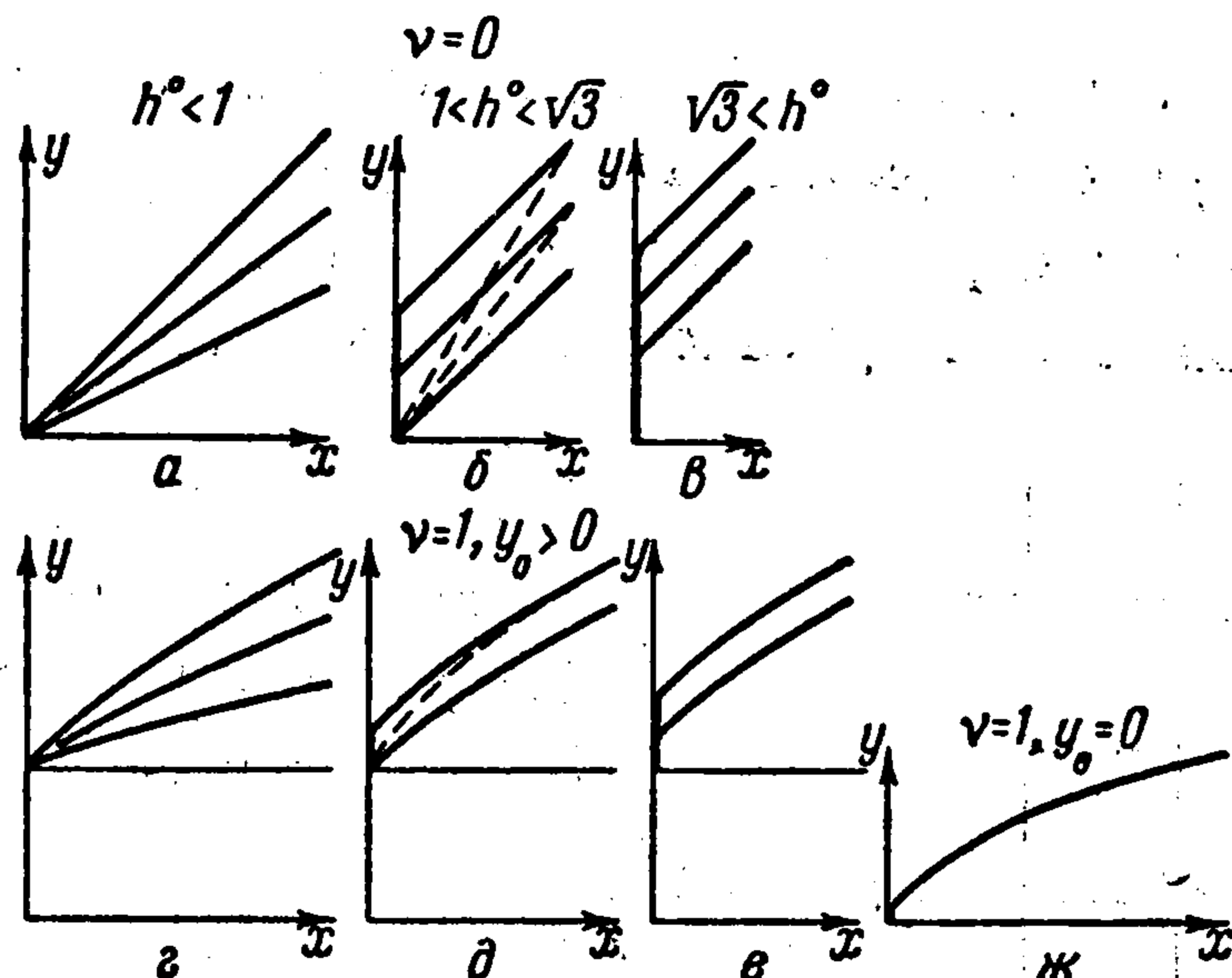
в точке 2 (2.24)

$$\frac{v x_{2+}'^2}{1 + x_{2+}'^2} + (\lambda, f_{y-} - f_{y+})_{2, x' = 0} \geq 0$$

и при свободной ординате  $y_1$  ( $\Delta y_1 \neq 0$ ) — в точке 1

$$v (1 + x_1'^2)^{-1} + (\lambda, f_y)_1 \geq 0 \quad (2.25)$$

В курсах вариационного исчисления показывается, что первое из этих неравенств (условие Лежандра) будет необходимым условием минимума и в общем случае. Наконец заметим, что необходимые условия минимума становятся и достаточными, если в (2.15), (2.18), и (2.23) — (2.25) имеют место строгие неравенства. Решение вариационной задачи может дать несколько относительных минимумов. В этом случае необходимо проводить сравнение по величине сопротивления.



Фиг. 1

В качестве примера найдем оптимальные контуры в случае задания размеров тела. Можно показать, что оптимальный контур состоит не более чем из двух участков: экстремали и торца (торец может отсутствовать). Из уравнения (2.11) следует, что в плоском случае экстремали являются прямые линии, а в осесимметричном — выпуклые кривые (см., например, [10] или [14]). В соответствии с условием (2.23) минимуму отвечают лишь экстремали или их участки с  $x' \geq 3^{-1/2}$ . Условие сопряжения (2.14) дает  $x_+' = 1$ , т. е.  $\sigma_+ = \pi/4$ , вне зависимости от  $v$ . Все многообразие решений показано на фиг. 1, где  $h^\circ = y_1^\circ - y_0^\circ$ ,  $y_0^\circ = y_0/x_1$ ,  $y_1^\circ = y_1/x_1$ . Новыми будут контуры с торцом для плоских тел и осесимметричных тел с протоком. Отметим интересную особенность. Для оптимальных тел без торца  $h^\circ = h^\circ(x_0', y_0^\circ)$ . Для  $h^\circ(1, y_0^\circ) \leq h^\circ \leq h^\circ(3^{-1/2}, y_0^\circ)$  имеются два решения — с торцом и без него (пунктир на фиг. 1), удовлетворяющих всем необходимым условиям. Однако меньшим сопротивлением обладают тела с торцом. Области,  $\varepsilon$ ,  $\delta$ ,  $e$  различных решений для тел с протоком показаны на фиг. 2. Всем телам с протоком соответствуют точки графика, лежащие под прямой  $y_0^\circ = y_1^\circ$ . Прямые  $y_0^\circ = y_1^\circ - 1$  и  $y_0^\circ = y_1^\circ - \sqrt{3}$ , обозначенные цифрами 1 и 2, — асимптоты кривых, разграничивающих области  $\varepsilon$  и  $\delta$  и  $\delta$  и  $e$ , соответственно. Отметим также, что при допущении положительных углов излома в плоском случае при  $h^\circ > 1$  к контуру фиг. 1 добавилось бы бесчисленное множество оптимальных контуров, состоящих из произвольных комбинаций вертикальных отрезков и отрезков прямых с  $x' = 1$ . Однако сопротивления всех таких контуров одинаковы и равны сопротивлению тела фиг. 1.

**3. Закон сопротивления Буземана.** По закону сопротивления Буземана для  $0 \leq \sigma \leq \pi$  давление на поверхности тела определяется только его формой

$$p = \rho V^2 \left( \sin^2 \sigma + y^{-v} \frac{d\sigma}{dy} \sin \sigma \int_{y_0}^y y^v \cos \sigma dy \right) \quad (3.1)$$

Отсюда с точностью до постоянного положительного множителя

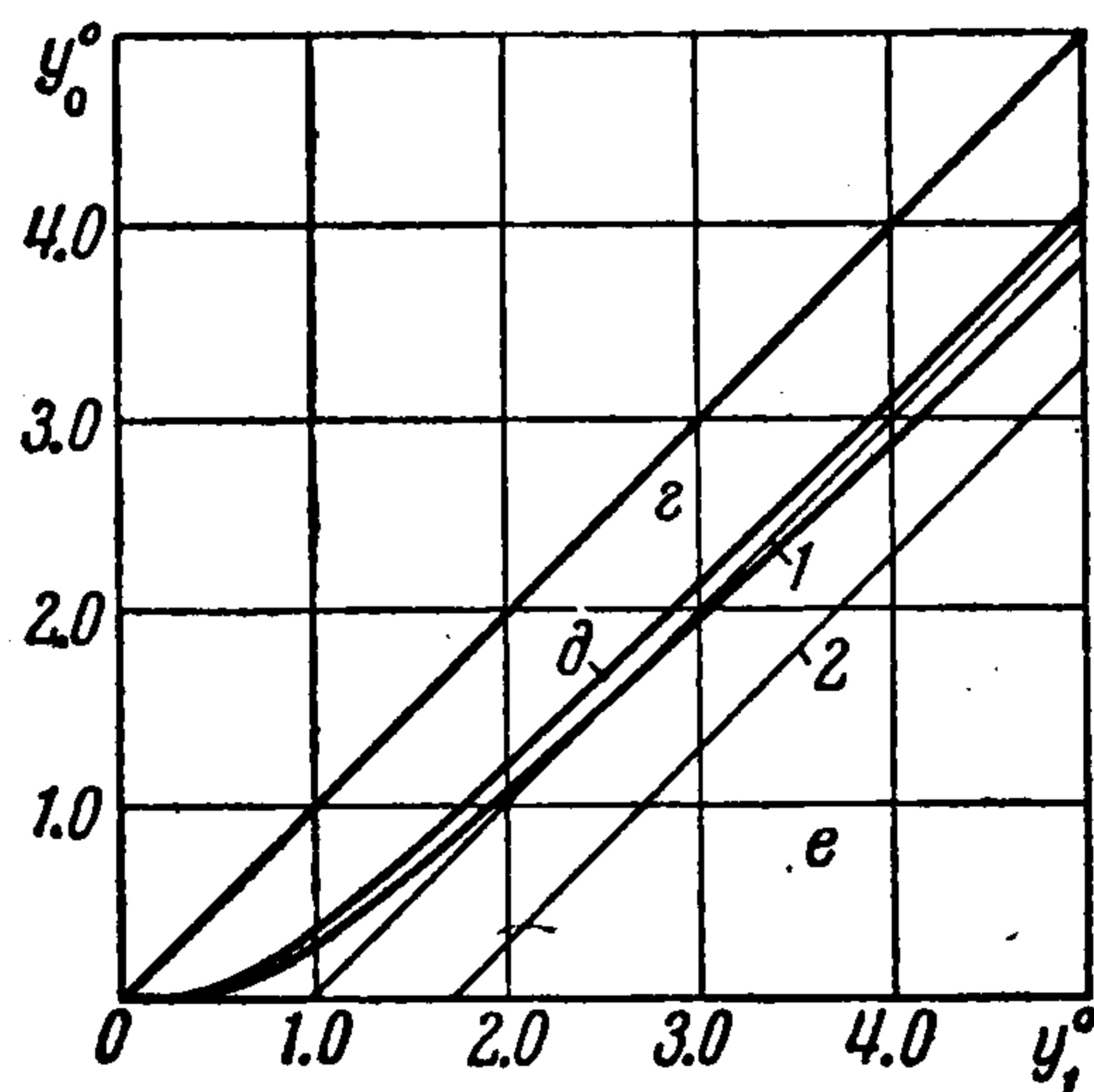
$$\chi = \frac{y_1^{v+1} - y_0^{v+1}}{v+1} - \cos \sigma_1 \int_{y_0}^{y_1} y^v \cos \sigma dy$$

Определим класс допустимых функций. По той же причине, что и в случае формулы Ньютона, остается ограничение (2.3). Однако есть и новые ограничения. По формуле (3.1) давление может быть отрицательным на выпуклых телах, что лишено физического смысла и связано с несовершенством формулы Буземана. Необходимость учета этого при решении вариационных задач была указана Хейзом [11]. Итак, класс допустимых контуров ограничен еще и условием

$$p \geq 0 \quad (3.2)$$

Наконец, так как давление не может обращаться в бесконечность, то из рассмотрения исключаются все точки излома, кроме точки стыковки переднего торца с остальной частью контура (здесь  $\sigma \equiv \pi/2$  и второе слагаемое в (3.1) равно нулю). Таким образом,

класс допустимых контуров состоит из кривых, которые выходят из точки  $y = y_0$ ,  $x = 0$ , содержат один или два гладких отрезка (во втором



Фиг. 2

случае первый отрезок — часть прямой  $x = 0$ ) и удовлетворяют условиям (2.3) и (3.2).

Участками краевого экстремума могут быть отрезки прямых (2.4) и (2.5) и кривой  $p = 0$ . Уравнение такой кривой записывается в замкнутой форме и впервые получено Лайтхиллом [26]. В общем случае оно выводится тем же путем, что и в [11], и имеет вид

$$x = x_3 + \frac{y^{v+2} - (v+2)(y_0^{v+1} + \chi_3)y - y_3^{v+2} + (v+2)(y_0^{v+1} + \chi_3)y_3}{(v+1)(v+2)N \sin \sigma_3} \quad (3.3)$$

$$\left( N = \int_{y_0}^{y_3} y^v \cos \sigma dy \right)$$

Здесь индексом 3 обозначены величины в начальной точке поверхности  $p = 0$ . Можно показать, что на кривых (3.3) будем иметь  $\sigma \geq 0$  и  $d\sigma / dy \leq 0$  (равенства имеют место при  $y = \infty$ ). Исключение составляют поверхности  $p = 0$ , проведенные из точек 0 или 2 (где  $N = 0$ ), уравнения которых  $y = \text{const}$ .

Прежде, чем переходить к решению, полезно выяснить порядок расположения различных участков. Отрезок  $y = y_1$  может быть только замыкающим участком контура и то лишь, если на экстремали  $\sigma = 0$  при  $y = y_1$ . Этот случай будет рассмотрен особо. Начальный участок контура может состоять из торца ( $x = 0, y_0 \leq y \leq y_2$ ) и экстремали. Для выяснения порядка чередования экстремалей и линий  $p = 0$  требуются специальные исследования. При заданных размерах тела Хейз [11] на основе не совсем строгих рассуждений показал, что замыкающий участок должен быть участком нулевого давления. Строгое доказательство этого позднее дано А. Л. Гонором [25]. Для тонких тел доказательство этого, а также отсутствия внутренних участков  $p = 0$  проведено Миеле [12] и для ряда других изопериметрических условий. В настоящей работе вопрос о количестве участков нулевого давления не исследуется. Вопрос же о замыкающем участке исследован в общем случае.

Если точка 3 — концевая точка последней экстремали, то

$$\chi = \frac{y_3^{v+1} - y_0^{v+1}}{v+1} - \cos \sigma_3 \int_{y_0}^{y_3} y^v \cos \sigma dy$$

причем точки 3 и 1 могут совпадать. Как и ранее, составим функционал

$$I = \frac{y_3^{v+1} - y_0^{v+1}}{v+1} - \cos \sigma_3 \int_{y_0}^{y_3} y^v \cos \sigma dy + \int_{y_0}^{y_1} (\Lambda, f) dy \quad (3.4)$$

Здесь  $\Lambda^1, \dots, \Lambda^m$  — множители Лагранжа. Главное отличие этой формулы от (2.6) состоит в присутствии перед функционалом множителя, содержащего  $x_3'$ . Поэтому в выражении для  $\delta I$  появится член с  $\Delta x_3'$  (буквой  $\Delta$  по-прежнему обозначаются разности значений в проварьированной и в исходной точках стыковки). Удобно провести следующее построение. Из проварьированной точки 3 проведем кривую (3.3) до пересечения с прямой  $y = y_3$ . Разность величин  $x'$  в этой точке и в исходной точке 3 обозначим через  $\delta^\circ x_3'$ . Тогда

$$\Delta x_3' = \delta^\circ x_3' + x_3'' \Delta y_3 = \delta^\circ x_3' + \frac{y_3^v}{N \sin \sigma_3} \Delta y_3 \quad (3.5)$$

где  $x_3'$  определено из (3.3).

Варьируя функционал (3.4) с учетом (2.8) и (3.5), получим

$$\begin{aligned} \delta I = & (\Lambda, f - x'f_{x'})_1 \Delta y_1 + (\Lambda, f_{x'})_1 \Delta x_1 - y_3^v \cos \sigma_3 \sin^3 \sigma_3 \delta x_3 - \\ & - N \sin^3 \sigma_3 \delta^\circ x_3' - [y^v \cos \sigma_3 (1 - \sin^3 \sigma_+) - (\Lambda, f_{x'_-} - f_{x'_+})]_2 \Delta x_2 + \\ & + [y^v \cos \sigma_3 \cos^3 \sigma_+ + (\Lambda, f_- - f_+ + x'_+ f_{x'_+})]_2 \Delta y_2 + \quad (3.6) \\ & + \int_{y_0}^{y_3} \left\{ (\Lambda, f_x) + \frac{d}{dy} [y^v \cos \sigma_3 \sin^3 \sigma - (\Lambda, f_{x'})] \right\} \delta x dy + \int_{y_3}^{y_1} \left( \Lambda, f_x - \frac{d}{dy} f_{x'} \right) \delta x dy \end{aligned}$$

Отсюда найдем уравнение экстремалей

$$(\lambda, f_x) + \frac{d}{dy} [y^v \sin^3 \sigma - (\lambda, f_{x'})] = 0 \quad \left( \lambda = \frac{\Lambda}{\cos \sigma_3} \right) \quad (3.7)$$

и условие сопряжения в точке 2

$$y_2^v \cos^3 \sigma_{2+} + (\lambda, f_- - f_+ + x'_+ f_{x'_+})_{2, x=x'_-=0} = 0 \quad (3.8)$$

Здесь  $\lambda$  — новые множители Лагранжа; при  $\cos \sigma_3 = 0$  здесь и во всех дальнейших уравнениях надо отбросить члены, не содержащие  $\lambda$ .

Уравнения (3.7) и (3.8) — необходимые условия экстремума. Для закона сопротивления Ньютона требование неотрицательности слагаемого, содержащего  $\Delta x_2$ , давало одно из необходимых условий краевого минимума. Здесь же это слагаемое тождественно равно нулю. Действительно, если  $x'_+ = x'_-$ , то исчезает коэффициент перед  $\Delta x_2$ . При этом необходимое условие краевого минимума на торце имеет вид (при  $y_0 \leq y \leq y_2$  допустимые  $\delta x \geq 0$ )

$$\left\{ (\lambda, f_x) + \frac{d}{dy} [y^v - (\lambda, f_{x'})] \right\}_{x=x'_=0} \geq 0 \quad (y_0 \leq y \leq y_2) \quad (3.9)$$

При наличии же излома указанное слагаемое исчезает из-за равенства нулю допустимых  $\Delta x_2$ . Так как это справедливо и в отношении  $\delta x$ , то при изломе выполнения неравенства (3.9) не требуется.

Пусть концевой участок оптимального тела — экстремаль (точки 3 и 1 совпадают). Проварьируем этот участок, но так, чтобы  $\Delta y_1 = \Delta x_1 = \delta x_1 = 0$ . Из уравнений (3.6) и (3.7)

$$\delta I = -N \sin^3 \sigma_1 \delta^\circ x_1' \quad (3.10)$$

Если  $p_1 > 0$  и  $\sigma_1 > 0$ , то  $\delta^\circ x_1'$  — произвольно, и  $\chi \equiv I$  может быть изменено в любую сторону, что противоречит предположению об оптимальности контура. Следовательно, если решение с замыкающим экстремальным участком дает  $p_1 > 0$  и  $\sigma_1 > 0$ , то оптимальный контур оканчивается участком  $p = 0$ .

Случай  $\sigma_1 = 0$  и  $\sigma_1 > 0$ ,  $p_1 = 0$  исследуются обычным образом и дают следующие концевые условия:

$$y_1^v \sin^3 \sigma_1 - (\lambda, f_{x'})_1 = 0 \quad \text{при } \Delta x_1 \neq 0 \quad (3.11)$$

$$y_1^v \sin^2 \sigma_1 \cos \sigma_1 + (\lambda, f - x'f_{x'})_1 = 0 \quad \text{при } \Delta y_1 \neq 0 \quad (3.12)$$

Заметим, что при  $\sigma_1 > 0$  и  $p_1 = 0$ , в соответствии с формулой (3.1) имеем  $\delta^\circ x_1' \leq 0$ , т. е. по  $\delta^\circ x_1'$  реализуется крайовой экстремум.

Для получения необходимых условий экстремума в точках 3 и 1 в общем случае ( $y_1 > y_3$ ) достаточно проварьируемые контуры брать

из класса кривых с замыкающим участком  $p = 0$ . Тогда, согласно (3.3)

$$\delta x_3 = \Delta x_1 - x_1' \Delta y_1 - \frac{x_1 - x_3}{x_3'} \delta^\circ x_3' - \frac{x_1 - x_3 + (y_3 - y_1) x_3'}{N \cos \sigma_3} \delta \chi$$

а на отрезке 31

$$\delta x = \delta x_3 + \frac{x - x_3}{x_3'} \delta^\circ x_3' + \frac{x - x_3 + (y_3 - y) x_3'}{N \cos \sigma_3} \delta \chi$$

Подставляя эти выражения в (3.6), фиксируя участок 02 и учитывая условие (3.7) и то, что для оптимального контура  $\delta \chi = 0$ , получим

$$\begin{aligned} \delta I = & [(y_3^v \sin^3 \sigma_3 - a) x_1' + (\lambda, f - x' f_{x'})_1] \cos \sigma_3 \Delta y_1 + \\ & + [a - y_3^v \sin^3 \sigma_3 + (\lambda, f_{x'})_1] \cos \sigma_3 \Delta x_1 + [b - N \sin^2 \sigma_3 - \\ & - (x_1 - x_3) (a - y_3^v \sin^3 \sigma_3)] \sin \sigma_3 \delta^\circ x_3' \end{aligned}$$

где вариации  $\Delta y_1$ ,  $\Delta x_1$  и  $\delta^\circ x_3'$  независимы, и

$$a = \int_{y_3}^{y_1} \left( \lambda, f_x - \frac{d}{dy} f_{x'} \right) dy, \quad b = \int_{y_3}^{y_1} (x - x_3) \left( \lambda, f_x - \frac{d}{dy} f_{x'} \right) dy$$

Приравнявая  $\delta I$  нулю, найдем условие сопряжения в точке 3

$$b - N \sin^2 \sigma_3 - (x_1 - x_3) (a - y_3^v \sin^3 \sigma_3) = 0 \quad (3.13)$$

и концевые условия

$$a - y_3^v \sin^3 \sigma_3 + (\lambda, f_{x'})_1 = 0 \quad \text{при } \Delta x_1 \neq 0 \quad (3.14)$$

$$(y_3^v \sin^3 \sigma_3 - a) x_1' + (\lambda, f - x' f_{x'})_1 = 0 \quad \text{при } \Delta y_1 \neq 0 \quad (3.15)$$

Заметим, что уравнения (3.11) и (3.12) будут частными случаями двух последних уравнений при  $y_3 = y_1$ . Полученные уравнения определяют контур тела, а также координаты точки 3.

При выполнении условия (2.10) уравнения значительно упрощаются, в частности, как и при использовании формулы Ньютона, уравнения экстремалей могут быть записаны в параметрической форме. Упрощаются и уравнения (3.13)–(3.15)

$$\begin{aligned} (\lambda, c - (x_1 - x) f_{x'})_3 - N \sin^2 \sigma_3 + (x_1 - x_3) y_3^v \sin^3 \sigma_3 = 0 \quad \left( c = \int_{y_3}^{y_1} x' f_{x'} dy \right) \\ (\lambda, f_{x'})_3 - y_3^v \sin^3 \sigma_3 = 0 \quad \text{при } \Delta x_1 \neq 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$y_3^v x_1' \sin^3 \sigma_3 + (\lambda, f_1 - x_1' f_{x'})_3 = 0 \quad \text{при } \Delta y_1 \neq 0 \quad (3.18)$$

Найдем необходимые условия минимума для участка контура  $y = y_1$  и для экстремалей. Первое условие находится из соответствующего выражения для  $\delta I$  и совпадает с (2.19). При выводе остальных условий рассмотрим только случай (2.10), причем ограничимся вариациями ординаты точки 2 и участка экстремали 23. Используя формулу (2.22), получим

$$\begin{aligned} \delta^2 I = & \frac{1}{2} [v \cos \sigma_+ + (\lambda, f_{y-} - f_{y+})]_2 (\Delta y_2)^2 + \\ & + \int_{y_2}^{y_3} [3y^v \cos \sigma \sin^4 \sigma + (\lambda, f_{x''})] (\delta x')^2 dy \end{aligned}$$

Следовательно, необходимые условия минимума есть

$$\nu \cos \sigma_{2+} + (\lambda, f_{y-} - f_{y+})_2 \geq 0 \quad (3.19)$$

$$3y^v \cos \sigma \sin^4 \sigma + (\lambda, f_{x'x'}) \geq 0 \quad \text{при } y_2 \leq y \leq y_3 \quad (3.20)$$

При строгих неравенствах условия (3.19), (3.20), (2.19) и (3.9) (последнее только при отсутствии излома) становятся не только необходимыми, но и достаточными условиями минимума сопротивления.

При вычислении  $\chi$  и  $I$  для удобства исследования учитывалось, что поскольку на замыкающем участке  $31$  давление равно нулю, то сопротивление всего тела совпадает с сопротивлением начального участка  $03$ . При этом, однако, остаются неясными два вопроса. Во-первых, как изменяется сопротивление замыкающего участка при варьировании начального и, во-вторых, как варьирование замыкающего участка меняет общее сопротивление. Не вникая в подробности, укажем только, что, если участок  $03$  оптимальный, то в обоих случаях любое допустимое варьирование увеличивает общее сопротивление. Для доказательства этого следует воспользоваться тем, что величина  $N$  входит с коэффициентами одного знака и в выражение (3.1) для давления на замыкающем участке (здесь  $d\sigma/dy < 0$ ) и в выражение для  $\chi$ .

В предыдущем разделе приведены оптимальные контуры, полученные при заданных размерах тела с использованием закона сопротивления Ньютона. Для сравнения проведем аналогичное исследование в случае формулы Буземана. Отметим, однако, что основные результаты по этому вопросу получены ранее в работах [11, 24, 25]. Оказывается, что оптимальный контур состоит не более чем из трех участков: торца, экстремали и кривой нулевого давления, — расположенных в порядке перечисления. Из уравнения (3.7) следует, что в плоском случае экстремали — прямые линии, а в осесимметричном случае — выпуклые кривые (см., например, [11, 24]). В соответствии с условием (3.20) минимум реализуют все экстремали с  $x' \geq 0$ . Условие сопряжения (3.8) приводит к отсутствию излома в точке сопряжения торца и экстремали. Поэтому в плоском случае оптимальный контур не содержит торца. Контур осесимметричных тел без протока состоит из трех участков: торца, экстремали и отрезка кривой нулевого давления. Тела же с протоком могут быть и с торцом и без него — применимость каждой конфигурации определяется сравнением величин  $\chi$ . Из условия (3.16) следует, что  $x_3 = 0,5 x_1$  для плоских тел [11] и  $x_3 \geq 0,6 x_1$  для осесимметричных тел, без протока [11, 25].

В заключение сделаем несколько замечаний об определении оптимальных тел в точной постановке. Хотя при этом отпадают ограничения (2.3) и (3.2), связанные с несовершенством формул для сопротивления, однако ограничения связанные с постановкой задачи, остаются. При заданных размерах это приводит к прямым (2.4), которые могут оказаться участками краевого экстремума. Поэтому можно попытаться построить оптимальный контур, предполагая, что он состоит, например, из отрезков экстремали и торца. При этом нужно, во-первых, уметь определить экстремальный участок при заданных размерах торца. Эта часть задачи решена в работах [2, 3]. Затем нужно выбрать такой размер торца, что его увеличение или уменьшение приводит к увеличению сопротивления. Такой выбор может быть осуществлен, например, численным сравнением величин  $\chi$  тел, состоящих из торца и экстремального участка, но при различных размерах торца. Однако, если даже такой размер торца будет найден, это еще не означает, что построенный контур является оптимальным. Необходимо, чтобы участок торца был участком краевого экстремума. Выяснение этого обстоятельства является главной трудностью, пути преодоления которой пока остаются неясными.

Автор признателен Ю. Д. Шмыглевскому за обсуждение работы.

Поступила 30 I 1963

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шмыглевский Ю. Д. Об одном классе тел вращения с минимальным волновым сопротивлением. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 5, стр. 923.
2. Guderley K. G., Armitage, J. V., Valentine E. M., Nose and inlet shapes of minimum drag in supersonic flow. IAS Paper, 1962, № 116.
3. Борисов В. М. Об оптимальной форме тел в сверхзвуковом потоке газа. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 4.
4. Шмыглевский Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики. Вычислительный центр АН СССР, 1963.
5. Никольский А. А. О телах вращения с протоком, обладающих наименьшим волновым сопротивлением в сверхзвуковом потоке. Сб. теор. работ по аэродинамике. Оборонгиз, 1957, стр. 56.
6. Von Kármán Th. The problem of resistance in compressible fluids. R. Accad. d'Italia, Cl. Sci. Fis., Mat. e. Nat., 1936, vol. XIV.
7. Parker H. M. Minimum drag ducted and pointed bodies of revolution based on linearized supersonic theory. NASA, Report 1213, 1955.
8. Heaslet M. A., Fuller F. B. Axially symmetric shapes with minimum wave drag. NASA, Report 1256, 1956.
9. Harder K. G., Renneman C. On boattail bodies of revolution having minimum wave drag. NASA, Report 1271, 1956.
10. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, 1959.
11. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. Изд. иностр. лит., 1962.
12. Miele A. A study of slender shapes of minimum drag using the Newton-Buseman pressure coefficient law. Paper presented at the IAS ann. meet, January 1962.
13. Newton Isaak, Principia-Motte's translation revised. Univ. of California Press, Berkeley, California 1947, 333, 657—661.
14. Лаврентьев М., Люстерник Л. Основы вариационного исчисления. Т. 1. ч. II, ОНТИ, НКТП, 1935, стр. 238.
15. Eggers A. J., Resnikoff M. M., Dennis D. H. Bodies of revolution having minimum drag at high supersonic airspeeds. NASA, Report 1306, 1957.
16. Forsyth A. R. Calculus of variations. Cambridge Univ. Press, 1927, 320.
17. Гроздовский Г. Л. Некоторые особенности обтекания тел при больших сверхзвуковых скоростях. Изв. АН СССР. Отд. техн. н., 1957, № 6, стр. 86.
18. Carter W. J. Optimum nose shapes for missiles in the superaerodynamic region. J. Aeronaut. Sci., 1957, vol. 24, № 7, 527. Русск. пер. в сб. [27], стр. 315.
19. Gan H. S. On optimum nose curves for missiles in the superaerodynamic regime. J. Aeronaut. Sci., 1958, vol. 25, № 1, 56. Русск. пер. в сб. [27], стр. 340.
20. Chang I. D. On optimum nose shapes for missiles in superaerodynamic region. J. Aeronaut. Sci., 1958, vol. 25, № 1, 57. Русск. пер. в сб. [27], стр. 337.
21. Dennis D. H. On optimum nose shapes for missiles in the superaerodynamic region. J. Aeronaut. Sci., 1958, vol. 25, № 3, 216. Русск. пер. в сб. [27], стр. 335.
22. Gan H. S. On optimum nose curves for superaerodynamic missiles. J. Aeronaut. Sci., 1958, vol. 25, № 4, 263. Русск. пер. в сб. [27], стр. 332.
23. Larme E. Nose shape for minimum drag in hypersonic flow. J. Aeronaut Space/Sci., 1962, vol. 29, № 1, 98.
24. Гонор А. Л., Черный Г. Г. О телах наименьшего сопротивления при больших сверхзвуковых скоростях. Изв. АН СССР. Отд. техн. н., 1957, № 7, стр. 89.
25. Гонор А. Л. Определение формы тел минимального сопротивления при больших сверхзвуковых скоростях. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 6, стр. 1073.
26. Lighthill M. J., Dynamics of a dissociating gas, p. I. J. Fluid Mech, 1957, vol. 2, p. 1. Русск. пер. в сб.: Вопросы ракетной техники. Изд. иностр. лит., 1957, № 5, 6.
27. Проблемы движения головной части ракет дальнего действия. Сб. под ред. Е. В. Самуйлова и Э. Э. Шпильрайна. Изд. иностр. лит., 1959.