

О ДВИЖЕНИИ СПУТНИКА ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРАВИТАЦИОННЫХ МОМЕНТОВ

Ф. Л. Черноусько

(Москва)

При движении спутника по орбите, достаточно удаленной от поверхности Земли, главное воздействие на него оказывают гравитационные силы и моменты. Исследованию движения спутника относительно центра масс под действием моментов гравитационных сил посвящен ряд работ В. В. Белецкого, В. А. Сарычева [1-4] и др. В работах [1, 3] В. В. Белецкий исследовал случай, когда кинетическая энергия движения относительно центра масс много больше работы моментов внешних сил, спутник обладает динамической симметрией, а орбита — круговая или почти круговая. Движение спутника при этом сводится к регулярной прецессии вокруг вектора кинетического момента и к медленной прецессии самого вектора кинетического момента.

Ниже рассмотрены два случая относительного движения спутника под действием гравитационных моментов, когда наличие малого параметра позволяет применить метод осреднения и получить асимптотические решения. Дается оценка точности этих решений.

В первом случае значения трех главных центральных моментов инерции спутника предполагаются близкими, хотя и различными; эксцентриситет орбиты и угловая скорость вращения спутника произвольны. Невозмущенное движение представляет собой равномерное вращение вокруг неподвижной оси. Найдены перемещения этой оси в пространстве и относительно тела.

Во втором случае, как и в работах [1, 3], кинетическая энергия относительного движения считается большой по сравнению с работой гравитационных моментов, но на эксцентриситет орбиты и на моменты инерции ограничений не накладывается. Движение спутника складывается из движения Эйлера-Пуансо вокруг вектора кинетического момента и движения самого вектора кинетического момента. Этот вектор совершает прецессионное движение, на которое накладываются более тонкие эффекты: колебания углов собственной нутации и прецессии. Полученные здесь результаты обобщают соответствующие формулы В. В. Белецкого [1].

1. Рассмотрим движение твердого тела (спутника) в центральном гравитационном поле. С точностью до величин порядка квадрата отношения линейных размеров спутника к размерам орбиты можно считать, что движение спутника относительно центра масс не влияет на движение самого центра масс.

Центр масс движется по кеплеровскому эллипсу с эксцентриситетом e и периодом обращения T_0 . Зависимость истинной аномалии ν от времени t дается соотношением

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\omega_0 (1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} \quad \left(\nu(t + T_0) = \nu(t) + 2\pi, \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \right) \quad (1.1)$$

Введем три правых декартовых системы координат, начало которых совместим с центром инерции спутника.

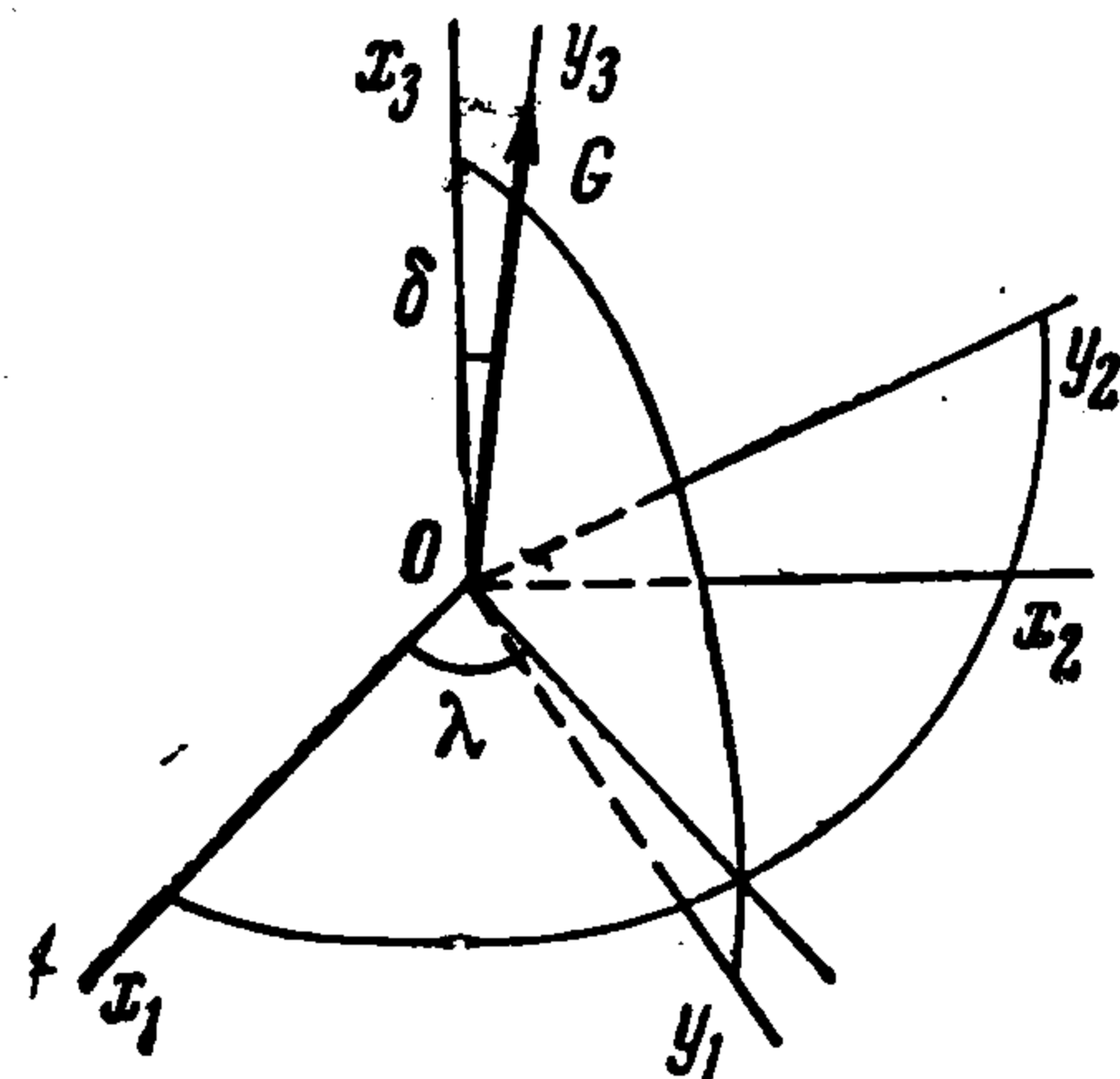
Система координат $x_1x_2x_3$ движется поступательно вместе с центром инерции; ось x_1 параллельна радиусу-вектору перигея орбиты, ось x_2 — вектору скорости центра масс спутника в перигее, ось x_3 — нормали к плоскости орбиты.

Ось y_3 системы $y_1y_2y_3$ направим по вектору кинетического момента G спутника относительно центра инерции, ось y_1 перпендикулярна y_3 и лежит в плоскости x_2y_3 , а y_2 перпендикулярна y_1 и y_3 и, следовательно, лежит в плоскости орбиты x_1x_2 (фиг. 1). Переход от орбитальной системы координат $x_1x_2x_3$ к системе $y_1y_2y_3$ осуществляется двумя поворотами: на угол λ вокруг x_3 и на угол δ вокруг y_2 . Углы λ и δ определяют ориентацию вектора G в неподвижном пространстве.

Оси связанной системы координат $z_1z_2z_3$ совместим с главными центральными осями инерции спутника. Их ориентацию относительно системы координат $y_1y_2y_3$ будем определять углами Эйлера θ, φ, ψ , а также направляющими косинусами $\alpha_{ik} = y_i z_k$.

Орты осей координат обозначаются теми же буквами, что и сами оси. Приведем еще соотношения между направляющими косинусами и эйлеровыми углами

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi \\ \alpha_{12} &= -\sin \varphi \cos \psi - \cos \theta \cos \varphi \sin \psi \\ \alpha_{13} &= \sin \theta \sin \psi, & \alpha_{21} &= \cos \varphi \sin \psi + \cos \theta \sin \varphi \cos \psi \\ \alpha_{22} &= -\sin \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi, \\ \alpha_{23} &= -\sin \theta \cos \psi \\ \alpha_{31} &= \sin \theta \sin \varphi, & \alpha_{32} &= \sin \theta \cos \varphi, & \alpha_{33} &= \cos \theta \end{aligned} \quad (1.2)$$



Фиг. 1

2. Составим уравнения движения спутника относительно центра инерции, взяв в качестве шести искомых функций величину кинетического момента G и углы $\delta, \lambda, \theta, \varphi, \psi$. Уравнение моментов запишем в проекциях на оси y_1, y_2, y_3

$$\frac{dG}{dt} = L_3, \quad \frac{d\delta}{dt} = \frac{L_1}{G}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{L_2}{G \sin \delta} \quad (2.1)$$

где L_i — проекции момента внешних сил относительно центра инерции на оси y_i .

Проекции вектора ω абсолютной угловой скорости спутника на оси z_1, z_2, z_3 равны

$$\begin{aligned} p &= \dot{\delta} \alpha_{21} + \dot{\lambda} (\alpha_{31} \cos \delta - \alpha_{11} \sin \delta) + \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \alpha_{31} \\ q &= \dot{\delta} \alpha_{22} + \dot{\lambda} (\alpha_{32} \cos \delta - \alpha_{12} \sin \delta) - \dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \alpha_{32} \\ r &= \dot{\delta} \alpha_{23} + \dot{\lambda} (\alpha_{33} \cos \delta - \alpha_{13} \sin \delta) + \dot{\varphi} + \dot{\psi} \alpha_{33} \end{aligned} \quad (2.2)$$

С другой стороны, проектирование вектора G на эти оси дает

$$G_1 = Ap = G \sin \theta \sin \varphi, \quad G_2 = Bq = G \sin \theta \cos \varphi, \quad G_3 = Cr = G \cos \theta$$

где A, B, C — главные центральные моменты инерции спутника относительно осей z_1, z_2, z_3 , соответственно.

Подставим в уравнения (2.2) p, q, r из (2.3), $\dot{\delta}, \dot{\lambda}$ из (2.1) и α_{ij} из (1.2) и разрешим их относительно производных эйлеровых углов θ, φ, ψ

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= G \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) + \frac{L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi}{G} \\ \dot{\varphi} &= G \cos \theta \left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \varphi}{A} - \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) + \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G \sin \theta} \\ \dot{\psi} &= G \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) - \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G} \operatorname{ctg} \theta - \frac{L_2}{G} \operatorname{ctg} \delta \end{aligned} \quad (2.4)$$

Уравнения (2.1), (2.4) и образуют исходную систему уравнений в форме, удобной для применения асимптотических методов.

Выпишем еще, пользуясь (2.3), (2.1), (2.4), выражения для кинетической энергии T движения спутника относительно центра масс и ее производной

$$T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \frac{G^2}{2} \left[\left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) \sin^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{C} \right] \quad (2.5)$$

$$\dot{T} = \frac{2T}{G} L_3 + G \sin \theta \left[\cos \theta \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} - \frac{1}{C} \right) (L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi) + \right. \\ \left. + \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) (L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi) \right] \quad (2.6)$$

3. Предполагаем, что на спутник действуют лишь силы ньютоновского притяжения к неподвижному центру. Момент этих сил относительно центра масс спутника, с точностью до членов высшего порядка малости по величине отношения линейных размеров спутника к размерам орбиты, равен [2]

$$L = 3\mu R^{-3} [(C - B) \gamma_3 \gamma_2 z_1 + (A - C) \gamma_1 \gamma_3 z_2 + (B - A) \gamma_1 \gamma_2 z_3] \quad (3.1)$$

Здесь γ_i — направляющие косинусы радиуса-вектора центра инерции спутника R , проведенного из неподвижного центра притяжения, с главными центральными осями инерции z_i , а μ — гравитационная постоянная. Спроектируем равенство (3.1) на оси y_i . Направляющие косинусы радиуса-вектора R с осями y_i обозначим через β_i .

Выражая γ_i через β_i и α_{ik} , а μ , R — через ν , e , ω_0 по формулам эллиптического движения, получим

$$L_1 = 3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3 (1 - e^2)^{-3} \sum_{j=1}^3 (\beta_2 \beta_j s_{3j} - \beta_3 \beta_j s_{2j}) \\ L_2 = 3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3 (1 - e^2)^{-3} \sum_{j=1}^3 (\beta_3 \beta_j s_{1j} - \beta_1 \beta_j s_{3j}) \quad (3.2) \\ L_3 = 3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3 (1 - e^2)^{-3} \sum_{j=1}^3 (\beta_1 \beta_j s_{2j} - \beta_2 \beta_j s_{1j}) \\ s_{ij} = A\alpha_{i1}\alpha_{j1} + B\alpha_{i2}\alpha_{j2} + C\alpha_{i3}\alpha_{j3} \quad (3.3)$$

Для вычисления β_i заметим, что R лежит в плоскости орбиты $x_1 x_2$ и образует с осью x_1 угол ν . Тогда (см. фиг. 1)

$$\beta_1 = \cos \delta \cos (\nu - \lambda), \quad \beta_2 = \sin (\nu - \lambda), \quad \beta_3 = \sin \delta \cos (\nu - \lambda) \quad (3.4)$$

4. Для решения системы (2.1), (2.5) будем применять асимптотический метод Н. М. Крылова — Н. Н. Боголюбова (метод осреднения) [5] в той форме, которая была развита В. М. Волосовым [6, 7] (обобщение метода быстро вращающейся фазы Н. Н. Боголюбова и Д. Н. Зубарева).

В. М. Волосовым [6, 7] рассмотрена система вида

$$\dot{x} = \varepsilon X(x, y, t, \varepsilon), \quad \dot{y} = Y(x, y, t, \varepsilon) \quad (\varepsilon \ll 1) \quad (4.1)$$

где x, X — n -мерные, а y, Y — m -мерные вектор-функции, ε — малый параметр. Величины x будут «медленными», а y — «быстрыми» переменными. Общее решение невозмущенной (вырожденной) системы

$$x = \text{const}, \quad \dot{y} = Y(x, y, t, 0) \quad (4.2)$$

которая получается из (4.1) при $\varepsilon = 0$, предполагается известным. Обозначим это решение, удовлетворяющее произвольным начальным данным $y(t_0) = y_0$, через $y(x, y_0, t)$. Асимптотическое решение системы (4.1) в k -ом приближении ищется в виде

$$\begin{aligned} x &= \xi + \varepsilon u_1(\xi, \eta, t) + \dots + \varepsilon^{k-1} u_{k-1}(\xi, \eta, t) \\ y &= \eta + \varepsilon v_1(\xi, \eta, t) + \dots + \varepsilon^{k-2} v_{k-2}(\xi, \eta, t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

где переменные ξ, η удовлетворяют системе k -го приближения

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \varepsilon A_1(\xi) + \varepsilon^2 A_2(\xi) + \dots + \varepsilon^k A_k(\xi) \\ \dot{\eta} &= Y(\xi, \eta, t, 0) + \varepsilon B_1(\xi) + \dots + \varepsilon^{k-1} B_{k-1}(\xi) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Функция $A_1(\xi)$ имеет вид

$$A_1(\xi) = M_t \{X(\xi, y, t, 0)\} \quad (4.5)$$

где через M_t обозначена операция осреднения вдоль решений невозмущенной системы (4.2)

$$M_t \{f(x, y, t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(x, y(x, y_0, t), t) dt \quad (4.6)$$

Предполагается, что результат осреднения в (4.5) не зависит от начальных данных t_0, y_0 , что имеет место для широкого класса случаев

В работах [6,7] указывается алгоритм построения функций u_i, v_i, A_i, B_i и формулируются теоремы, обосновывающие этот метод. При некоторых общих ограничениях отличие k -го приближения (4.3) от точного решения будет для переменных x величиной порядка ε^k , а для переменных y — порядка ε^{k-1} на интервале изменения t порядка ε^{-1} . Отметим, что система (4.4) значительно проще исходной, так как уравнения для переменных ξ автономны и интегрируются отдельно.

5. Пусть главные центральные моменты инерции спутника близки друг к другу, т. е. представимы в виде

$$A = J_0 + \varepsilon A', \quad B = J_0 + \varepsilon B', \quad C = J_0 + \varepsilon C' \quad (\varepsilon \ll 1) \quad (5.1)$$

При $\varepsilon = 0$ из (3.3), (5.1) следует $s_{ij} = J_0 \delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера), и тогда из (3.2) получаем $L_1 = L_2 = L_3 = 0$. Из системы (2.1), (2.4) в этом случае получим, что $G, \delta, \lambda, \theta$ и φ постоянны, а

$$\psi = G J_0^{-1} t + \psi_0 \quad (5.2)$$

т. е. спутник равномерно вращается вокруг поступательно движущейся оси кинетического момента.

При малом $\varepsilon \neq 0$ из (3.3), (3.2) получим $s_{ij} = J_0 \delta_{ij} + O(\varepsilon)$, $L_i = O(\varepsilon)$. Тогда система семи уравнений (1.1), (2.1), (2.4) с учетом (3.2) является, очевидно, системой типа (4.1), причем роль «медленных» переменных (x) играют $G, \delta, \lambda, \theta, \varphi$, а роль «быстрых» (y) — ψ и v . Для получения решения в первом приближении достаточно просто осреднить правые части уравнений (2.1), (2.4), подставив в них v из решения уравнения (1.1) и ψ из (5.2). При фиксированных значениях «медленных» переменных правые части уравнений, подлежащие осреднению, будут суммами членов вида

$f_1(\psi) f_2(\nu)$, где функции f_1, f_2 периодичны по своим аргументам с периодами 2π . Кроме того, как легко убедиться, разложение $f_1(\psi)$ в ряд Фурье содержит гармоники не выше третьей. Поэтому разложение правых частей уравнений (2.1), (2.4) в двойной ряд Фурье (по ψ и ν), после подстановки ψ и ν как функций времени, будет суммой членов вида

$$C_{mn} \cos [m (GJ_0^{-1} t + \psi_0)] \cos n\omega_0 t \quad (m = 0, 1, 2, 3; n = 0, 1, 2 \dots)$$

и подобных им, где один или оба косинуса могут быть заменены на синусы. Пусть ни при каком натуральном n не выполняется ни одно из равенств

$$G = nJ_0\omega_0, \quad G = \frac{1}{2} nJ_0\omega_0, \quad G = \frac{1}{3} nJ_0\omega_0 \quad (5.3)$$

Тогда результат осреднения правых частей согласно (4.6) не зависит от начального значения ψ_0 . В этом случае осреднение по времени можно заменить независимым осреднением по ψ и по ν , как по функции t .

Если же выполняется хоть одно из равенств (5.3), то имеют место резонансные эффекты, которые здесь не рассматриваются.

Осреднение по времени функций, зависящих от ν , сводится, в силу (1.1), к осреднению по ν следующим образом

$$M_t \{f(\nu)\} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(\nu) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - e^2)^{3/2} f(\nu) d\nu}{(1 + e \cos \nu)^2} = (1 - e^2)^{3/2} M_\nu \left\{ \frac{f(\nu)}{(1 + e \cos \nu)^2} \right\}$$

Осредняя правые части уравнений (2.1), (2.4) (с учетом (3.2), (3.3) и (1.2)) сначала по ψ , а затем по ν согласно (5.4), получим уравнения первого приближения в виде

$$\dot{G} = 0, \quad \dot{\delta} = 0, \quad \dot{\psi} = G J_0^{-1} + O(\epsilon) \quad (5.5)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{3\omega_0^2 \cos \delta}{4G(1 - e^2)^{3/2}} \{A + B + C - 3[(A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi) \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta]\}$$

$$\dot{\theta} = G \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) + \frac{3\omega_0^2 (1 - 3 \cos^2 \delta)}{4G(1 - e^2)^{3/2}} (A - B) \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\dot{\varphi} = G \cos \theta \left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \varphi}{A} - \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) - \frac{3\omega_0^2 (1 - 3 \cos^2 \delta)}{4G(1 - e^2)^{3/2}} \cos \theta (A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi - C)$$

Для дальнейшего упрощения (5.5) заметим, что с точностью до величин порядка ϵ^2 , в силу (5.1) имеем

$$\frac{1}{A} = \frac{2}{J_0} - \frac{A}{J_0^2}, \quad A = 2J_0 - \frac{J_0^2}{A}$$

и аналогично для моментов инерции B, C . Используя эти приближенные равенства преобразуем (5.5), не уменьшая ее порядка точности по ϵ

$$\dot{G} = 0, \quad \dot{\delta} = 0, \quad \dot{\psi} = \omega + O(\epsilon), \quad \dot{\lambda} = \frac{3\omega_0^2 \Phi \cos \delta}{4G(1 - e^2)^{3/2}} \quad (5.6)$$

$$\dot{\theta} = G \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) D, \quad \dot{\varphi} = G \cos \theta \left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \varphi}{A} - \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) D \quad (5.7)$$

Здесь

$$\Phi = \frac{6TJ_0^2}{G^2} - J_0^2 \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \right), \quad D = 1 - \frac{3\omega_0^2 (1 - 3 \cos^2 \delta)}{4\omega^2 (1 - e^2)^{3/2}}, \quad \omega = \frac{G}{J_0}$$

где T определено формулой (2.5).

Решение системы (5.6) аппроксимирует точное решение системы (2.1), (2.4) на интервале времени порядка $T_0 \varepsilon^{-1}$, много большем периода оборота спутника, с погрешностью порядка ε для «медленных» переменных $G, \delta, \lambda, \theta, \varphi$ и с погрешностью порядка 1 для ψ .

Относительное движение спутника, описываемое уравнениями (5.6), распадается на три части: «быстрое» движение (переменная ψ) и два «медленных» (переменные θ, φ и G, δ, λ).

«Быстрое» движение представляет собой вращение спутника вокруг вектора кинетического момента с угловой скоростью $\omega = GJ_0^{-1}$, постоянной в силу первого уравнения (5.6).

Уравнения для переменных θ, φ описывают движение вектора кинетического момента относительно спутника. Легко видеть, что эти уравнения отличаются от уравнений для θ, φ в случае движения тела по инерции (первые два уравнения (2.4) при $L = 0$, случай Эйлера — Пуансо) лишь множителем D (5.7), постоянным в данном приближении.

Таким образом, действие гравитационных моментов лишь изменяет в постоянное число D раз скорость перемещения вектора G вдоль траекторий его движения в случае Эйлера — Пуансо. Эти траектории определяются соотношениями, вытекающими из (2.3), (2.5)

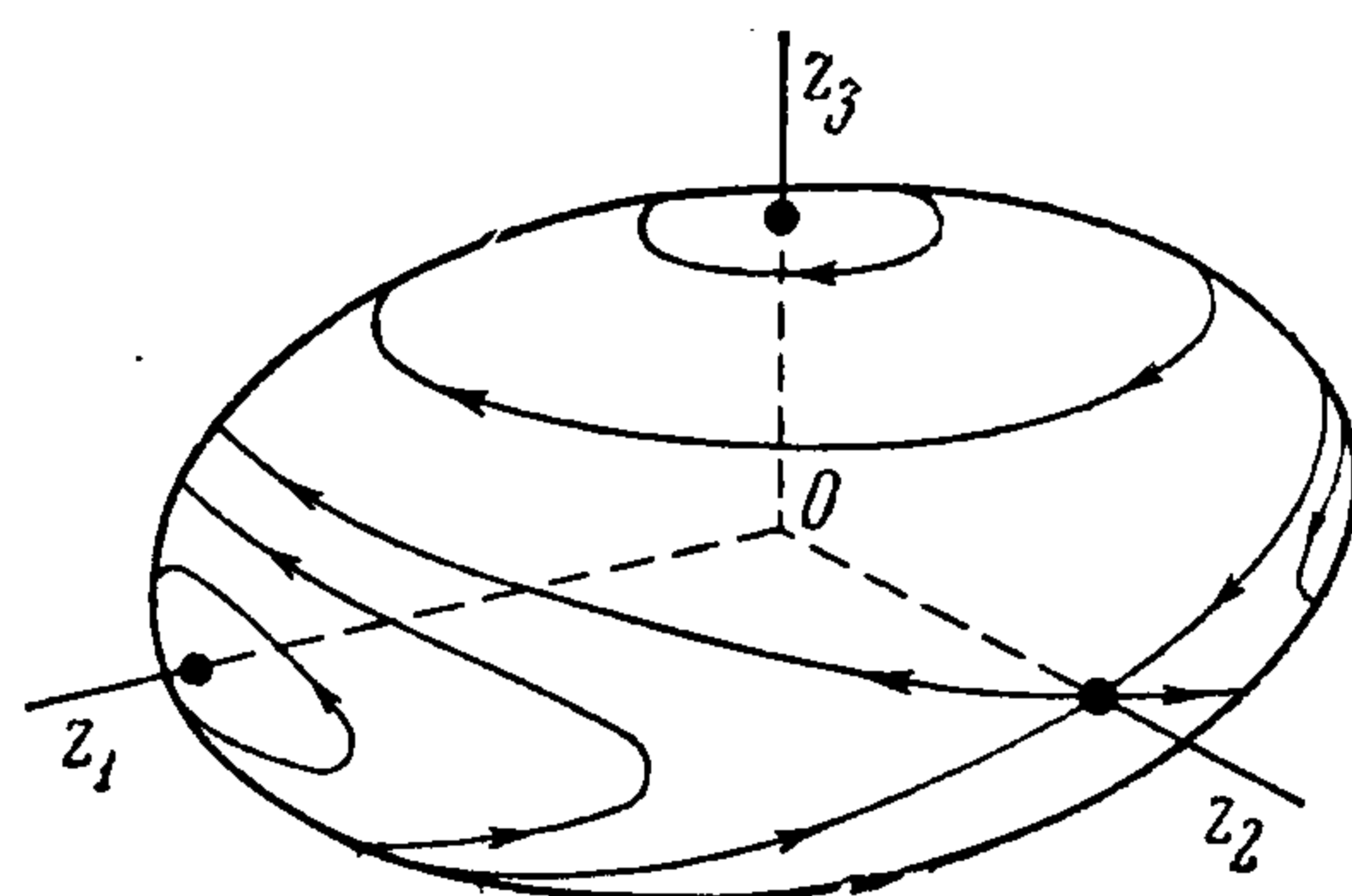
$$G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = G^2, \quad \frac{G_1^2}{A} + \frac{G_2^2}{B} + \frac{G_3^2}{C} = 2T$$

причем G и T постоянны. Ряд таких траекторий при фиксированном T и различных G изображен на фиг. 2, где стрелками указано направление движения в случае Эйлера — Пуансо и принято $A > B > C$ [8]. Величина D (5.7) может изменяться в широких пределах, принимая и отрицательные значения, что соответствует изменению направления движения на фиг. 2. Как и в случае Эйлера — Пуансо, перманентными осями вращения являются главные оси инерции, причем вращение вокруг оси z_2 неустойчиво, а вокруг z_1, z_3 — устойчиво.

Однако при выполнении условия

$$\omega = \frac{G}{J_0} = \sqrt{\frac{3(1 - 3 \cos^2 \delta)}{4(1 - e^2)^{3/2}}} \omega_0$$

вращение спутника будет стационарным при любой ориентации оси вращения относительно спутника. В этом случае моменты центробежных и гравитационных сил в первом приближении уравновешиваются, и вектор G не перемещается относительно тела.



Фиг. 2

Движение вектора G в пространстве описывается первыми тремя уравнениями (5.6) и представляет собой равномерное вращение вектора G вокруг нормали к плоскости орбиты на постоянном угловом расстоянии δ от нее. Угловая скорость вращения $\dot{\lambda}$ — величина порядка $\varepsilon \omega_0^2 \omega^{-1}$ (так как $\Phi \sim \varepsilon J_0$), а знак ее зависит от характера движения G относительно спутника. Например, если $\delta < \pi/2$, то при вращении спутника вокруг оси наибольшего момента инерции z_1 ($G^2 = 2TA$) из (5.7) получим $\Phi < 0, \dot{\lambda} < 0$ (вращение G в сторону, противоположную орбитальному движению), а при $G^2 = 2TC$ (вращение вокруг z_3) — $\dot{\lambda} > 0$.

6. Рассмотрим другой случай введения малого параметра в уравнения движения спутника. Моменты инерции считаем произвольными ($A \geq B \geq C$). Предположим, что угловая скорость относительного движения спутника много больше угловой скорости орбитального движения, и положим $\varepsilon \sim A\omega_0/G \ll 1$. Пусть единица измерения времени — величина порядка периода относительного движения, тогда $\omega_0 \sim \varepsilon$, а моменты гравитационных сил $L_i \sim \varepsilon^2$ (3.2). Рассматриваемый случай соответствует большой кинетической энергии вращения (по сравнению с работой внешних сил); асимптотика таких движений для системы с одной степенью свободы изучена Н. Н. Моисеевым [9].

Невозмущенное движение ($\varepsilon = 0$) будет движением Эйлера — Пуансо, величины G, δ, λ и T при этом постоянны. Функция ψ представима в виде $\psi = \psi_1(t) + \psi_2(t)$, причем θ, φ и ψ_1 периодичны по t с периодом τ движения вектора G по замкнутым траекториям фиг. 2 (или получают за время τ постоянные приращения 2π). Второе слагаемое $\psi_2 = 2\pi t/\tau'$, причем периоды τ и τ' , зависящие от G и T , вообще говоря, несоизмеримы [8].

«Медленными» переменными (x) в возмущенном движении ($\varepsilon \neq 0$) будут G, δ, λ и T , а «быстрыми» — φ и ψ (θ выражается через T и φ при помощи (2.5)). Уравнения движения и (1.1) представятся в виде

$$\dot{x} = \varepsilon^2 X(x, y, v), \quad \dot{y} = Y_0(x, y) + \varepsilon^2 Y_1(x, y, v), \quad \dot{v} = \varepsilon f(v) \quad (6.1)$$

Легко убедиться при построении решений типа (4.3) для системы (6.1), что $u_1 = v_1 \equiv 0$, а также $A_1 = B_1 = A_3 \equiv 0, A_2 = M_t\{X\}$ в системе (4.4). Решение для «медленных» переменных будем искать в виде

$$x = \xi, \quad \dot{\xi} = \varepsilon^2 A_2(\xi, v) = \varepsilon^2 M_t\{X(\xi, y, v)\} \quad (6.2)$$

пренебрегая членами порядка ε^2 в (4.3) и порядка ε^4 в (4.4).

Поэтому погрешность асимптотического решения для «медленных» переменных будет порядка ε^2 на интервале времени порядка ε^{-2} , что соответствует числу оборотов спутника по орбите порядка ε^{-1} ($\Delta v \sim \varepsilon^{-1}$).

Для построения осредненной системы (6.2) нужно осреднять правые части уравнений движения (при фиксированных «медленных» переменных и v) по движению Эйлера — Пуансо. Эти правые части — периодические функции θ, φ и ψ с периодами 2π , а периоды τ и τ' несоизмеримы. Поэтому, проводя рассуждения, аналогичные содержащимся в п. 5, установим, что осреднение можно производить двумя независимыми этапами: по θ, φ, ψ_1 и по ψ_2 , как по функциям времени. Таким образом

$$\begin{aligned} M_t\{f(\theta, \varphi, \psi)\} &= \frac{1}{\tau\tau'} \int_0^\tau \int_0^{\tau'} f\left(\theta(t), \varphi(t), \psi_1(t) + \frac{2\pi t'}{\tau'}\right) dt' dt = \\ &= \frac{1}{2\pi\tau} \int_0^\tau \int_0^{2\pi} f(\theta(t), \varphi(t), \psi) d\psi dt = M_1 M_\psi\{f(\theta, \varphi, \psi)\} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Здесь M_ψ означает осреднение по ψ , а M_1 — по θ и φ , связанным (2.5), производимое по замкнутым траекториям вектора кинетического момента в движении Эйлера — Пуансо (фиг. 2).

Осредняя правые части уравнений (2.1), (2.6) по схеме (6.3), получим систему первого приближения (6.4)

$$\dot{G} = 0, \quad \dot{\delta} = -\frac{3\omega_0^2(1+e\cos\nu)^3}{2(1-e^2)^3G}\beta_2\beta_3N, \quad \dot{\lambda} = \frac{3\omega_0^2(1+e\cos\nu)^3}{2(1-e^2)^3G\sin\delta}\beta_1\beta_3N$$

$$\dot{T} = \frac{3\omega_0^2(1+e\cos\nu)^3}{2(1-e^2)^3}(2\beta_3^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2)\frac{(A-B)(B-C)(C-A)}{ABCG^2}M_1\{G_1G_2G_3\}$$

$$N = A + B + C - 3M_1\{(A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi)\sin^2\theta + C\cos^2\theta\} \quad (6.5)$$

В силу симметрии траекторий вектора G относительно координатных плоскостей системы координат $z_1z_2z_3$, очевидно, $M_1(G_1, G_2, G_3) = 0$, и $T = \text{const}$. При близких друг к другу моментах инерции A, B, C (5.1) N совпадает с Φ (5.7). В общем случае, пользуясь (2.3), (2.5), получим

$$N = B - 2A - 2C + 6ACTG^{-2} + 3B(A-B)(B-C)G^{-2}M_1(q^2) \quad (6.6)$$

Подставим в (6.6) $q(t)$ из движения Эйлера-Пуансо и осредним функцию q^2 по ее периоду. Окончательно, для траекторий (фиг. 2) вектора G , охватывающих ось z_1 ($G^2 > 2TB$), имеем

$$N = B + C - 2A + 3\left(\frac{2TA}{G^2} - 1\right)\left[C + (B-C)\frac{K(k) - E(k)}{k^2K(k)}\right] \quad (6.7)$$

Здесь $K(k), E(k)$ — полные эллиптические интегралы;

$$k^2 = \frac{(B-C)(2TA - G^2)}{(A-B)(G^2 - 2TC)} \quad (6.8)$$

Для траекторий вектора G , охватывающих ось z_3 ($G^2 < 2TB$), нужно просто поменять местами A и C в формулах (6.7), (6.8).

Величина N зависит от моментов инерции спутника и от отношения G^2/T , которое определяет траекторию фиг. 2 и в рассматриваемом приближении постоянно. При вращении спутника вокруг осей z_1 ($G^2 = 2TA$), z_3 ($G^2 = 2TC$) из (6.7) получим

$$N = B + C - 2A < 0, \quad N = B + A - 2C > 0$$

В случае динамической симметрии ($A = B$) формулы (6.6), (2.5) дают

$$N = 6ACTG^{-2} - A - 2C = (A-C)(2-3\sin^2\theta), \quad \theta = \text{const} \quad (6.9)$$

В рассматриваемом приближении относительное движение спутника складывается из движения Эйлера-Пуансо вокруг вектора G (при постоянных G и T) и движения самого вектора G в пространстве, описываемого уравнениями (6.4) для δ, λ . Изучим эти уравнения, взяв в качестве независимой переменной истинную аномалию ν . Учитывая (1.1), (3.4), (6.4), запишем уравнения для δ, λ в виде (6.10)

$$\frac{d\delta}{d\nu} = \kappa(1+e\cos\nu)\sin\delta\sin(\lambda-\nu)\cos(\lambda-\nu) \quad \left(\kappa = \frac{3\omega_0N}{2(1-e^2)^{3/2}G}\right)$$

$$\frac{d\lambda}{d\nu} = \kappa(1+e\cos\nu)\cos\delta\cos^2(\lambda-\nu) \quad (6.11)$$

Очевидно, что введенная безразмерная величина κ имеет порядок ϵ и постоянна в рассматриваемом приближении (в силу постоянства G, T и N).

В случае круговой орбиты ($e = 0$) уравнения (6.10) имеют первый интеграл

$$\cos\delta + \frac{1}{2}\kappa\sin^2\delta\cos^2(\lambda-\nu) = \text{const}$$

и их интегрирование сводится к квадратуре.

Проще, однако, для решения (6.10) вновь воспользоваться асимптотическими методами. Как указывалось выше, выведенные осредненные уравнения определяют величины δ , λ с погрешностью порядка ε^2 (или κ^2) на интервале $\Delta v \sim \varepsilon^{-1} \sim \kappa^{-1}$. Поэтому достаточно решить с этой точностью уравнения (6.10), для чего нужно найти асимптотическое решение во втором приближении по κ . Система (6.10) имеет стандартную форму [5]. Ее решение во втором приближении ищется в виде

$$\delta = \xi + \kappa u(v, \xi, \eta), \quad \lambda = \eta + \kappa v(v, \xi, \eta) \quad (6.12)$$

Определяя функции u , v известным способом [5], получим

$$u = \frac{1}{12} \sin \xi [3 \cos(2v - 2\eta) + 3e \cos(v - 2\eta) + e \cos(3v - 2\eta)] \quad (6.13)$$

$$v = \frac{1}{12} \cos \xi [3 \sin(2v - 2\eta) + 6e \sin v + 3e \sin(v - 2\eta) + e \sin(3v - 2\eta)]$$

Переменные ξ , η удовлетворяют системе второго приближения

$$\frac{d\xi}{dv} = \frac{1}{8} \kappa^2 e^2 \sin \xi \cos \xi \sin 2\eta$$

$$\frac{d\eta}{dv} = \frac{1}{2} \kappa \cos \xi + \frac{1}{16} \kappa^2 (3 \cos^2 \xi - 1) \left(1 + \frac{2}{3} e^2 + e^2 \cos 2\eta\right) \quad (6.14)$$

Найдем с необходимой точностью (погрешность порядка κ^2 на интервале времени порядка κ^{-1}) решение системы (6.14), удовлетворяющее начальным условиям $\xi(0) = \xi_0$, $\eta(0) = \eta_0$. Легко видеть, что для такого решения на интервале $\Delta v \sim \kappa^{-1}$ справедливы оценки

$$\xi - \xi_0 = O(\kappa), \quad \eta - \eta_0 - \frac{1}{2} \kappa v \cos \xi_0 = O(\kappa) \quad (6.15)$$

которые дают решение системы (6.14) в первом приближении. Преобразуем правые части (6.14) при помощи (6.15), пренебрегая членами $O(\kappa^3)$, что вносит в решение погрешность $O(\kappa^2)$; имеем

$$\frac{d\xi}{dv} = \frac{1}{8} \kappa^2 e^2 \sin \xi_0 \cos \xi_0 \sin(2\eta_0 + \kappa v \cos \xi_0)$$

$$\frac{d\eta}{dv} = \frac{1}{2} \kappa \cos \xi_0 - \frac{1}{2} \kappa (\xi - \xi_0) \sin \xi_0 + \frac{1}{16} \kappa^2 (3 \cos^2 \xi_0 - 1) \times$$

$$\times \left[1 + \frac{2}{3} e^2 + e^2 \cos(2\eta_0 + \kappa v \cos \xi_0)\right] \quad (6.16)$$

Решение системы (6.16), удовлетворяющее начальным условиям, будут

$$\xi = \xi_0 + \frac{1}{8} \kappa e^2 \sin \xi_0 [\cos 2\eta_0 - \cos(2\eta_0 + \kappa v \cos \xi_0)] \quad (6.17)$$

$$\eta = \eta_0 + \frac{1}{2} \kappa v \cos \xi_0 + \frac{1}{16} \kappa^2 v [(3 \cos^2 \xi_0 - 1) (1 + \frac{2}{3} e^2) - e^2 \sin^2 \xi_0 \cos 2\eta_0] +$$

$$+ \frac{1}{8} \kappa e^2 \cos \xi_0 [\sin(2\eta_0 + \kappa v \cos \xi_0) - \sin 2\eta_0]$$

Подставляя (6.13) и (6.17) в (6.12), получим

$$\delta = \xi_0 + \frac{1}{24} \kappa \sin \xi_0 \{6 \cos [(2 - \kappa \cos \xi_0) v - 2\eta_0] +$$

$$+ 6e \cos [(1 - \kappa \cos \xi_0) v - 2\eta_0] + 2e \cos [(3 - \kappa \cos \xi_0) v - 2\eta_0] +$$

$$+ 3e^2 \cos 2\eta_0 - 3e^2 \cos(\kappa v \cos \xi_0 + 2\eta_0)\}$$

$$\lambda = \eta_0 + \frac{1}{2} \kappa v \cos \xi_0 + \frac{1}{16} \kappa^2 v [(3 \cos^2 \xi_0 - 1) (1 + \frac{2}{3} e^2) - e^2 \sin^2 \xi_0 \cos 2\eta_0] +$$

$$+ \frac{1}{24} \kappa \cos \xi_0 \{6 \sin [(2 - \kappa \cos \xi_0) v - 2\eta_0] + 12e \sin v +$$

$$+ 6e \sin [(1 - \kappa \cos \xi_0) v - 2\eta_0] + 2e \sin [(3 - \kappa \cos \xi_0) v - 2\eta_0] +$$

$$+ 3e^2 \sin(\kappa v \cos \xi_0 + 2\eta_0) - 3e^2 \sin 2\eta_0\} \quad (6.18)$$

Это решение системы (6.10) отличается от точного на величины порядка κ^2 на интервале $\Delta\nu \sim \kappa^{-1}$, а ξ_0 и η_0 — произвольные постоянные. Если же ограничиться точностью порядка κ , то решение (6.18) упростится и

$$\delta = \xi_0, \quad \lambda = \eta_0 + \frac{1}{2}\kappa\nu \cos \xi_0 \quad (6.19)$$

Это решение первого приближения описывает вращение вектора кинетического момента при постоянстве δ вокруг нормали к плоскости орбиты со скоростью, равной, согласно (6.11)

$$\dot{\lambda} = \frac{3\omega_0^2 N \cos \delta}{4G(1-e^2)^{3/2}} \quad (6.20)$$

При $A = B$ и $e = 0$, используя выражение (6.9) для N , приходим к формуле, выведенной В. В. Белецким [1].

Траектории следа вектора кинетического момента на единичной сфере, неподвижной в системе координат $x_1x_2x_3$, в первом приближении представляют собой окружности $\delta = \text{const}$. Во втором приближении появляются колебания углов δ и λ , причем при увеличении среднего значения δ (т. е. ξ_0) от 0 до $\pi/2$ амплитуда колебаний δ растет, а амплитуда колебаний λ , как и средняя угловая скорость вращения (6.20), убывает. Суммарная скорость $\dot{\lambda}$ при $\delta \neq \pi/2$ не меняет знака и обращается в нуль лишь в отдельных точках, где и $\dot{\delta} = 0$ (см. (6.10)). При $\delta \sim \pi/2$ изменения λ будут величинами второго порядка малости по сравнению с изменениями δ . Траектории вектора \mathbf{G} на единичной сфере, неподвижной относительно $x_1x_2x_3$, с учетом указанных свойств изображены на фиг. 3, где принято $\kappa > 0$ (при $\kappa < 0$ изменится лишь направление движения вдоль этих траекторий, указанное стрелками).

На круговой орбите ($e = 0$) колебания δ и λ почти синусоидальны с угловой частотой, равной удвоенной угловой скорости орбитального движения, а кривые фиг. 3 близки к циклоидам, подвергнутым сжатию или растяжению вдоль осей координат. В случае эллиптической орбиты колебания δ и λ усложняются: появляются первая и третья гармоники, а также существенная зависимость формы колебаний от начального данного η_0 , но основные свойства траекторий фиг. 3 (в частности, наличие у них заострений, направленных к полюсам) сохраняются.

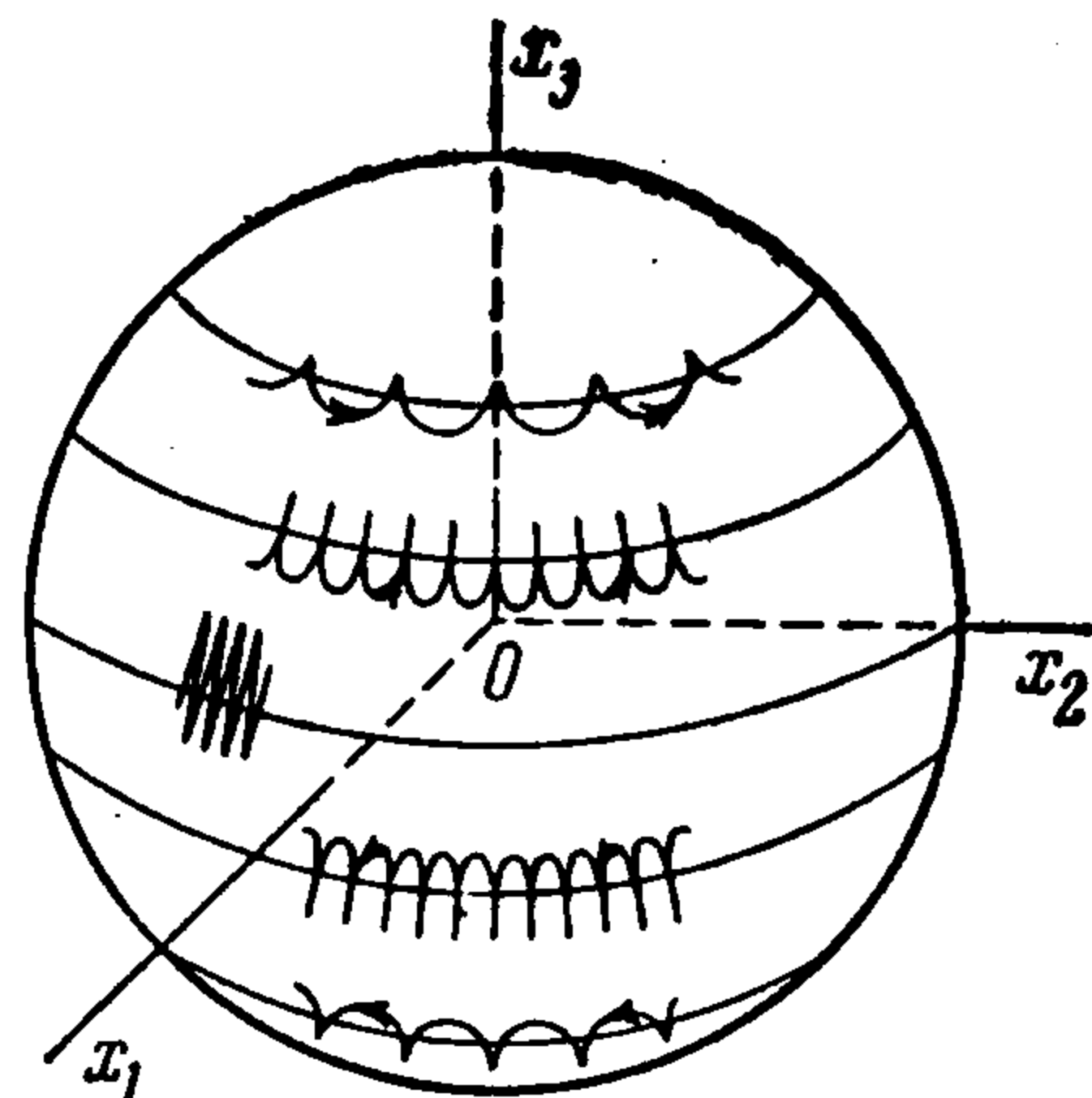
Области применимости асимптотических решений п. 5 и п. 6, очевидно, пересекаются: при $\omega \gg \omega_0$ (быстрое относительное движение) и близких A, B, C результаты п. 5 совпадают с первым приближением п. 6. Отметим, что изложенным методом можно изучать быстрое относительное движение твердого тела под действием моментов любой природы.

Автор приносит благодарность Н. Н. Моисееву за ценные советы.

Поступила 31 I 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Белецкий. Движение искусственного спутника Земли относительно центра масс. Сб. Искусственные спутники Земли, вып. 1, 1958.
2. В. В. Белецкий. О либрации спутника. Сб. Искусственные спутники Земли, вып. 3, 1959.
3. В. В. Белецкий. Классификация движений искусственного спутника Земли около центра масс. Сб. Искусственные спутники Земли, вып. 6, 1961.
4. В. А. Сарычев. Влияние сжатия Земли на вращательное движение искусственного спутника. Сб. Искусственные спутники Земли, вып. 6, 1961.
5. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, М., 1958.
6. В. М. Волосов. О методе усреднения. ДАН СССР, 1961, т. 137, № 1.
7. В. М. Волосов. О высших приближениях при усреднении. ДАН СССР, 1961, т. 137, № 5.
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика. Физматгиз, М., 1958.
9. Н. Н. Моисеев. Асимптотика быстрых вращений. ЖВМ и МФ, 1963, т. 3, № 1.



Фиг. 3