Прикладная математика и механика. Том XXVII, 1963

О ДВИЖЕНИИ СИСТЕМ ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА ПРИ НАЛИЧИИ ВАРИАЦИОННЫХ СИЛ

Ю. Е. Боровский, Ю. И. Кулаков

(Новосибирск)

Получено уравнение движения системы переменного состава, учитывающее вариационные силы, возникающие вследствие нестационарного движения среды и связанные с изменением (вариацией) количества движения относительно твердой оболочки. Дано решение задачи Охоцимского, изучено влияние вариационных сил на движение систем переменного состава с жидкостью в качестве рабочего тела. Исследована возможность увеличения конечной скорости таких систем за счет периодического перемещения внутренними силами центра тяжести системы относительно твердой оболочки.

Уравнения движения систем переменного состава в наиболее общем виде получены в работе Ф. Р. Гантмахера и Л. М. Левина [1]. В указанной работе приведено общее выражение для вариационных сил, возникающих при нестационарном движении среды, образующей рабочее тело, и равных изменению количества движения системы относительно ее твердой оболочки. Из этого выражения следует, что для ракет с жидким или твердым горючим вариационные силы пренебрежимо малы по сравнению с реактивными силами [2].

Однако существует ряд систем, в которых эти силы играют существенную роль и учет их приводит к необычным на первый взгляд следствиям.

Рассмотрим так называемую задачу Д. Е. Охоцимского.

На гладкой горизонтальной поверхности находится тележка с цистерной, заполненной водой. Найти закон движения тележки, если вода вытекает через вертикальную трубку, расположенную на расстояние l от центра тяжести C_0 пустого сосуда, по заданному закону.

Обозначим через x координату центра тяжести C_0 тележки с пустой цистерной, а ее массу через m_0. Пусть далее, масса тележки с цистерной, содержащей воду, равна $m(t)$. Если в процессе вытекания положение центра тяжести C сосуда с водой смещается относительно C_0, то его координата x_1 может быть записана в виде

$$x_1 = x + a(t)$$

где $a(t)$ — координата C относительно C_0 — известная функция времени, зависящая от геометрии сосуда и закона вытекания. Воспользуемся законом сохранения центра тяжести системы, состоящей из сосуда с жидкостью и капель, вытекших из трубки в момент времени $-\infty < \tau < t$. Для статического момента всей системы имеем

$$(x + a) m + \int_{-\infty}^{t} \xi(t, \tau)\, dm_\tau = MX_c = \text{const} \tag{1}$$

где $\xi(t, \tau)$ — координата к моменту t капли массы dm_τ, выпущенной из сосуда в момент τ; M — масса всей системы.

Если капля вытекает из трубки с относительной скоростью, проекция которой на ось x равна u, то

$$\xi(t, \tau) = x + l + (\dot{x} + \dot{l} + u)(t - \tau) \tag{2}$$

Предполагается, что, вообще говоря, трубка (сопло) может перемещаться относительно сосуда при помощи некоторого механизма по заданному закону $l = l(t)$. Замечая, что $dm_\tau = \dot{m} d\tau$, дважды продифференцируем равенство (1) по t. Получаем

$$m\ddot{x} + m\ddot{a} + \dot{m}(2\dot{a} - 2\dot{l} - u) + \ddot{m}(a - l) = 0 \tag{3}$$

Очевидно, что уравнение (3) применимо не только к задаче Д. Е. Охоцимского, но и для реактивных систем самых различных конструкций. Рассмотрим некоторые из них.

1°. Тележка Охоцимского. Для нее $l = \text{const}$, а вытекание жидкости будем считать происходящим так, что координаты C и C_0 совпадают, т. е. $a = 0$. Так как жидкость вытекает через вертикальную трубку, то проекция u относительной скорости на ось x равна нулю. Таким образом, уравнение (3) сводится к уравнению

$$m\ddot{x} = \ddot{m} l \tag{4}$$

из которого легко находим скорость тележки в любой момент t

$$v = l \int_{-\infty}^{t} \frac{\ddot{m}}{m} dt \tag{5}$$

Рассмотрим следующий режим вытекания:

$$m = \begin{cases} m_1 & (-\infty < t \leqslant 0) \\ m_1 - \mu t & (0 \leqslant t \leqslant T) \\ m_0 & (T \leqslant t < \infty) \end{cases} \tag{6}$$

Имеем

$$\ddot{m} = -\mu\delta(t) + \mu\delta(t - T) \tag{7}$$

Подставляя (6) и (7) в (5), получаем[1]

$$v = \begin{cases} 0 & (-\infty < t \leqslant 0) \\ l\mu / m_1 & (0 < t \leqslant T) \\ lm(1 / m_0 - 1 / m_1) & (T < t < \infty) \end{cases}$$

Итак, если трубка расположена справа от центра тяжести C $(l > 0)$, то тележка, начиная с момента вытекания жидкости, движется с постоянной скоростью $-l\mu / m_1$ влево; затем, когда жидкость полностью выльется из сосуда, тележка толчком изменит величину и направление своей скорости и начнет двигаться вправо со скоростью $l\mu(1 / m_0 - 1 / m_1)$.

2°. Ракета с жидкостью в качестве рабочего тела. Пусть положение сопла и центра тяжести C остаются неизменными относительно C_0, т. е. $l = \text{const}$ и $a = 0$, но проекция на ось x относительной скорости вытекаю-

[1] Нетрудно видеть, что v и $\dot{m}$ имеют одинаковые разрывы. Это легко доказать, если рассмотреть уравнение, получающееся из (1) однократным дифференцированием.

щей жидкости $u \neq 0$. В этом случае уравнение (3) будет иметь вид

$$m\ddot{x} = \dot{m}u + \ddot{m}l \tag{8}$$

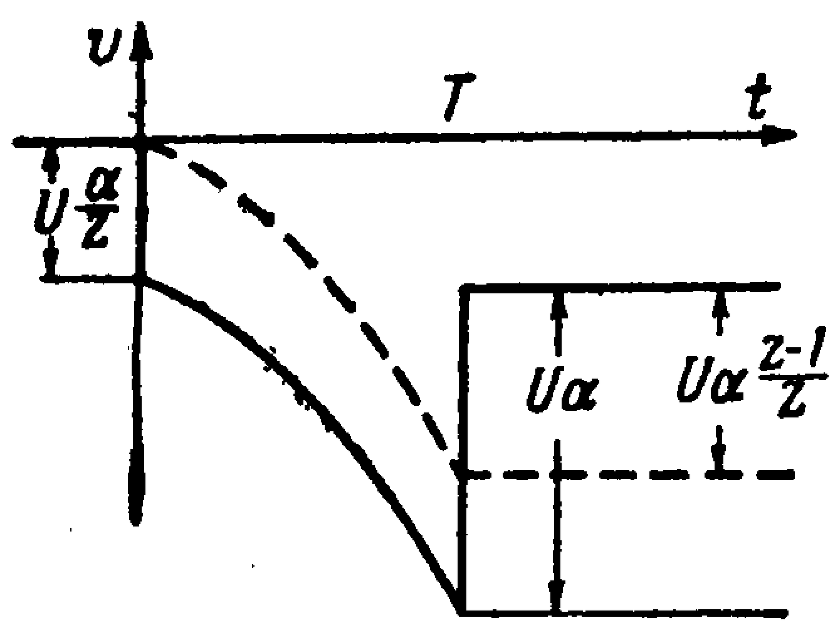
Уравнение (8) будет обобщением уравнения Мещерского, учитывающим движение жидкости относительно корпуса ракеты. Это уравнение легко интегрируется, так что скорость ракеты в любой момент времени оказывается равной

$$\dot{x} = u \ln \frac{m}{m_1} + l \frac{\dot{m}}{m} + l \int_{-\infty}^{t} \left(\frac{\dot{m}}{m}\right)^2 dt \tag{9}$$

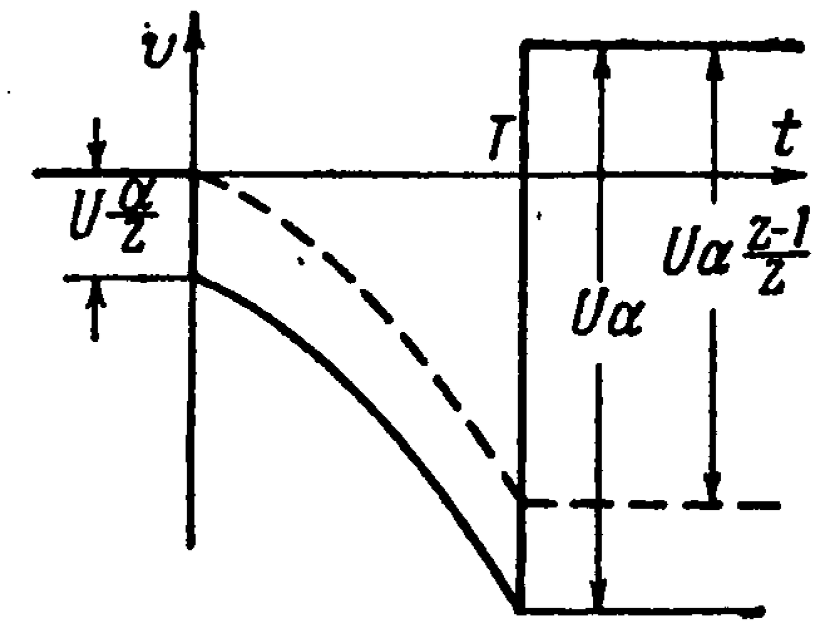
Для конечной скорости, когда $m(\infty) = m_0$, $\dot{m}(\infty) = 0$, имеем

$$v = -u \ln \frac{m_1}{m_0} + l \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\dot{m}}{m}\right)^2 dt \tag{10}$$

Итак, в отличие от известного результата учет относительного движения жидкости приводит к зависимости конечной скорости ракеты от места расположения сопла ($l > 0$ или $l < 0$) и режима вытекания $m(t)$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Так при режиме вытекания (6) скорость движения ракеты оказывается равной

$$v = \begin{cases} 0 & (-\infty < t < 0) \\ u \ln [(m_1 - \mu t) / m_1] - l\mu / m_1 & (0 < t < T) \\ u \ln (m_0 / m_1) + l\mu (1 / m_0 - 1 / m_1) & (T < t < \infty) \end{cases}$$

Введем обозначения

$$\alpha = \frac{\mu l}{u m_0}, \qquad \zeta = \frac{z \ln z}{z - 1}, \qquad z = \frac{m_1}{m_0} > 1$$

и рассмотрим движение ракеты при различных значениях α и z.

Пусть $\alpha > 0$ (сопло справа от C):

если $\zeta > \alpha$, то конечная скорость ракеты направлена в сторону, противоположную направлению выброшенной жидкости (фиг. 1), причем ее абсолютное значение оказывается на $u\alpha(z - 1) / z$ — меньше, чем по формуле Циолковского (пунктирная кривая на фиг. 1 и 2);

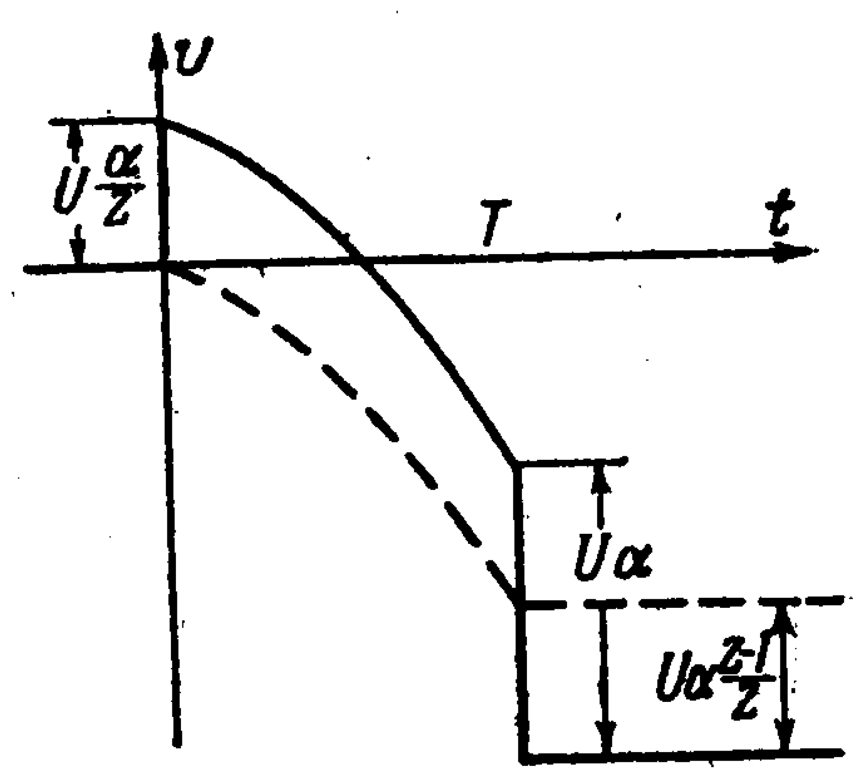
если $\zeta < \alpha$, то конечная скорость ракеты оказывается направленной в ту же сторону, куда выбрасывается жидкость (фиг. 2);

если $\zeta = \alpha$, то получается неожиданный результат: ракета набирает скорость и движется в сторону, противоположную направлению выбрасываемой жидкости, но в последний момент, когда истечение жидкости прекращается, скорость ее движения становится равной нулю и она останавливается в заданной точке пространства.

Если $\alpha < 0$ (этот случай возможен, когда сопло расположено слева от C $(l<0)$) то при любых $z>1$ в начальный момент ракета имеет скорость $u\alpha/z$, направленную в ту же сторону, куда выбрасывается жидкость. Затем происходит ее торможение, скорость меняет свой знак и в последний момент ракета скачком увеличивает скорость и продолжает двигаться в отрицательном направлении со скоростью, которая на $u\alpha(z-1)/z$ превышает то значение, которое дает формула Циолковского (фиг. 3).

Можно строго показать, что при $l<0$ режим вытекания (6) будет наилучшим из всех возможных режимов $m(t)$, для которых $\mu \geqslant -\dot{m}$, в смысле получения максимальной конечной скорости. Доказательство получается из формулы (10), если заметить, что

$$\left(\frac{\dot{m}}{m}\right)^2 = \left(\frac{1}{m}\right)^{\cdot}(-\dot{m}) \leqslant \left(\frac{1}{m}\right)^{\cdot}\mu$$



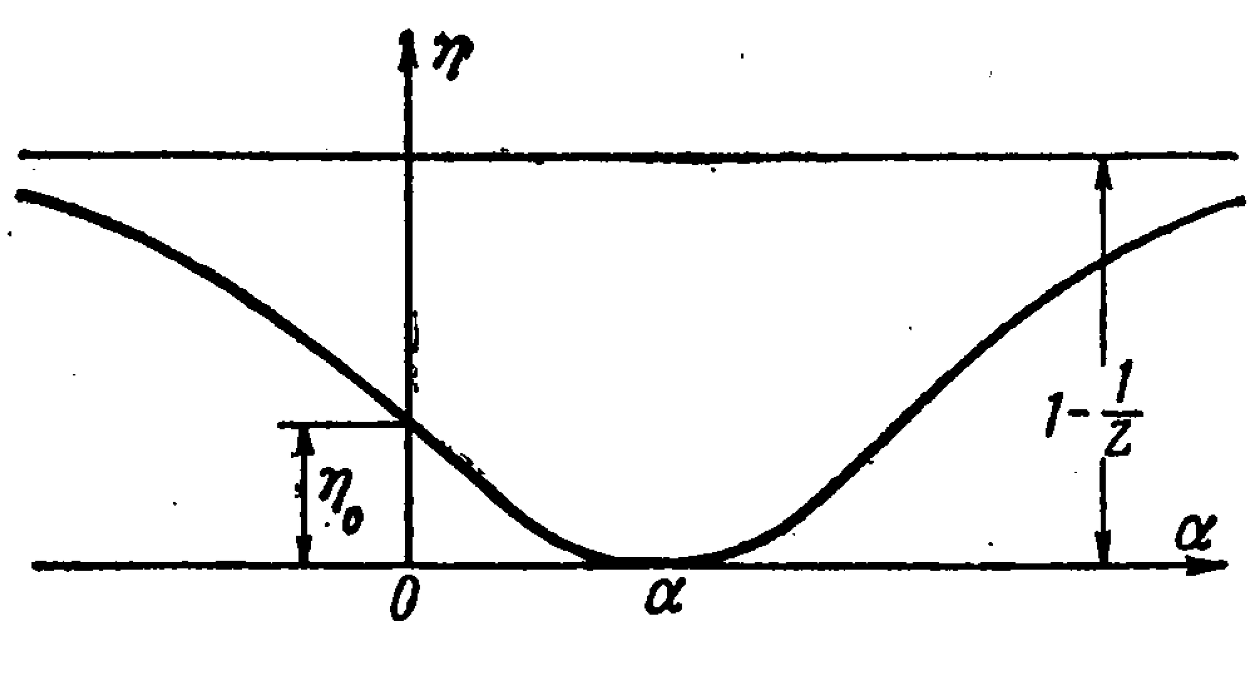
Фиг. 3

Отсюда

$$\int\limits_{\infty}^{\infty}\left(\frac{\dot{m}}{m}\right)^2 dt \leqslant \left(\frac{1}{m_0}-\frac{1}{m_1}\right)\mu$$

При этом знак равенства, очевидно, имеет место тогда и только тогда, когда $-\dot{m}\equiv\mu$ для $0<t<T$, т. е. при режиме вытекания (6).

Итак, при определенных значениях параметров α и z возможен выигрыш в конечной скорости ракеты по сравнению со случаем $\alpha=0$, когда имеет место формула Циолковского. Любопытно отметить, что этот выигрыш возникает из-за более рационального перераспределения энергии между корпусом ракеты и выброшенной жидкостью, т. е. из-за увеличения коэффициента полезного действия



Фиг. 4

$$\eta=\frac{E^\circ}{E^\circ+E}\quad\left(E=-\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(u+\dot{x})^2\dot{m}dt\right)$$

Здесь E° — конечная кинетическая энергия корпуса ракеты; E — кинетическая энергия всей выброшенной жидкости. Как показывают несложные расчеты, коэффициент полезного действия оказывается равным (для режима (6))

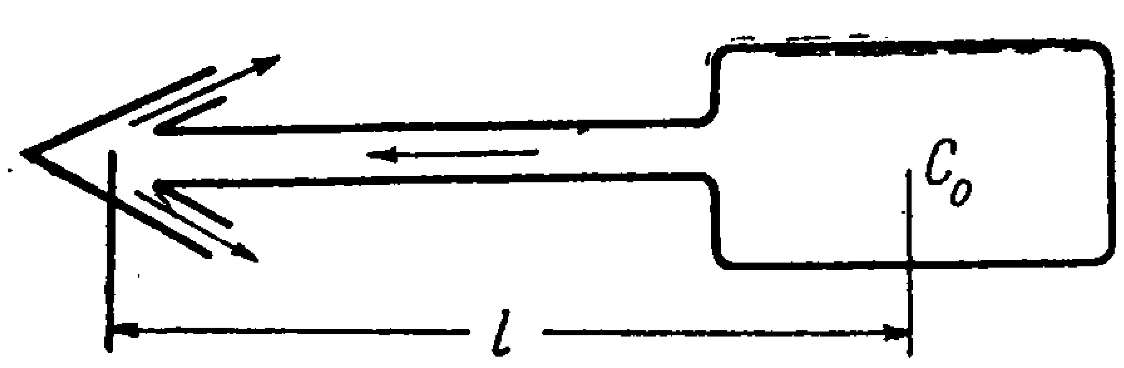
$$\eta=\left(1-\frac{1}{z}\right)\left[1+\frac{z(1-z^{-1})^2-\ln^2 z}{[\ln z-\alpha(1-z^{-1})]^2}\right]^{-1}\qquad\left(\alpha=\frac{\mu l}{um_0},\quad z=\frac{m_1}{m_0}\right)\qquad(11)$$

Зависимость η от α при постоянном z приведена на фиг. 4.

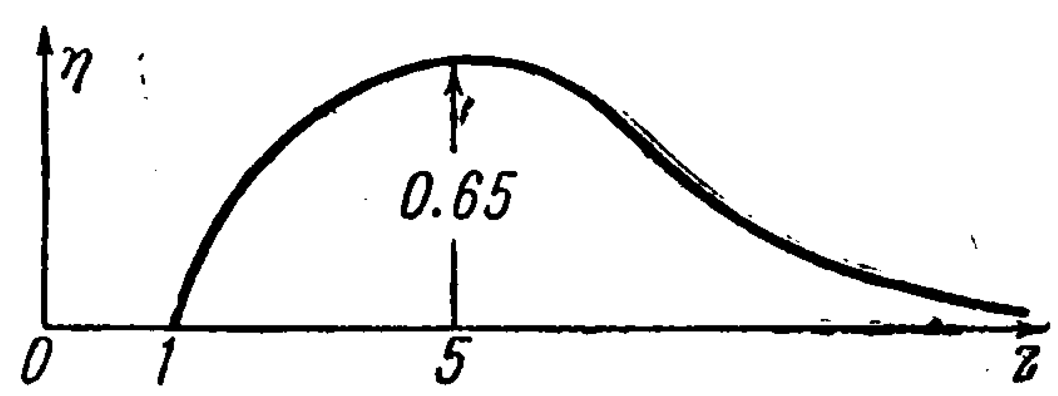
Коэффициент полезного действия ракеты растет с увеличением расстояния сопла от центра тяжести ракеты C, если сопло расположено так, как показано на фиг. 5.

Если же сопло расположено справа от центра тяжести ракеты, то при определенной длине l величина η обращается в нуль, что соответствует остановке ракеты после выбрасывания всей жидкости. При дальнейшем возрастании l коэффициент η растет и достигает предельного значения $1-z^{-1}$ при $\alpha \gg \zeta$. Любопытно отметить, что коэффициент полезного действия по Циолковскому η_0, равный $\eta(0, z)$, имеет максимальное значение $\eta_{\max} = 0.65$ при $z \approx 5$ и убывает (фиг. 6) до нуля при $z \to \infty$.

3°. Жидкостная ракета с двигателем, осуществляющим периодическое перемещение центра тяжести ракеты относительно ее оболочки. Чтобы яснее представить суть дела, рассмотрим обычную ракету, внутри которой находится достаточно большая масса, которая внутренними силами перемещается от передней стенки ракеты до задней и обратно.



Фиг. 5



Фиг. 6

В результате такого перемещения центр тяжести корпуса ракеты C_0 будет перемещаться относительно центра тяжести C всей ракеты вместе с жидкостью, так что

$$a = a_0 - \delta\varkappa(t)\sin(\omega t + \varphi) \tag{12}$$

где $\varkappa(t)$ — функция, описывающая переходные процессы в начале и в конце истечения, определенная и дважды непрерывно дифференцируемая в $(-\infty, \infty)$, равная нулю вне сегмента $[0, T]$ и единице на $[t_1, t_2]$, где $[t_1, t_2] \subset (0, T)$.

Если обозначить $l - a = s$, то при $l = \mathrm{const}$ уравнение (3) примет вид

$$\ddot{x} = u\frac{\dot{m}}{m} + \frac{(ms)^{\cdot\cdot}}{m} \tag{13}$$

Таким образом, скорость ракеты в любой момент времени оказывается равной

$$v = u\ln\frac{m}{m_1} + \int_{-\infty}^{t} \frac{(ms)^{\cdot\cdot}}{m}\,dt \tag{14}$$

или, интегрируя по частям, получаем

$$v = u\ln\frac{m}{m_1} + \frac{(ms)^{\cdot}}{m} + \int_{-\infty}^{t} \left(\frac{\dot{m}}{m}\right)^2 s\,dt + \int_{-\infty}^{t} \frac{\dot{m}}{m}\dot{s}\,dt \tag{15}$$

Пусть закон истечения задан в виде

$$m = m_1 \exp\left(-\int_0^t (q + \varepsilon\sin\omega t)\,\varkappa(t)\,dt\right) \qquad (0 < \varepsilon \leqslant q) \tag{16}$$

Замечая, что $s = s_0 + \delta\varkappa(t)\sin(\omega t + \varphi)$, произведем некоторые оценки конечной скорости $v(T)$. Имеем

$$\left(\frac{\dot m}{m}\right)^2 s = (q + \varepsilon\sin\omega t)^2 (s_0 + \delta\varkappa(t)\sin(\omega t + \varphi))\,\varkappa^2(t) \tag{17}$$

$$\left(\frac{\dot m}{m}\right)\dot s = \varkappa(t)(q + \varepsilon\sin\omega t)\,(\dot\varkappa(t)\sin(\omega t + \varphi) + \varkappa(t)\,\omega\cos(\omega t + \varphi))\,\delta \tag{18}$$

При вычислении интегралов от (17) и (18) воспользуемся тем обстоятельством, что

$$\int\limits_A^B f(t)\sin(\omega t + \alpha)\,dt \to 0 \qquad \text{при } \omega \to \infty$$

Обозначая сумму интегралов такого рода через $\lambda(\omega)$, получим для конечной скорости ракеты

$$v = u\ln\frac{m_0}{m_1} + \left[\left(q^2 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)s_0 - \frac{1}{2}\,\delta\omega\varepsilon\sin\varphi\right]A + Bq\varepsilon\delta\cos\varphi + C\frac{\delta\varepsilon}{2}\cos\varphi + \lambda(\omega) \tag{19}$$

Здесь

$$A = \int\limits_0^T \varkappa^2 dt, \qquad B = \int\limits_0^T \varkappa^3 dt, \qquad C = \int\limits_0^T \varkappa\dot\varkappa\,dt = 0$$

Итак, из формулы (19) видно, что скорость ракеты может быть сделана очень большой при достаточно большой частоте ω и $\varphi = \pm{}^1/_2\pi$. Изменением знака фазы φ можно добиться изменения направления конечной скорости ракеты.

Таким образом, энергия внутренних сил, вызывающих периодическое перемещение центра тяжести ракеты относительно ее оболочки, при определенных условиях может быть использована для увеличения абсолютной скорости ракеты. Но никакого противоречия с основными законами механики здесь, конечно, нет: просто происходит наиболее рациональное перераспределение энергии между корпусом ракеты и выброшенной жидкостью при равенстве их количеств движения.

В заключение считаем своим долгом поблагодарить Ф. Р. Гантмахера за замечания и интерес к работе.

Поступила
27 X 1962

Институт математики СО АН СССР
Новосибирский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р. и Левин Л. М. Об уравнениях движения. ПММ, 1947, т. XI, вып. 3.
2. Гантмахер Ф. Р. и Левин Л. М. Теория полета неуправляемых ракет. М., Физматгиз, 1959.