

## ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В. А. Пальмов

(Ленинград)

Исследуется влияние помех на работу оптимальной по быстродействию линейной системы при ограничениях, наложенных на управления.

1. Рассмотрим объект, состояние которого определяется элементами матрицы-столбца  $\xi(t)$ , а закон движения — системой линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu + CF \quad (1.1)$$

где  $A$  — квадратная матрица, а  $B$  и  $C$  — прямоугольные с элементами, не зависящими от времени;  $u(t)$ ,  $F(t)$  — матрицы-столбцы управлений и внешних воздействий, соответственно.

Как и в книге [1] предположим, что областью управлений является выпуклый замкнутый ограниченный многогранник, расположенный в  $r$ -мерном пространстве с координатами  $u^1, u^2, \dots, u^r$ , где  $u^i$  — элементы матрицы управлений.

В книге [1] решается, в частности, задача о разыскании управления  $u$ , переводящего изображающую точку из заданного положения  $\xi = \xi_0$  в начало координат фазового пространства  $\xi$  за минимальное время. Показано, что эта задача имеет решение при некоторых ограничениях, наложенных на  $F$ , если только  $A, B, C, F$  известны точно.

Положим теперь, что свойства объекта ( $A, B, C$ ) и внешние воздействия  $F$  являются случайными и заранее известны лишь их статистические характеристики. В этом случае можно построить оптимальное управление для объекта с ожидаемыми свойствами и для внешних воздействий, равных их математическим ожиданиям. Однако реализация такого управления для объекта, имеющего случайные свойства и подверженного случайным внешним воздействиям, не обеспечит попадание изображающей точки в конце переходного процесса точно в начало координат.

Дело еще осложняется тем, что возможны случайные ошибки при осуществлении оптимального управления.

Настоящая работа посвящена вычислению разброса фазовых координат в конце переходного процесса и в минимизации этого разброса за счет коррекции управления.

2. Рассмотрим сначала упрощенную задачу, допустив, что параметры объекта, определяемые матрицами  $A, B, C$  известны точно, а внешнее воздействие, и в некотором смысле управление, являются случайными. Обозначим математическое ожидание внешнего воздействия  $\Phi$ , а его центрированную случайную составляющую  $\phi$  ( $F = \Phi + \phi$ ).

Положим, что найдено оптимальное управление  $u = U$ , минимизирующее время переходного процесса, когда объект подвергается ожидаемому внешнему воздействию  $\Phi$ . Управление оказывается кусочно-постоянной функцией с разрывами непрерывности (переключениями управлений) в

точках  $t_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ). Обозначим  $U_k$  матрицу управлений в промежутке времени  $t_k < t < t_{k+1}$ . Координаты объекта в этом переходном процессе назовем  $X$ , а  $X_k$  их значения в моменты  $t_k$ .

В промежутке времени

$$t_k < t < t_{k+1}$$

состояние объекта определяется уравнением и начальным условием

$$\dot{X} = AX + BU_k + C\Phi, \quad X(t_k) = X_k \quad (2.1)$$

Его решение в матричной форме имеет вид (см. [2])

$$X = e^{At} \left[ e^{-At_k} X_k + \int_{t_k}^t e^{-A\mu} (BU_k + C\Phi) d\mu \right] \quad (2.2)$$

Отсюда находится связь между двумя последующими значениями координат в моменты переключения управлений

$$X_{k+1} = e^{At_{k+1}} \left[ e^{-At_k} X_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-A\mu} (BU_k + C\Phi) d\mu \right] \quad (2.3)$$

Рассмотренный оптимальный переходный процесс назовем невозмущенным.

Обратимся к исследованию возмущенного переходного процесса в объекте (1.1). Положим, что управление в этом процессе имеет то же число разрывов и принимает те же значения, что и в невозмущенном процессе, однако переключения происходят в моменты  $t_k + \tau_k$ , где  $\tau_k$  — случайные величины. Таким образом, в промежутке времени

$$t_k + \tau_k < t < t_{k+1} + \tau_{k+1} \quad (2.4)$$

управление имеет величину  $U_k$ , а связь между значениями координат в конце и в начале промежутка (2.4) находится интегрированием уравнения (1.1)

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} = \exp [A (t_{k+1} + \tau_{k+1})] & \left[ \exp [-A (t_k + \tau_k)] \xi_k + \right. \\ & \left. + \int_{t_k + \tau_k}^{t_{k+1} + \tau_{k+1}} e^{-A\mu} (BU_k + CF) d\mu \right] \quad (2.5) \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение возмущения в координатах объекта  $x_k = \xi_k - X_k$  в моменты переключений. Полагая  $x_k$ ,  $\tau_k$ ,  $\Phi$  малыми величинами, линеаризуем соотношение (2.5). Учитывая (2.3), (2.1), получим, в результате линеаризации

$$\begin{aligned} x_{k+1} = \exp [A (t_{k+1} - t_k)] x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \exp [A (t_{k+1} - \mu)] C\Phi (\mu) d\mu + \\ + \dot{X}_{k+1}^- \tau_{k+1} - \exp [A (t_{k+1} - t_k)] \dot{X}_k^+ \tau_k \quad (2.6) \end{aligned}$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ , а  $\dot{X}_k^-$  и  $\dot{X}_k^+$  — значения скорости в невозмущенном оптимальном переходном процессе до и после переключения в момент  $t_k$ . Отметим, что в формулы (2.6) не входят значения скорости до первого переключения ( $\dot{X}_0^-$ ) и после последнего ( $\dot{X}_n^+$ ).

Рассмотрим первый вариант реализации оптимального управления, когда оно задается в функции времени. Здесь переключения происходят в моменты  $t_k + \tau_k$ , причем ошибки  $\tau_k$  в моментах переключения не зависят от  $x$ . Тогда (2.6) представляет линейное разностное уравнение, относительно  $x_k$ , решение которого строится по аналогии с решением, приведенным в книге [3]. Возмущение  $x_n$  в конце переходного процесса равно

$$x_n = \exp [A (t_n - t_0)] x_0 + \int_{t_0}^{t_n} \exp [A (t_n - \mu)] C \varphi (\mu) d\mu + \dot{X}_n^- \tau_n + \\ + \sum_{k=1}^{n-1} \exp [A (t_n - t_k)] (\dot{X}_k^- - \dot{X}_k^+) \tau_k - \exp [A (t_n - t_0)] \dot{X}_0^+ \tau_0 \quad (2.7)$$

Формулу (2.7) можно записать в более компактном виде

$$x_n = \exp [A (t_n - t_0)] x_0 + \int_{t_0}^{t_n} \exp [A (t_n - \mu)] C \varphi d\mu + \\ + \sum_{k=0}^n \exp [A (t_n - t_k)] \Delta_k \tau_k \quad (2.8)$$

если обозначить

$$\Delta_k = \dot{X}_k^- - \dot{X}_k^+ \quad (2.9)$$

и условиться, что

$$\dot{X}_n^+ = 0, \quad \dot{X}_0^- = 0 \quad (2.10)$$

Допустим, что возмущения  $\tau_k$ ,  $x_0$ ,  $\varphi$  не зависят одно от другого и имеют нулевое математическое ожидание. Тогда  $M [x_n] = 0$ , а матрица корреляционных моментов [4] составляющих столбца  $x_n$  имеет вид

$$D_n^x = \exp [A (t_n - t_0)] D_0^x \exp [A' (t_n - t_0)] + \\ + \int_{t_0}^{t_n} \int_{t_0}^{t_n} \exp [A (t_n - \mu)] C K_\varphi (\mu, \nu) C' \exp [A' (t_n - \nu)] d\nu d\mu + \\ + \sum_{k=0}^n \exp [A (t_n - t_k)] \Delta_k \Delta_k' \exp [A' (t_n - t_k)] D_k^\tau \quad (2.11)$$

Здесь  $M [ \dots ]$  — операция математического ожидания;  $K_\varphi (\mu, \nu)$  — матрица корреляционных функций составляющих  $\varphi$

$$K_\varphi (\mu, \nu) = M [\varphi (\mu) \varphi' (\nu)] \quad (2.12)$$

$D_k^\tau = M [\tau_k^2]$  — дисперсии моментов переключения управлений;  $A'$  — матрица, транспонированная  $A$  и т. д.

Мерой разброса  $x_n$  может служить след его корреляционной матрицы  $D_n^x$ .

3. Рассмотрим другой вариант реализации оптимального управления, когда оно задается не в функции времени, как выше, а в функции текущих значений фазовых координат объекта. Теперь работа оптимальной системы в невозмущенном переходном процессе выглядит следующим образом: производится измерение фазовых координат объекта  $X$ , и когда выпол-

няется условие  $X = X_k$ , осуществляется переключение управления со значения  $U_{k-1}$  на значение  $U_k$ . Соответствующая фазовая траектория схематично показана жирной линией на фиг. 1. При наличии возмущений  $\varphi$  переключения следует производить не в точках фазового пространства, а на некоторых гиперповерхностях переключений

$$\psi_k(\xi_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Эти поверхности также изображены на фиг. 1. Там же тонкими линиями показаны фазовые траектории, соответствующие различным случайным реализациям возмущения  $\varphi(t)$ .

Чтобы учесть неточности в измерении фазовых координат объекта, положим, что моменты переключения управлений определяются уравнениями

$$\psi_k(\xi_k - y_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.1)$$

Здесь ошибки измерения  $y_k$  — величины случайные, поэтому уравнение (3.1) определяет множество поверхностей, на которых происходит  $k$ -е переключение. При этом значение управления  $U_{k-1}$  заменяется значением  $U_k$ .

Учитывая, что  $\xi_k = X_k + x_k$  и полагая возмущения  $x_k$  и неточности измерения  $y_k$  малыми, найдем приближенное уравнение гиперповерхности переключений

$$\psi_k(X_k) + m_k(x_k - y_k) = 0 \quad (3.2)$$

Здесь  $m_k$  — матрица-строка, составленная из производных скалярной функции  $\psi_k(\xi)$  по составляющим  $\xi$  при  $\xi = X_k$ .

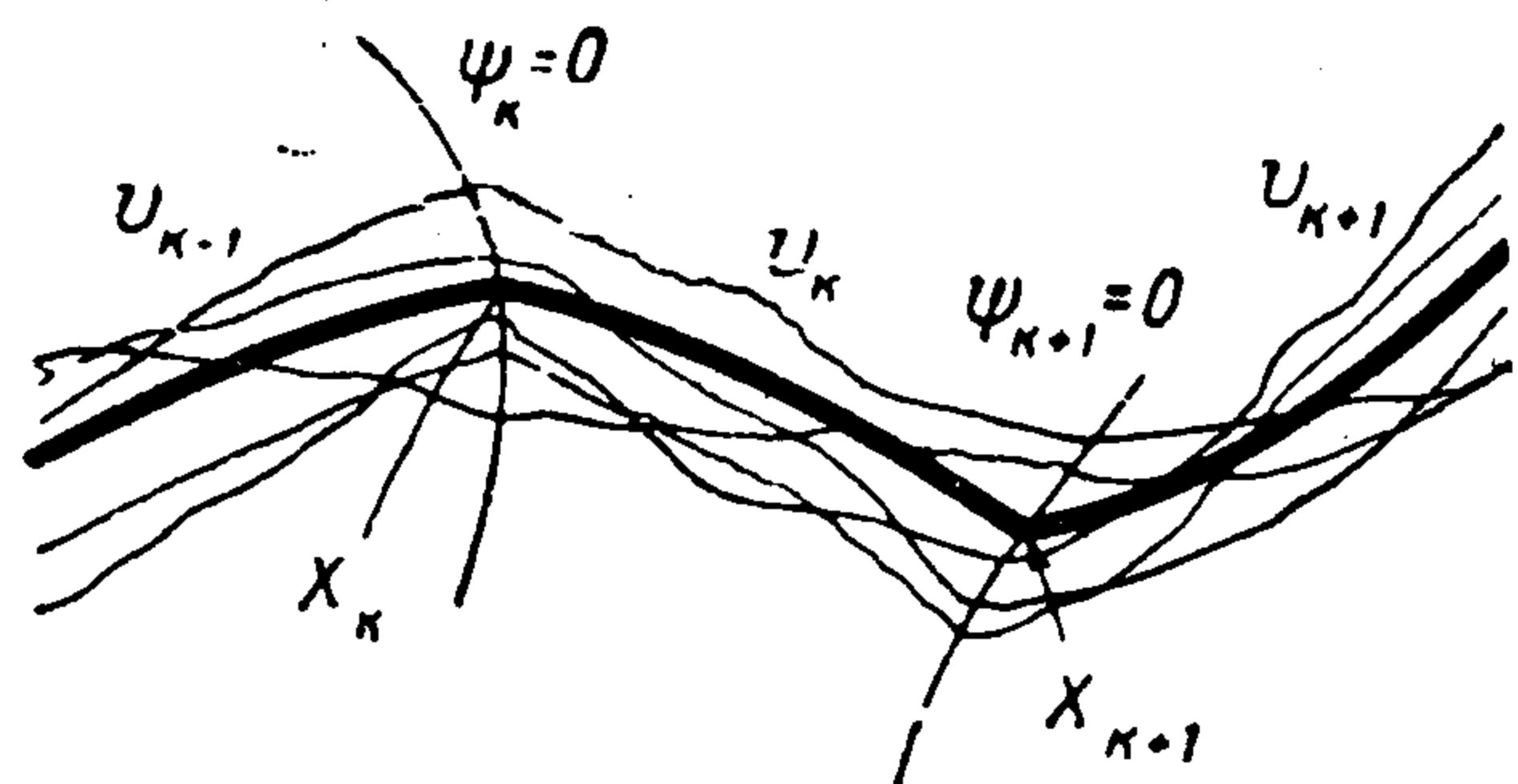
Если возмущения отсутствуют, то  $y_k = 0$ ,  $x_k = 0$  и переключения происходят при  $\xi = X_k$ .

Тогда из (3.2) следует

$$\psi_k(X_k) = 0 \quad (3.3)$$

и поэтому уравнение гиперповерхностей переключения принимает простой вид

$$m_k x_k = m_k y_k \quad (3.4)$$



Фиг. 1

Это — уравнение касательной гиперплоскости к гиперповерхности (3.1). В силу случайности  $y_k$  имеется множество параллельных гиперплоскостей переключения (3.4). Матрица  $m_k$  определяет их общий нормальный вектор, причем его составляющие пропорциональны соответствующим элементам  $m_k$ . Заметим, что  $\psi_k(\xi)$  — пока произвольные функции, подчиненные условию (3.3). Следовательно, элементы матриц  $m_k$  — произвольные числа, и можно надеяться, что соответствующим подбором их удастся уменьшить разброс фазовых координат в конце переходного процесса.

Найдем сначала статистические характеристики этого разброса. Соотношение (2.6) и в данном случае сохраняет силу, однако величины  $\tau_k$  уже

не являются независимыми, а должны быть определены из уравнений поверхностей переключения (3.4). Для дальнейшего удобно записать соотношение (2.6) в следующем виде:

$$x_{k+1} = Q_k (x_k - \dot{X}_k^+ \tau_k) + \int_{t_0}^{t_n} P_k(\mu) C \varphi(\mu) d\mu + \dot{X}_{k+1}^- \tau_{k+1} \quad (3.5)$$

Обозначения здесь таковы:

$$Q_k = \exp [A (t_{k+1} - t_k)]$$

$$P_k(\mu) = \begin{cases} 0 & (t_0 \leq \mu \leq t_k) \\ \exp [A (t_{k+1} - \mu)] & (t_k < \mu \leq t_{k+1}) \\ 0 & (t_{k+1} < \mu \leq t_n) \end{cases} \quad (3.6)$$

Подставим выражение  $x_{k+1}$  по формуле (3.5) в уравнение поверхности переключений (3.4) и найдем  $\tau_{k+1}$

$$\tau_{k+1} = \frac{m_{k+1}}{m_{k+1} \dot{X}_k^-} \left[ y_k - Q_k (x_k - \dot{X}_k^+ \tau_k) - \int_{t_0}^{t_n} P_k C \varphi d\mu \right] \quad (3.7)$$

Используя формулы (3.5), (3.7), составим выражение

$$x_{k+1} - \dot{X}_{k+1}^+ \tau_{k+1} = \gamma_k Q_k (x_k - \dot{X}_k^+ \tau_k) + \gamma_k \int_{t_0}^{t_n} P_k C \varphi d\mu + \rho_k y_{k+1} \quad (3.8)$$

Здесь обозначено

$$\rho_k = \frac{\Delta_{k+1} m_{k+1}}{m_{k+1} \dot{X}_{k+1}^-}, \quad \gamma_k = E - \rho_k \quad (3.9)$$

причем  $E$  — единичная матрица соответствующего порядка, а  $\Delta_k$  определяется формулой (2.9). Числитель в выражении  $\rho_k$  представляет квадратную матрицу, а знаменатель — число. Это следует из того, что  $\Delta_{k+1}$  — матрица-столбец, а  $m_{k+1}$  — матрица-строка с одинаковым числом составляющих.

Уравнение (3.7) — линейное разностное уравнение относительно  $x_k - \dot{X}_k^+ \tau_k$  и его решение находится так же, как выше. Поскольку выполняется условие (2.10), выражение  $x_n - \dot{X}_n^+ \tau_n$  совпадает с искомой величиной  $x_n$

$$x_n = \int_{t_0}^{t_n} S(\mu) C \varphi(\mu) d\mu + \sum_{k=1}^n T_k y_k + \Pi (x_0 + \Delta_0 \tau_0) \quad (3.10)$$

Здесь обозначения таковы:

$$S(\mu) = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{n-1} Q_{n-1} \gamma_{n-2} Q_{n-2} \dots \gamma_{k+1} Q_{k+1} \gamma_k P_k(\mu) \quad (3.11)$$

$$T_k = \gamma_{n-1} Q_{n-1} \dots \gamma_k Q_k \rho_{k-1}$$

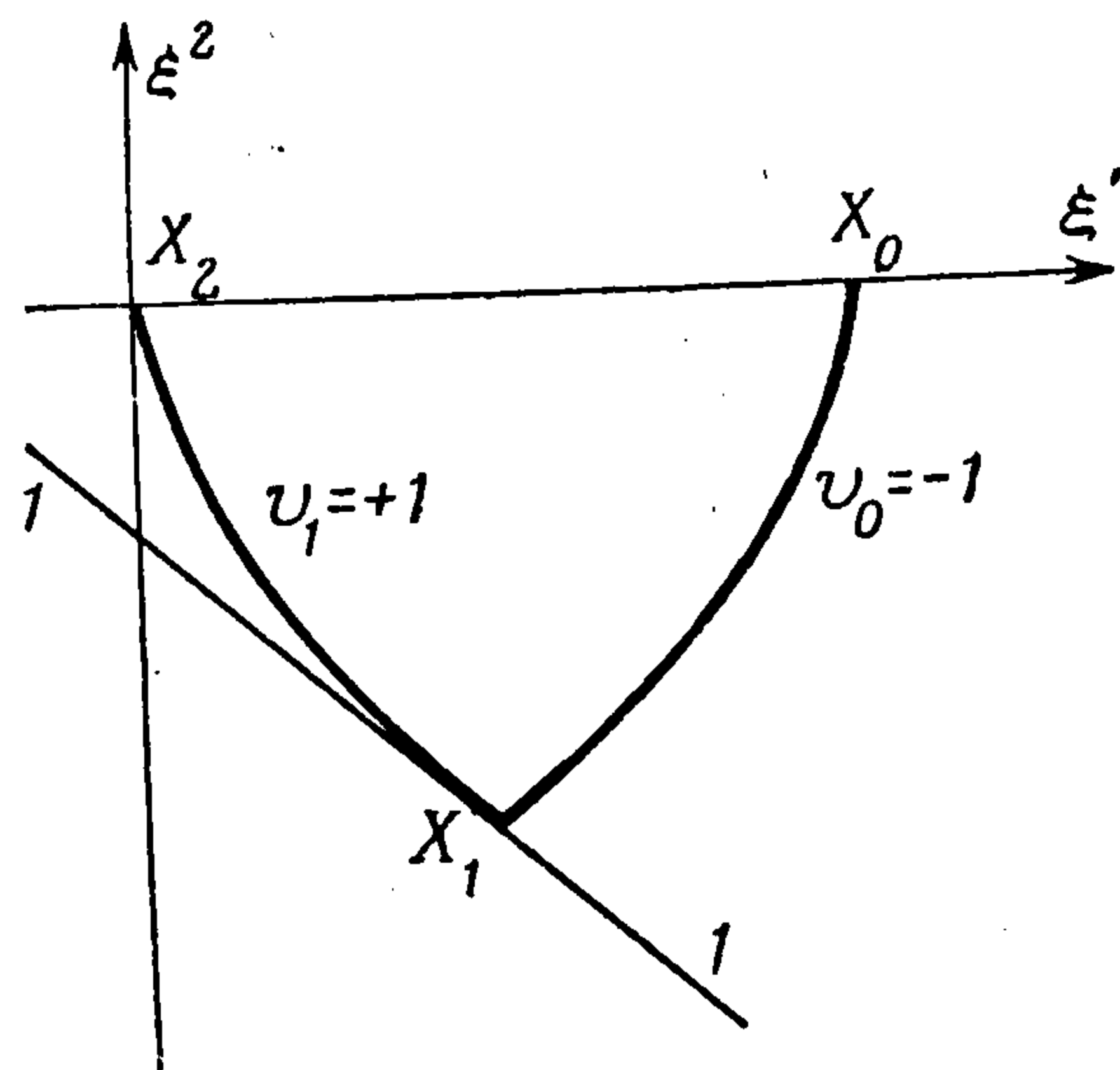
$$\Pi = \gamma_{n-1} Q_{n-1} \dots \gamma_0 Q_0$$

Положим, что величины  $y_k$ ,  $x_0$ ,  $\tau_0$  статистически не зависят одна от другой и имеют нулевое математическое ожидание. Вероятностные характеристики  $x_n$  находятся с использованием формулы (3.10):

$$M[x_n] = 0$$

$$D_n^x = \int_{t_0}^{t_n} \int_{t_0}^{t_n} S(\mu) CK_\varphi(\mu, \nu) C'S'(\nu) d\nu d\mu + \sum_{k=1}^n T_k D_k^y T_k' + \Pi (D_0^x + \Delta_0 \Delta_0' D_0^\tau) \Pi' \quad (3.12)$$

причем  $D_k^y$  — корреляционная матрица ошибок измерения, а  $D_0^x$  — ошибок в начальных условиях;  $D_0^\tau$  — дисперсия  $\tau_0$ .



Фиг. 2

В качестве меры разброса координат в конце переходного процесса можно взять след матрицы  $D_n^x$  или какую-либо другую величину, составленную из ее элементов. Принятую меру обозначим  $I$ . Она является сложной функцией составляющих матриц-строк  $m_k$ . Для уменьшения разброса  $x_n$  можно так подобрать  $m_k$ , чтобы величина  $I$  достигла своего наименьшего значения.

Положение гиперплоскостей переключения (3.4) соответствующее этим

значениям  $m_k$ , назовем оптимальным.

4. Рассмотрим пример. Пусть переходный процесс в объекте определяется следующим уравнением и начальными условиями:

$$\ddot{z} = u + \varphi, \quad z_0 > 0, \quad \dot{z}_0 = 0$$

Область управлений  $|u| \leq 1$ .

Запишем уравнение и начальные условия объекта в стандартной форме

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu + C\varphi \quad (4.1)$$

где

$$\xi = \begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi_0 = \begin{pmatrix} z_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Решение задачи при  $\varphi = 0$  дается в книге [1]. Соответствующая фазовая траектория приведена на фиг. 2. Она состоит из двух участков парабол. Переходный процесс длится время  $T = 2\sqrt{z_0}$ , причем первую половину времени  $u = U_0 = -1$ , а — вторую  $u = U_1 = 1$ .

Заметим, что уравнение касательной 1 (фиг. 2) ко второй параболе в точке переключения управлений имеет вид

$$x^2 + \frac{2}{T} x' = 0 \quad (4.3)$$

Здесь индексы над буквами обозначают номер составляющей соответствующего столбца; уравнение (4.3) — уравнение касательной к «линии переключения» в точке переключения для невозмущенного оптимального процесса. В понятие «линии переключения», в данном случае, вкладывается тот же смысл, что и в книге [1].

Переходя к рассмотрению влияния помех на этот переходный процесс, допустим, что ошибки во временах переключения в первом варианте реализации оптимального управления и ошибки в измерении фазовых координат во втором, равны нулю, т. е.  $D^r = 0$ ,  $D_k^y = 0$ ,  $D_0^x = 0$ . В силу специального вида матрицы  $A$ , имеем

$$e^{At} = E + At = \begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (4.4)$$

Поэтому след матрицы корреляционных моментов  $x_n$ , определенной формулой (2.11), имеет следующее выражение:

$$I_1 = \text{Sp } D_2^x = \int_0^T \int_0^T [(T - \mu)(T - \nu) + 1] K_\varphi(\mu, \nu) d\nu d\mu \quad (4.5)$$

Если управление осуществляется в функции фазовых координат объекта, то разброс координат в конце переходного процесса определяется формулой (3.12). Входящие в нее величины имеют следующие выражения:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1^- &= - \begin{vmatrix} T/2 \\ 1 \end{vmatrix}, & \dot{X}_1^+ &= - \begin{vmatrix} T/2 \\ -1 \end{vmatrix}, & \dot{X}_2^- &= \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}, & \dot{X}_2^+ &= 0 \\ P_0(\mu) &= \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & T/2 - \mu \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (0 \leq \mu \leq T/2), \\ 0 & (T/2 < \mu \leq T), \end{cases} & P_1(\mu) &= \begin{cases} 0 & (0 \leq \mu \leq T/2) \\ \begin{vmatrix} 1 & T - \mu \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (T/2 < \mu \leq T) \end{cases} \\ \gamma_0 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2\alpha_1}{1 + \alpha_1 T/2} & \frac{\alpha_1 T/2 - 1}{1 + \alpha_1 T/2} \end{vmatrix}, & \gamma_1 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha_2 & 0 \end{vmatrix}, & Q_1 &= \begin{vmatrix} 1 & T/2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Здесь обозначено

$$\alpha_1 = \frac{m_1^1}{m_1^2}, \quad \alpha_2 = \frac{m_2^1}{m_2^2}$$

причем  $m^1$ ,  $m^2$  — составляющие матрицы  $m$ .

Подставим необходимые выражения в (3.11), (3.12) и вычислим след матрицы корреляционных моментов  $x_n$

$$I = \text{sp } D_2^x = (1 + \alpha_2^2) \left[ \left( \frac{1 - \alpha_1 T/2}{1 + \alpha_1 T/2} \right)^2 M_1 - 2 \frac{1 - \alpha_1 T/2}{1 + \alpha_1 T/2} M_2 + M_3 \right] \quad (4.6)$$

Обозначения таковы:

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_0^{T/2} \int_0^{T/2} \mu \nu K_\varphi(\mu, \nu) d\nu d\mu, & M_2 &= \int_0^{T/2} \int_{T/2}^T \mu (T - \nu) K_\varphi(\mu, \nu) d\nu d\mu \\ M_3 &= \int_{T/2}^T \int_{T/2}^T (T - \mu)(T - \nu) K_\varphi(\mu, \nu) d\nu d\mu \end{aligned} \quad (4.7)$$

Величина (4.6) достигает своего минимального значения

$$I_2 = M_3 - \frac{(M_2)^2}{M_1} \quad (4.8)$$

при следующих значениях  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ :

$$\alpha_1^* = \frac{2}{T} \frac{1 - M_2/M_1}{1 + M_2/M_1}, \quad \alpha_2^* = 0 \quad (4.9)$$

Если положить  $\alpha_2 = 0$ , а в качестве линии первого переключения взять линию (4.3) ( $\alpha_1 = 2/T$ ), то разброс координат определится величиной

$$I_3 = M_3 \quad (4.10)$$

Сравним величины  $I_1, I_2, I_3$  для двух видов случайных возмущений: с малым и с большим временем корреляции. Если время корреляции значительно меньше  $T$ , при расчете можно положить

$$K_\varphi(\mu, \nu) = H\delta(\mu - \nu)$$

где  $\delta$  — дельта-функция, а  $H = \text{const}$ .

В результате расчета получаем

$$\alpha_1^* = \frac{2}{T}, \quad I_1 = H \left( \frac{T^3}{3} + T \right), \quad I_2 = \frac{HT^3}{24}, \quad I_3 = \frac{HT^3}{24}$$

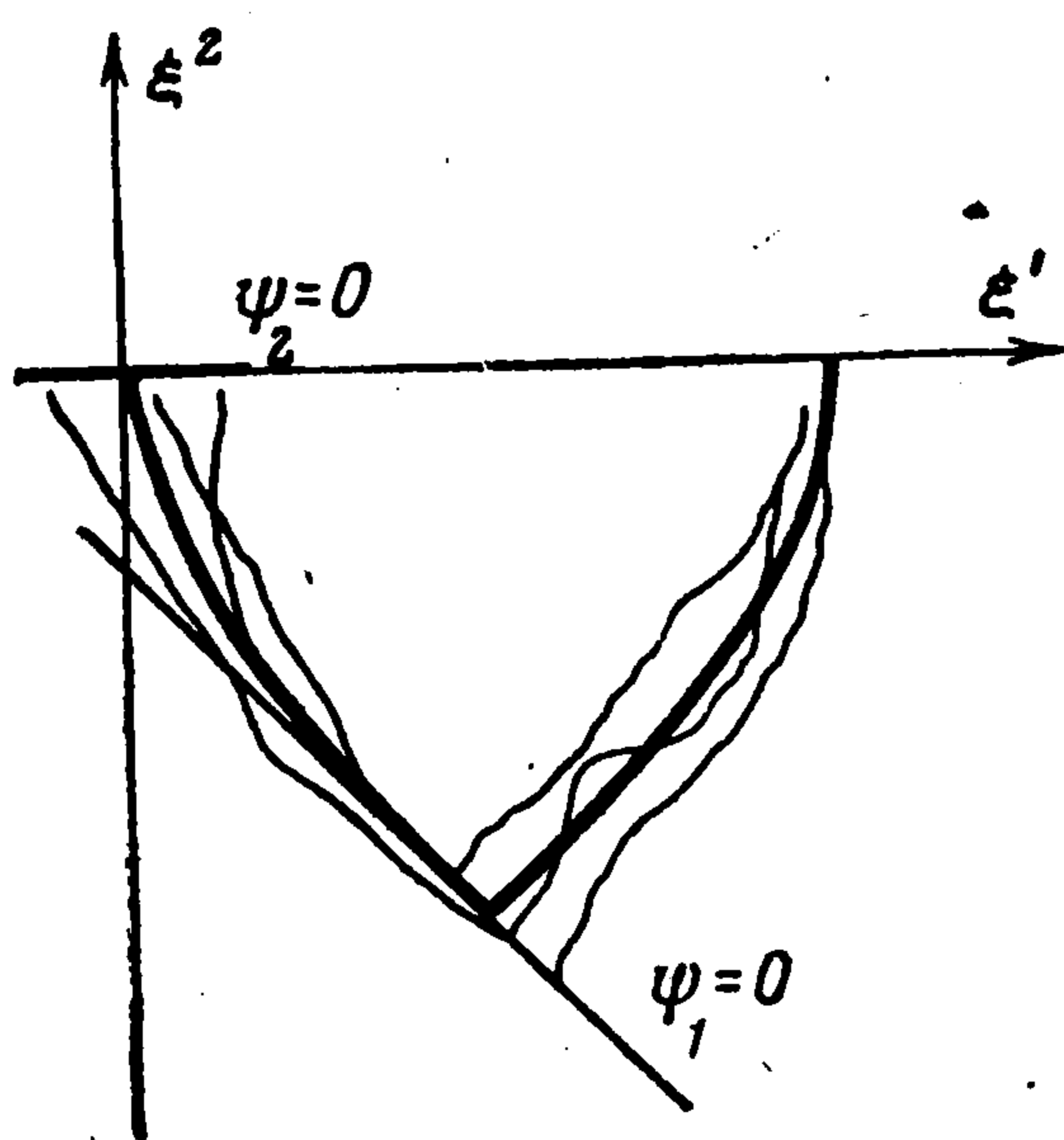
Для рассмотренного вида помехи оптимальное положение линии переключения, при котором  $I = \min$ , совпадает с линией 1. Случайные фазовые траектории для этого случая показаны на фиг. 3. Если время корреляции случайного процесса  $\varphi$  значительно превосходит время невозмущенного переходного процесса  $T$ , то приближенно, можно принять

$$K_\varphi(\mu, \nu) = R = \text{const}$$

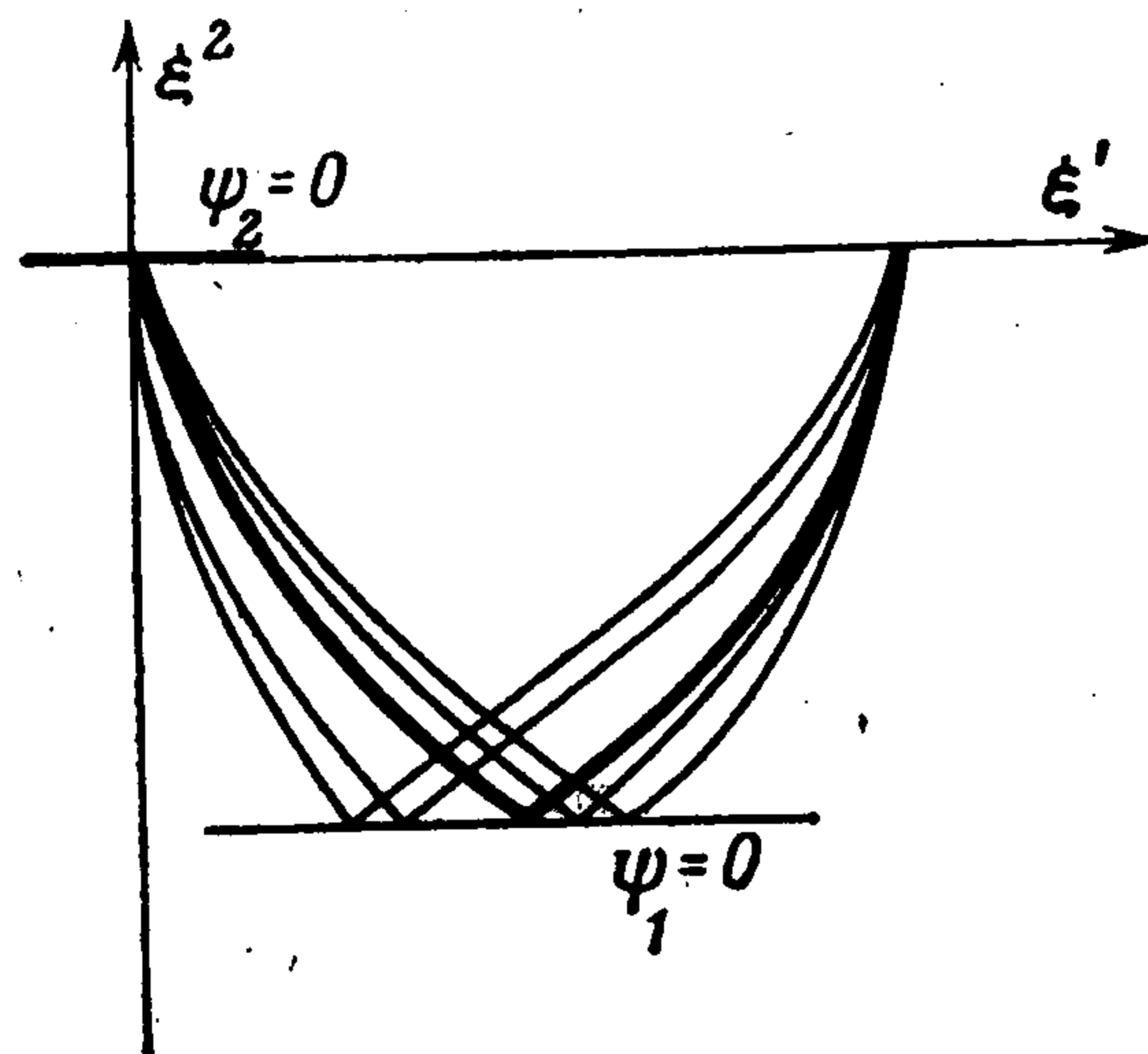
Соответствующий расчет дает

$$\alpha_1^* = 0, \quad I_1 = R \left( \frac{T^4}{4} + T^2 \right), \quad I_2 = 0, \quad I_3 = \frac{RT^4}{64}$$

Оптимальное положение линий переключения, когда объект подвергается действию помех с большим временем корреляции, показано на фиг. 4.



Фиг. 3



Фиг. 4

5. Приведем без вывода формулы, аналогичные (2.11), (3.12), если свойства объекта тоже случайны и определяются матрицами  $A + a, B + b, C + c$ , где  $a, b, c$  — центрированные случайные составляющие, которые будем считать малыми.

Если оптимальное управление реализуется в функции времени, то матрица корреляционных моментов  $x_n$  имеет вид

$$D_n^x = \exp [A (t_n - t_0)] D_0^x \exp [A' (t_n - t_0)] + \sum_{k=0}^n \exp [A (t_n - t_0)] \Delta_k \times \\ \times \Delta_k' \exp [A' (t_n - t_k)] D_k^x + \int_{t_0}^{t_n} \int_{t_0}^{t_n} \exp [A (t_n - \mu)] [CK_\varphi(\mu, \nu) C' + \\ + N(\mu, \nu)] \exp [A' (t_n - \nu)] d\nu d\mu \quad (5.1)$$

Когда оптимальное управление осуществляется в функции фазовых координат объекта, корреляционная матрица разброса такова:

$$D_n^x = \sum_{k=1}^n T_k D_k^y T_k' + \Pi (D_0^x + \Delta_0 \Delta_0' D_0^y) \Pi' + \int_{t_0}^{t_n} \int_{t_0}^{t_n} S(\mu) [CK_\varphi(\mu, \nu) C' + N(\mu, \nu)] S'(\nu) d\nu d\mu \quad (5.2)$$

В формулах (5.1), (5.2) матрица  $N$  означает следующее: (5.3)

$$N(\mu, \nu) = M \{aX(\mu) + bU(\mu) + c\Phi(\mu)\} \{X'(\nu) a' + U'(\nu) b' + \Phi'(\nu) c'\}$$

Остальные обозначения те же, что и выше.

Пусть, например, поведение объекта описывается уравнением

$$\ddot{z} = (1 + \varepsilon) u \quad (5.4)$$

где  $\varepsilon$  — малая случайная величина с нулевым средним значением. Начальные условия и ограничения на управления возьмем такие же, как в § 4. Тогда невозмущенный переходный процесс (при  $\varepsilon = 0$ ) и параметры уравнений объекта в стандартной форме будут те же, что в § 4, а матрица  $b$  примет вид

$$b = C\varepsilon \quad (5.5)$$

Сопоставление соответствующих формул показывает, что решение задачи о разбросе в конце переходного процесса в данном случае дается формулами (4.5), (4.6), (4.7), (4.9), если в них вместо  $K_\varphi(\mu, \nu)$  подставить  $D^\varepsilon U(\mu) U(\nu)$ , где  $D^\varepsilon$  — дисперсия  $\varepsilon$ .

Результаты вычислений таковы:

$$\alpha_1^* = \infty, \quad I_1 = D^\varepsilon \frac{T^4}{16}$$

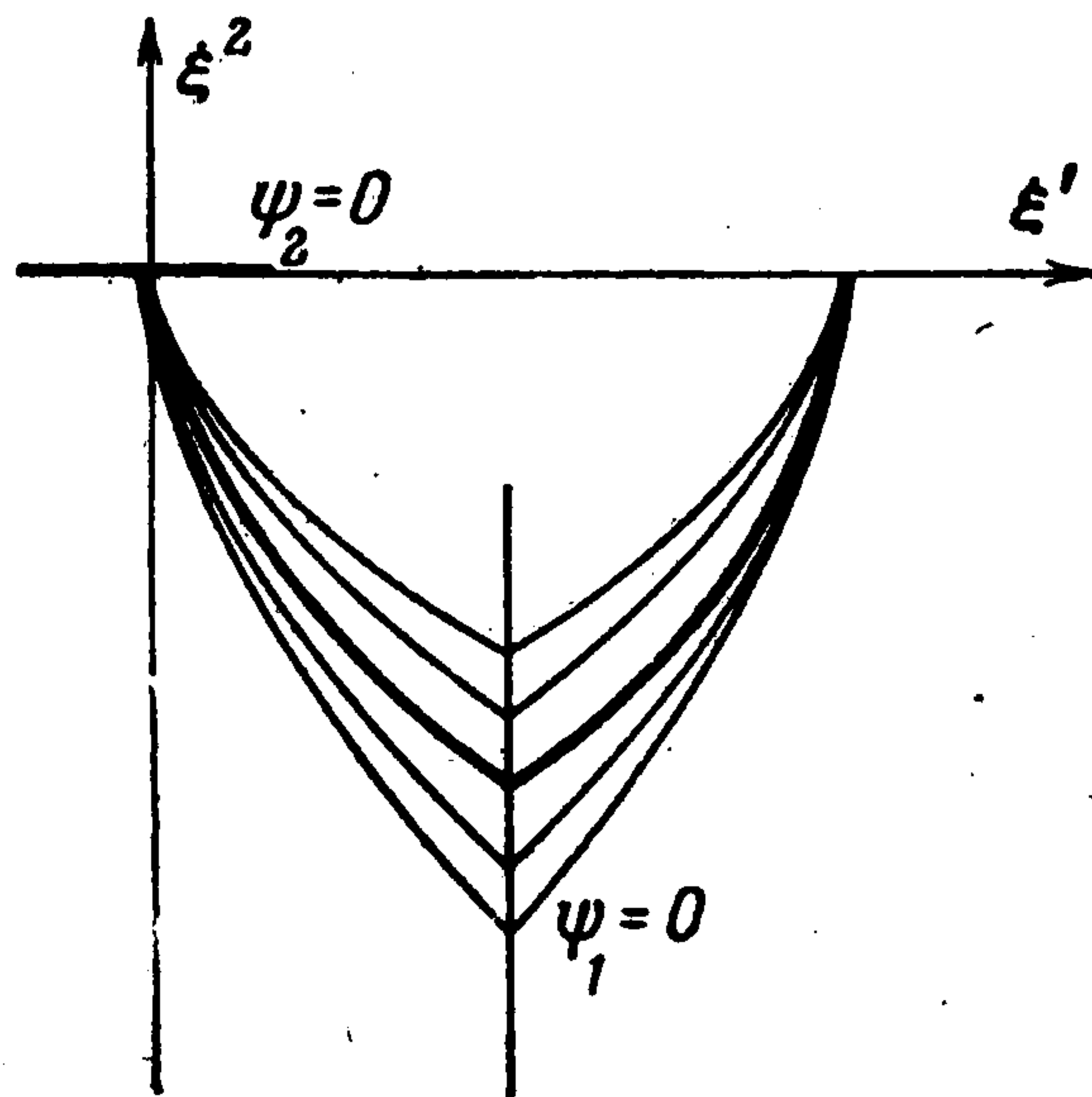
$$I_2 = 0, \quad I_3 = D^\varepsilon \frac{T^4}{64}$$

Оптимальное положение поверхностей переключения и случайные фазовые траектории показаны на фиг. 5.

Поступила 4 XII 1962

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Гостехиздат, 1954.
3. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. Гостехиздат, 1952.
4. Пугачев В. С. Теория случайных функций. Физматгиз, 1960.



Фиг. 5