Прикладная математика и механика. Том XXVII, 1963

К ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ВРЕМЕНИ

С. Н. Шиманов

(Свердловск)

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и последействием (запаздыванием). Изучение такого рода систем представляет интерес, в частности, для систем автоматического регулирования.

Исследование опирается на методику рассмотрения уравнений с запаздыванием по времени в функциональном пространстве непрерывных функций $C_{-\tau 0}$, предложенную Н. Н. Красовским [1,2].

Показано, что спектр оператора монодромии $U(\omega, t_0)$ не зависит от t_0 и определяет асимптотическую устойчивость или неустойчивость движения $x = 0$. Построена сопряженная система дифференциальных уравнений с опережением по времени и с периодическими коэффициентами. Дано явное выражение первых интегралов рассматриваемой системы (1.1) через решения сопряженной системы. Выяснена связь между спектрами операторов монодромии исходной и сопряженной систем, получен аналитический вид собственных векторов и частных решений этих систем, продолжимых на всю временную ось от $-\infty$ до $+\infty$.

Показано, что в пространстве непрерывных функций $C_{-\tau 0}$, в котором рассматриваются решения системы (1.1), может быть выделен конечномерный периодический по t базис, на котором движение системы (1.1) описывает система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В дополнительном подпространстве норма всякого решения убывает по закону экспоненты с достаточно большим показателем, так как спектральный радиус оператора монодромии может быть сделан сколь угодно малым. Последнее обстоятельство найдет свое применение как в теории устойчивости и колебаний, так и в задачах оптимального управления для систем с запаздыванием.

§ 1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с запаздыванием вида

$$\frac{dx_s(t)}{dt} = F_s\,(t,\, x_1(t+\vartheta), \ldots, x_n(t+\vartheta)) \tag{1.1}$$

Здесь

$$F_s\,(t,\, x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta)) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{e=1}^{k} p_{sje}(t)\, x_j(-\tau_e) + \sum_{j=1}^{n} \int_{-\tau}^{0} f_{sj}(t, \xi)\, x_j(\xi)\, d\xi$$

Периодические и непрерывные функции времени $p_{sje}(t)$ имеют период ω. Функции $f_{sj}(t, \xi)$ непрерывны по t и ξ в области $-\tau \leqslant \xi \leqslant 0$, $-\infty < t < +\infty$ по отношению к t они периодичны с периодом ω; время τ_e — запаздывания в системе.

Обозначим через $x(\varphi(\vartheta), t_0, t)$ решение системы (1.1) с начальной функцией $\varphi(\vartheta) = \{\varphi_s(\vartheta),\ s = 1, \ldots, n;\ -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0\}$.

В качестве элемента решения системы (1.1) будем рассматривать отрезок траектории $x(\varphi(\vartheta), t_0, t + \vartheta)$. При этом системе уравнений (1.1) в функциональном пространстве $C_{-\tau 0}$ непрерывных функций на интервале $(-\tau, 0)$ с нормой $\|x(\vartheta)\|_{-\tau 0} = \sup(|x_1(\vartheta)|, \ldots, |x_n(\vartheta)|, -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0)$ будет соответствовать система «обыкновенных» дифференциальных уравнений с операторной правой частью

$$\frac{dx_t(\vartheta)}{dt} = P(t)\, x_t(\vartheta) \qquad (\Delta t > 0) \tag{1.2}$$

где $x_t(\vartheta) = x(t+\vartheta) = \{x_s(t+\vartheta), s = 1, \ldots, n\}$, а оператор $P(t)$ определен следующим образом:

$$P(t)\, x(\vartheta) = \tag{1.3}$$

$$= \left\{\frac{dx_k(\vartheta)}{d\vartheta} \text{ при } \tau \leqslant \vartheta < 0, \quad F_k(t, x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta)) \text{ при } \vartheta = 0,\ k = 1, \ldots, n\right\}$$

При фиксированном $t > t_0$ элемент решения $x_t(\vartheta) = x(\varphi(\vartheta), t_0, t+\vartheta)$ можно рассматривать как образ элемента $\varphi(\vartheta) \in C_{-\tau 0}$ при некотором отображении

$$x_t(\vartheta) = T(t, t_0)\, \varphi(\vartheta) \qquad (t \geqslant t_0) \tag{1.4}$$

с оператором $T(t, t_0)$, $T(t_0, t_0) = J$ — тождественный оператор

$$Jx(\vartheta) \equiv x(\vartheta), \quad T(t, t_0)\, \varphi(\vartheta) = x(\varphi(\vartheta), t_0, t+\vartheta)$$

Отметим некоторые основные свойства оператора $T(t, t_0)$.

1. Оператор $T(t, t_0)$ линейный.

2. Оператор $T(t, t_0)$ обладает полугрупповым свойством. Для любых t, t_1 имеет место условие

$$T(t+t_1, t_0) = T(t_1+t, t)\, T(t, t_0) \qquad (t_1 > 0,\ t > t_0) \tag{1.5}$$

3. Оператор $T(t, t_0)$ удовлетворяет условию

$$T(t+\omega, t_0) = T(t, t_0)\, T(t_0+\omega, t_0) \qquad (t > t_0) \tag{1.6}$$

Так как система (1.2) периодически зависит от времени t, то

$$x_{t+\omega}(\vartheta) = x(\varphi(\vartheta), t_0, t+\omega+\vartheta)$$

будет решением системы (1.2) и при $\vartheta = 0$ системы (1.1).

Но тогда найдется элемент $\varphi^*(\vartheta)$ пространства $C_{-\tau 0}$ такой, что $x_{t+\omega} = x(\varphi^*(\vartheta), t_0, t+\vartheta)$, $x(\varphi(\vartheta), t_0, t_0+\omega+\vartheta) = \varphi^*(\vartheta)$. Имеем

$$\varphi^*(\vartheta) = T(t_0+\omega, t_0)\, \varphi(\vartheta), \qquad x_{t+\omega} = T(t, t_0)\, \varphi^*(\vartheta)$$

$$x_{t+\omega}(\vartheta) = T(t+\omega, t_0)\, \varphi(\vartheta)$$

Отсюда следует (1.6).

4. Полагая $t_1 = \omega$ в (1.5) и учитывая (1.6), получим

$$T(t, t_0)\, T(t_0+\omega, t_0) = T(t+\omega, t)\, T(t, t_0) \tag{1.7}$$

Имеем также в силу (1.5) (1.7)

$$x_{t+\omega}(\vartheta) = T(t+\omega, t)\, x_t(\vartheta) = T(t+\omega, t)\, T(t, t_0)\, \varphi(\vartheta) =$$
$$= T(t, t_0)\, T(t_0+\omega, t_0)\, \varphi(\vartheta) = T(t, t_0)\, T(t_0+\omega, t_0)\, T^{-1}(t, t_0)\, x_t(\vartheta)$$
$$T^{-1}(t, t_0)\, x_t(\vartheta) = \varphi(\vartheta)$$

Отсюда

$$x_{t+\omega}(\vartheta) = T(t, t_0)\, T(t_0+\omega, t_0)\, T^{-1}(t, t_0)\, x_t(\vartheta) \tag{1.8}$$

5. Пусть $t = n\omega + t^*$, $t_0 \leqslant t^* \leqslant t_0 + \omega$, n — целое положительное число. Применяя формулу (1.6) n раз, получим

$$T(t, t_0) = T(t^*, t_0) T^n (t_0 + \omega, t_0) \tag{1.9}$$

Оператор $T(t_0 + \omega, t_0)$ в дальнейшем играет существенную роль[1]. Ниже будем обозначать этот оператор символом $U(\omega, t_0)$.

§ 2. Оператор $U(\omega, t_0) = T(t_0 + \omega, t_0)$ вполне непрерывен на линейном нормированном пространстве $C_{-\tau 0}$ непрерывных функций, так как он ограничен в силу (27.12) [1] и преобразует непрерывные функции $x(\vartheta) \in C_{-\tau 0}$ в функции равностепенно непрерывные ([1], стр. 158). Рассмотрим уравнение

$$(U(\omega, t_0) - \rho J) x(\vartheta) = 0 \tag{2.1}$$

Здесь J — тождественный оператор, ρ — комплексное число, $x(\vartheta) \in C_{-\tau 0}$. Так как оператор $U(\omega, t_0)$ вполне непрерывен, то уравнение (2.1) может допускать нетривиальные решения при счетном количестве значений ρ_j. Эти значения называются собственными числами оператора $U(\omega, t_0)$. Для каждого ρ_j уравнение (2.1) имеет конечное число — n_j линейно независимых собственных векторов — $x^{(j)}(\vartheta)$ оператора $U(\omega, t_0)$. Существует число n_0, не зависящее от номера j, что $n_j \leqslant n_0$. Собственные числа $\rho_j (j = 1, 2, \ldots)$ и точка $\rho = 0$ образуют спектр оператора $U(\omega, t_0)$. В области $|\rho| \geqslant r$ (где r — произвольное положительное число) имеется лишь конечное число собственных чисел оператора $U(\omega, t_0)$ (см. [4]).

Теорема 2.1. Спектр $\{\rho_j\}$ оператора $U(\omega, t_0)$ не зависит от t_0. Собственные вектора $x_t^{(j)}(\vartheta)$, $x_{t_0}^{(j)}(\vartheta)$ операторов $U(\omega, t)$, $U(\omega, t_0)$, соответствующие собственному числу ρ_j, связаны соотношениями

$$x_t^{(j)}(\vartheta) = T(t, t_0) x_{t_0}^{(j)}(\vartheta), \quad x_{t_0}^{(j)}(\vartheta) = T^{-1}(t, t_0) x_t^{(j)}(\vartheta) \tag{2.2}$$

и $x_t^{(j)}(\vartheta)$ имеет вид

$$x_t^{(j)}(\vartheta) = \rho_j^{\frac{t+\vartheta}{\omega}} u_j(t + \vartheta) \tag{2.3}$$

где $u_j(t + \vartheta)$ — периодическая вектор-функция периода ω по t; функция $x_t^{(j)}(\vartheta)$ удовлетворяет системе (1.2) не только при $t > t_0$, но и при $t < t_0$.

Доказательство. Пусть $x_{t_0}^{(j)}(\vartheta)$ — собственный вектор оператора $U(\omega, t_0)$ (t_0 — произвольно), соответствующий числу ρ_j. Имеет место тождество

$$(U(\omega, t_0) - \rho_j J) x_{t_0}^{(j)}(\vartheta) \equiv 0 \tag{2.4}$$

Подействовав на левую и правую часть тождества (2.4) оператором $T(t, t_0)$, $t > t_0$ и учитывая (1.7), получим тождество

$$U(\omega, t) T(t, t_0) x_{t_0}^{(j)}(\vartheta) \equiv \rho_j T(t, t_0) x_{t_0}^{(j)}(\vartheta) \tag{2.5}$$

Из (2.5) следует, что ρ_j будет также собственным числом, а $x_t^{(j)}(\vartheta) = T(t, t_0) x_{t_0}^{(j)}(\vartheta)$ будет собственным вектором оператора $U(\omega, t)$, $t > t_0$. Функция

$$x_t^{(j)}(\vartheta) = T(t, t_0) x_{t_0}^{(j)}(\vartheta)$$

при $t > t_0$ будет также решением системы (1.2). Из (2.5), учитывая (1.7) и (1.8), получим

$$x_{t+\omega}^{(j)}(\vartheta) = \rho_j x_t^{(j)}(\vartheta) \qquad (t > t_0) \tag{2.6}$$

[1] Этот оператор был использован Ю. М. Репиным для исследования уравнений с постоянным коэффициентами [7].

Из (2.6) следует формула (2.3) при $t > t_0$. Но нетрудно заметить, что $x_t^{(j)}(\vartheta)$, определенное формулой (2.3), при $t < t_0$ также удовлетворяет системе (2.1). Полагая $t_1 = t + l\omega > t_0$, l — целое, найдем, что $x_{t_1}^{(j)}(\vartheta)$ удовлетворяет системе (1.2), где t заменено на t_1. Учитывая периодичность $P(t)$ и $x_{t_1}^{(j)}(\vartheta) = x_{t+l\omega}^{(j)}(\vartheta) = \rho_j^{l\omega} x_t^{(j)}(\vartheta)$, можно установить, что функция $x_t^{(j)}(\vartheta)$, определенная формулой (2.3), удовлетворяет уравнению (1.2) при $t < t_0$.

Допустим, что $x_{t_1}^*(\vartheta)$ — собственный вектор, ρ^* — собственное число оператора $U(\omega, t_1)$, а $x_t(\vartheta)$ — решение системы (1.2) с начальной функцией $x_{t_1}^*(\vartheta)$ в момент времени t_1. Это решение продолжимо по всей числовой оси t. Поэтому найдется функция $x_{t_0}^*(\vartheta)$, что $x_{t_0}^*(\vartheta) = T^{-1}(t, t_0)\, x_t^*(\vartheta)$. Учитывая последнюю формулу и (1.7), из тождества $U(\omega, t_1)\, x_{t_1}(\vartheta) \equiv \rho^* x_{t_1}(\vartheta)$ получим тождество $U(\omega, t_0)\, x_{t_0}^*(\vartheta) \equiv \rho^* x_{t_0}^*(\vartheta)$.

Таким образом, спектр оператора $U(\omega, t_0)$ не зависит от t_0 и справедливы формулы (2.2), (2.3).

Система уравнений (1.2) имеет, вообще говоря, счетное число частных решений, определенных на всей оси времени t. Допустим, что $\rho = \rho^*$ таково, что уравнение

$$(U(\omega, t_0) - \rho^* J)^k x(\vartheta) \equiv 0$$

имеет нетривиальное решение. Тогда система уравнений (1.2) допускает решения вида

$$\frac{(t+\vartheta)^{k-1}}{(k-1)!} u_1(t+\vartheta) + \frac{(t+\vartheta)^{k-2}}{(k-2)!} u_2(t+\vartheta) + \ldots + u_k(t+\vartheta)$$

где $u_1(t+\vartheta), \ldots, u_k(t+\vartheta)$ — вектор-функции с периодом ω по t.

§ 3. Допустим, что все собственные числа ρ_j удовлетворяют условию $|\rho_j| < 1$. Известно [3], что спектральный радиус r_u оператора $U(\omega, t_0)$ определяется формулой

$$r_u = \lim \| U^n(\omega, t_0) \|^{1/n} \quad \text{на } [-\tau 0] \quad \text{при } n \to \infty$$

Поэтому найдется целое число l такое, что

$$\| U^l(\omega, t_0) \|_{-\tau 0}^{1/l} = q < 1 \quad \text{на } [-\tau, 0]$$

Пусть $\| T(t, t_0) \| < K$ на интервале $[-\tau, 0]$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \omega l$, $t = \omega l \sigma + t^*$, $t_0 \leqslant t^* \leqslant t_0 + \omega l$. Тогда из (1.9) следует

$$\| T(t, t_0) \| < \| T(t^*, t_0) \|, \qquad \| U^l(\omega, t_0) \|^\sigma < K q^\sigma \tag{3.1}$$

Тогда имеет место следующая оценка

$$\| T(t, t_0) \|_{-\tau 0} < K e^{-\alpha (t - t_0)} e^{\alpha \omega l} \qquad \left(\alpha = -\frac{\log q}{\omega}\right) \tag{3.2}$$

при всех $t > t_0$, $r_u < q < 1$. Всякое решение системы (1.1) убывает по норме быстрее экспоненты (3.2). Движение $x = 0$ асимптотически устойчиво. Если среди собственных чисел ρ_j оператора $U(\omega, t_0)$ найдутся по модулю большие единицы, то движение $x = 0$ неустойчиво. Среди решений системы (1.1) найдутся неограниченно возрастающие при $t \to \infty$.

§ 4. Рядом с системой (1.1) рассмотрим «сопряженную» систему дифференциальных уравнений с опережением по времени вида

$$\frac{dy_s(t)}{dt} = -F_s^*(t, y_1(t+\vartheta), \ldots, y_n(t+\vartheta)) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{4.1}$$

Здесь

$$F_s^*(t, y_1(\vartheta), \ldots, y_n(\vartheta)) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{k} p_{js\sigma}(t+\tau)\, y_j(\tau_\sigma) + \sum_{j=1}^{n} \int_{-\tau}^{0} f_{js}(t-\xi, \xi)\, y_j(-\xi)\, d\xi$$

Функции $p_{sj\sigma}(t)$, $f_{js}(t, \xi)$ те же самые, что и в системе (1.1). Система уравнений (4.1) играет роль сопряженной системы в теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Обозначим через $y(y_0(\vartheta), t_0, t)$ решение системы (4.1) при $t < t_0$ с начальной функцией $y_0(\vartheta)$, $\tau \geqslant \vartheta \geqslant 0$ при $t = t_0$. В качестве элемента решения будем рассматривать отрезок траектории на интервале $[t+\tau, t]$ $y(y_0(\vartheta), t_0, t+\vartheta)$. При этом системе уравнений (4.1) в функциональном пространстве $C_{-\tau 0}$ непрерывных функций $y(\vartheta)$ на интервале $\tau \geqslant \vartheta \geqslant 0$ с нормой $\|y(\vartheta)\|$ sup $(|y_1(\vartheta)|, \ldots |y_n(\vartheta)|, \tau \geqslant \vartheta \geqslant 0)$ будет соответствовать система «обыкновенных» дифференциальных уравнений с операторной правой частью

$$\frac{dy_t(\vartheta)}{dt} = -P^*(t)\, y_t(\vartheta) \qquad (\Delta t < 0) \tag{4.2}$$

где

$$y_t(\vartheta) = y(t+\vartheta) = \{y_s(t+\vartheta),\quad \tau \geqslant \vartheta \geqslant 0,\ s = t, \ldots, n\}$$

Оператор $P^*(t)$ определен следующим образом:

$$-P^*(t)\, y(\vartheta) =$$

$$= \left\{\frac{dy_k(\vartheta)}{d\vartheta} \text{ при } \tau \geqslant \vartheta > 0,\quad -F_k^*(t, y_1(\vartheta), \ldots, y_n(\vartheta)),\quad \vartheta = 0,\ k = 1, \ldots, n\right\}$$

При фиксированном t $(t < t_0)$ элемент решения $y_t(\vartheta) = y(y_0(\vartheta), t_0, t+\vartheta)$, $(\tau \geqslant \vartheta \geqslant 0)$ системы (4.2) можно рассматривать как образ элемента $y_0(\vartheta)$ при некотором отображении

$$y_t(\vartheta) = T^*(t, t_0)\, y_0(\vartheta) \qquad (t < t_0) \tag{4.3}$$

с оператором $T^*(t, t_0)$, $T^*(t_0, t_0) = J$, где J — тождественный оператор, $T^*(t, t_0)\, y_0(\vartheta) = y(y_0(\vartheta), t_0, t+\vartheta)$, $t < t_0$. Составим оператор

$$T^*(t_0 - \omega, t_0) = U^*(\omega, t_0) \tag{4.4}$$

где ω — период системы (1.1). Оператор $U^*(\omega, t_0)$ вполне непрерывен и для системы (4.1) играет ту же самую роль, что и оператор $U(\omega, t_0)$ для системы (1.1). Для операторов $T^*(t, t_0)$ и $U^*(t, t_0)$ справедливы те же самые свойства, что и для операторов T, U, отмеченные в §§ 1—3, только в направлении убывания времени. Последнее очевидно, так как при замене t на $-t$ система (4.1) переходит в систему с запаздыванием типа (1.1). В частности, каждому собственному числу ρ_j оператора $U^*(\omega, t_0)$ отвечает решение системы (4.1), продолжимое на всю числовую ось t $(-\infty, +\infty)$.

§ 5. Введем обозначение

$$(x(\vartheta), y(\vartheta), t) = \sum_{j=1}^{n} x_j(0) y_j(0) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \sum_{s=1}^{k} \int_0^{\tau_s} x_l(\xi - \tau_s) y_j(\xi) p_{jls}(t+\xi) d\xi -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \int_{-\tau}^{0} \left[\int_{-\vartheta}^{0} x_l(\xi + \vartheta) y_j(\xi) f_{jl}(\xi + t, \vartheta) d\xi \right] d\vartheta \qquad (5.1)$$

Здесь $x(\vartheta) = \{x_s(\vartheta), -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0\}$, $y(\vartheta) = \{y_s(\vartheta), \tau \geqslant \vartheta \geqslant 0\}$.

Непосредственным подсчетом в силу систем (1.2) и (4.2) получим тождество

$$(P(t) x(\vartheta), y(\vartheta), t) + (x(\vartheta), -P^*(t) y(\vartheta), t) \equiv - \frac{\partial (x(\vartheta), y(\vartheta), t)}{\partial t} \qquad (5.2)$$

Из тождества (5.2) следует, что для всякого частного решения $y_t(\vartheta)$ системы (4.1), продолжимого в направлении возрастания времени t $(t \geqslant t_0)$, выражение:

$$(x_t(\vartheta), y_t(\vartheta), t) = C \qquad (5.3)$$

будет первым интегралом системы (1.1) и (1.2), так как для любого решения $x_t(\vartheta)$ систем (1.1) и (5.3) будет постоянно. Из (5.3) имеем для указанных двух решений $x_t(\vartheta)$, $y_t(\vartheta)$

$$(x_{t+\omega}(\vartheta), y_{t+\omega}(\vartheta), t) - (x_t(\vartheta), y_{t+\omega}(\vartheta), t) = (x_t(\vartheta), y_t(\vartheta), t) - (x_t(\vartheta), y_{t+\omega}(\vartheta), t)$$

$$(U(\omega, t) x_t(\vartheta), \rho^{-1} y_t(\vartheta), t) = (x_t(\vartheta), U^*(\omega, t) \rho^{-1} y_t(\vartheta), t)$$

Таким образом, для любого собственного элемента $y(\vartheta)$ оператора $U^*(\omega, t_0)$ и любого $x(\vartheta) \in C_{-\tau 0}$ имеет место тождество

$$(U(\omega, t) x(\vartheta), y(\vartheta), t) = (x(\vartheta), U^*(\omega, t) y(\vartheta), t) \qquad (5.4)$$

Теорема 5.1. Собственные числа $\{\rho_j\}$ и $\{\rho_j^*\}$ операторов $U(\omega, t_0)$, $U^*(\omega, t_0)$ совпадают $(\rho_j = \rho_j^*,\ j = 1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Допустим, что ρ^* — собственное число оператора и $U^*(\omega, t_0)$. Покажем, что это число будет собственным числом оператора $U(\omega, t_0)$. Для этого достаточно показать, что уравнение $(U(\omega, t_0) - \rho^* I)\, x(\vartheta) = 0$ имеет нетривиальное решение. Допустим противное, что последний оператор на любом $x(\vartheta) \in C_{-\tau 0}$ (отличном от нуля) не равен тождественно нулю. Пусть числу ρ^* отвечает частное решение системы (4.1):

$$\rho^{*\frac{t+\vartheta}{\omega}} v(t + \vartheta)$$

Используя (5.3) или (5.4), найдем, что для любого $x(\vartheta)$ имеет место условие

$$((u(\omega, t_0) - \rho^* J)\, x(\vartheta), \rho^{*-(t_0+\vartheta)/\omega} v(t_0 + \vartheta), t_0) = 0 \qquad (5.5)$$

Таким образом, оператор $(U(\omega, t_0) - \rho^* J)$ имеет областью значений подпространство Λ пространства $C_{-\tau 0}$:

$$(x(\vartheta), \rho_j^{*-(t_0+\vartheta)/\omega} v(t_0 + \vartheta), t_0) = 0 \qquad (5.6)$$

На этом подпространстве Λ (5.6) рассмотрим уравнение

$$(U(\omega, t_0) - \rho^* J)\, x(\vartheta) = x^*(\vartheta) \qquad (5.7)$$

где $x^*(\vartheta)$ — произвольный элемент Λ. Чтобы уравнение (5.7) было разрешимо при любом $x^*(\vartheta) \in \Lambda$, достаточно, чтобы однородное уравнение на Λ имело единственное решение $x(\vartheta) \equiv 0$ [4] (теорема 2, стр. 445). В силу сделанного ранее предположения уравнение (5.7) имеет единственное решение и оно принадлежит Λ.

Выберем далее произвольный элемент $X(\vartheta) \notin \Lambda$. Рассмотрим элемент $x(\vartheta) = z(\vartheta) + X(\vartheta)$, где $z(\vartheta) \in \Lambda$ удовлетворяет уравнению

$$(U(\omega, t_0) - \rho^* J)\, z(\vartheta) = -(U(\omega, t_0) - \rho^* J)\, X(\vartheta)$$

Последнее уравнение разрешимо в силу предположения. Но тогда $z(\vartheta) + X(\vartheta)$ собственный элемент оператора $U(\omega, t_0)$, соответствующий числу ρ^*. Поэтому ρ^* — собственное число оператора $U(\omega, t_0)$.

Можно аналогичным способом показать, что справедливо и обратное положение. Теорема доказана.

Более того, можно показать, что размерности корневых множеств для уравнений

$$(U(\omega, t_0) - \rho J)^k x(\vartheta) = 0, \qquad (U^*(\omega, t_0) - \rho J)^k y(\vartheta) = 0 \tag{5.8}$$

совпадают при всех целых положительных k.

Рассмотрим уравнение (ρ — комплексное число)

$$(U(\omega, t_0) - \rho J)\, x(\vartheta) = b(\vartheta) \qquad (b(\vartheta) \in C_{-\tau 0}) \tag{5.9}$$

Если ρ не будет собственным числом оператора $U(\omega, t_0)$, то уравнение (5.9) имеет единственное решение. Если ρ — собственное число оператора $U(\omega, t_0)$, то оно будет также одновременно и собственным числом оператора $U^*(\omega, t_0)$. Пусть $y_1(\vartheta), \ldots, y_m(\vartheta)$ независимые собственные элементы оператора $U(\omega, t_0)$. Тогда необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (5.9) будут m условий

$$(b(\vartheta), y_j(\vartheta), t_0) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{5.10}$$

Доказательство этого предложения опустим. Используя последнее обстоятельство и (5.4), получим следующий результат. Пусть оператор $U(\omega, t_0)$ имеет конечное или счетное число собственных чисел ρ_j. Тогда для операторов $U(\omega, t_0)$ и $U^*(\omega, t_0)$ всегда возможно построить последовательности корневых элементов $x_j(\vartheta)$, $y_j(\vartheta)$, что они будут удовлетворять следующим условиям.

Если $x_j(\vartheta)$ — собственный элемент, то имеются условия

$$(x_j(\vartheta), y_\sigma(\vartheta), t_0) = \begin{cases} 1, & j = \sigma \\ 0, & j \neq \sigma \end{cases} \tag{5.11}$$

Если $x_j(\vartheta), x_{j+1}(\vartheta), \ldots, x_{j+m}(\vartheta)$ — составляют цепочку Жордана (x_j — собственный элемент, а $x_{j+1}, \ldots, x_{j+m}$ — присоединенные элементы) для оператора $U(\omega, t_0)$, то соответствующая цепочка Жордана для сопряженного оператора $U^*(\omega, t_0)$ будет $y_j(\vartheta), y_{j+1}(\vartheta), \ldots, y_{j+m}(\vartheta)$ и имеют место условия

$$(x_{j+k}(\vartheta), y_{j+m-\sigma}(\vartheta), t_0) = \begin{cases} 1, & \sigma = k \\ 0, & \rho \neq k \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant \sigma \leqslant m \\ 0 \leqslant k \leqslant m \end{pmatrix} \tag{5.12}$$

$$(x_{j+k}(\vartheta), y_\sigma(\vartheta), t_0) = 0 \qquad (\sigma < j,\ \sigma > j + m) \tag{5.13}$$

§ 6. Построим $N(\varepsilon)$ частных решений систем (1.2) и (4.2) $x_{j+k}(t+\vartheta)$, $y_{j+k}(t+\vartheta)$ соответствующих $N(\varepsilon)$ собственным числам ρ_j, удовлетворяющим условиям $|\rho_j| \geqslant \varepsilon$ (ε — произвольно малое положительное число).

Эти решения имеют вид

$$\begin{aligned} x_{j+k}(t+\vartheta) &= \rho_j^{(t+\vartheta)/\omega}\Phi_{j+k}(t+\vartheta,\ u(t+\vartheta)) \qquad (-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0) \\ y_{j+k}(t+\vartheta) &= \rho_j^{-(t+\vartheta)/\omega}\Phi_{j+k}(t+\vartheta,\ v(t+\vartheta)) \qquad (\tau \geqslant \vartheta \geqslant 0) \end{aligned} \quad (k=0,1,\ldots,m) \tag{6.1}$$

Здесь

$$\Phi_{j+k}(t_1,\ u(t)) = \frac{t_1^k}{k!}u_j(t) + \ldots + t_1 u_{j+k-1}(t) + u_{j+k}(t) \tag{6.2}$$

Вектор-функции $u_j(t), \ldots, u_{j+k}(t)$, $v_j(t) \ldots, v_{j+k}(t)$ имеют период ω.

Если ρ_j не соответствуют присоединенные элементы, то $k = 0$ в решениях (6.1); если ρ_j отвечает m присоединенных элементов, то $k = 0,1,\ldots, m$ в формулах (6.1). Если имеет место соотношение (5.11), то имеем

$$(\Phi_j(\vartheta,\ u(t+\vartheta)),\ \Phi_\sigma(\vartheta,\ v(t+\vartheta)),\ t) = \begin{cases} 1, & j = \sigma \\ 0, & j \neq \sigma \end{cases} \tag{6.3}$$

Если имеют место соотношения (5.12) и (5.13), то имеем

$$(\Phi_{j+k}(\vartheta,\ u(t+\vartheta)),\ \Phi_{j+m-\sigma}(\vartheta,\ v(t+\vartheta)),\ t) = \begin{cases} 1, & \sigma = k \\ 0, & \sigma \neq k \end{cases} \quad (\sigma,\ k = 0,\ldots, m) \tag{6.4}$$

$$(\Phi_{j+k}(\vartheta,\ u(t+\vartheta)),\ \Phi_{j\sigma}(\vartheta,\ v(t+\vartheta)),\ t) = 0 \qquad (\sigma < j,\ \sigma > j+m) \tag{6.5}$$

Произвольный элемент $x(\vartheta)$ пространства $C_{-\tau 0}$ представим в виде

$$x(\vartheta) = \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} a_j\Phi_j(\vartheta,\ u(t+\vartheta))\,\rho_j^{(t_0+\vartheta)/\omega} + z_t(\vartheta) \tag{6.6}$$

где

$$a_j = (x(\vartheta),\ \rho_j^{-(t_0+\vartheta)/\omega}\Phi_j(\vartheta,\ v(t+\vartheta)),\ t)$$

если имеет место для номера j формула (6.3) и

$$a_{j+k} = (x(\vartheta),\ \rho_j^{-(t_0+\vartheta)/\omega}\Phi_{j+m-k}(\vartheta,\ v(t+\vartheta)),\ t) \qquad (k = 0,\ldots, m) \tag{6.7}$$

если имеют место для элементов с номерами от j до $j+m$ формулы (6.4), (6.5). Тогда $z_t(\vartheta)$ в (6.6) удовлетворяет условиям

$$f_j(z_t(\vartheta)) \equiv (z_t(\vartheta)\,\rho_j^{-\vartheta/\omega}\Phi_j(\vartheta,\ v(t+\vartheta)),\ t) = 0 \qquad (j = 1,\ldots, N(\varepsilon)) \tag{6.8}$$

Нетрудно показать, что представление (6.6) однозначно определяет $a_1, \ldots a_N$, $z_t(\vartheta)$.

Вычисляя выражение $dx_t(\vartheta)/dt - P(t)\,x_t(\vartheta)$, считая, что $x(\vartheta)$ имеет представление (6.6), получим систему дифференциальных уравнений в переменных $a_1, \ldots, a_N$, $z(\vartheta)$, соответствующую системе (1.2)

$$\frac{da_j}{dt} = \frac{1}{\omega}a_j \log \rho_j - a_{j+1} \qquad (j = 1,\ldots, N(\varepsilon)) \tag{6.9}$$

$$\frac{dz_t(\vartheta)}{dt} = P(t)\,z_t(\vartheta), \qquad f_j[z_t(\vartheta)] = 0 \qquad (j = 1,\ldots, N(\varepsilon)) \tag{6.10}$$

Здесь в уравнениях (6.9) последнее слагаемое a_{j+1} отсутствует, если j-элементу не отвечают присоединенные элементы; если j-элементу соответствует m присоединенных, то слагаемое a_{j+1} входит во все уравнения с номерами от j до $j+m-1$ и не входит в уравнение с номером $j+m$.

Нетрудно показать, что если $z_t(\vartheta)$ удовлетворяет условиям (6.8), то и элемент $dz_t(\vartheta)/dt - P(t)\, z_t(\vartheta)$ также принадлежит подпространству (6.8).

Если составить оператор $U(\omega, t_0)$ на подпространстве (6.8) для уравнения (6.10), то легко убедиться в том, что его спектр будет содержать все собственные числа ρ_j оператора $U(\omega, t_0)$ на $C_{-\tau 0}$, исключая первые $N(\varepsilon)\ \rho_j$ $(j = 1, \ldots, N(\varepsilon))$, удовлетворяющие условию $|\rho_j| \geqslant \varepsilon$. Поэтому норма всякого решения $z_t(\vartheta)$ уравнения (6.10) будет убывать быстрее экспоненты $L \exp t / \omega \log \varepsilon$, где $\varepsilon < 1$, а L — некоторое положительное число.

Таким образом, пришли к следующему результату. В пространстве $C_{-\tau 0}$ можно выделить периодически перемещающийся N мерный базис $\{\Phi_j(\vartheta, u(t+\vartheta))\, \rho_j^{(t_0+\vartheta)/\omega}\}$ такой, что в N-мерном подпространстве, определяемом этим базисом, составляющую движения системы (1.2) будет описывать N-мерная система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (6.9).

При этом указанная составляющая движения системы (1.2), обладая видом Флоке, будет асимптотическим при $t \to \infty$ решением системы (1.2) во всем пространстве $C_{-\tau 0}$. А исчезающее дополнение $z_t(\vartheta)$ конечномерного движения $\{a_j\}$ до полного движения $x_t(\vartheta)$ остается при всех $t > t_0$ в линейном подпространстве, определенном условием (6.8).

Таким образом теорема Флоке для систем с запаздыванием всегда справедлива в асимптотическом смысле.

Заметим, что система корневых элементов $x_\sigma(\vartheta)$, вообще говоря, не обладает свойством полноты. В работе [5] А. М. Зверкин привел пример, когда уравнение с периодическим коэффициентом и запаздыванием имеет только один корневой элемент. Это уравнение имеет вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = p(t)\, x(t-\tau), \qquad \int_{-\tau}^{0} p(\xi), d\xi = 0, \qquad p(t+\tau) = p(t)$$

Однако следует признать, что наличие счетной системы корневых элементов для систем вида (1.1) является скорее правилом, чем исключением. В этом можно убедиться рассмотрением систем с постоянными коэффициентами, систем с периодическими коэффициентами, близкими к постоянным.

Поступила 9 III 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, 1959.
2. Красовский Н. Н. Об устойчивости квазилинейных систем с последействием. ДАН СССР, 1958, т. 119, № 3.
3. Гельфанд И. М. Нормированные кольца. Матем. сб., 1941, 9, 3—24.
4. Канторович А. В. и Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959.
5. Зверкин А. М. К теории линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и с периодическими коэффициентами. ДАН СССР, 1959, т. 128, стр. 882—885.
6. Халанай А. Периодические решения линейных систем с запаздыванием. Revue de mathématiques pures et appliquées, 1961, т. VI, № 1.
7. Репин Ю. М. Об условиях устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений при любых запаздываниях. Уч. зап. Уральск. ун-та, 1960, 23, № 2, 34—41.