

О РАСКЛИНИВАНИИ ХРУПКИХ ТЕЛ. АВТОКОЛЕБАНИЯ ПРИ РАСКЛИНИВАНИИ

Г. И. Баренблатт, Р. Л. Салганик

(Москва)

Задачи о расклинивании хрупких и квазихрупких тел жестким полубесконечным клином исследовались в статической постановке [1,2], применимой, когда скорость движения клина в теле мала сравнительно со скоростью распространения поперечных колебаний, и в динамической постановке [3], применимой, когда скорость движения клина сравнима с этой скоростью. Одно из основных предположений в обоих случаях заключалось в том, что расклинивание происходит стационарно, так что при движении в теле клина с постоянной скоростью V конец трещины, образующейся впереди клина, также перемещается равномерно с той же скоростью V (фиг. 1).

Экспериментальные исследования показали, однако, что распространение трещины с малой скоростью происходит неравномерно (см. работу Шардина [4]); скорость конца трещины совершает регулярные колебания около некоторого среднего значения. Поверхность скола получается при этом волнистой. Напротив, оказалось, что при достаточно большой скорости распространения конец трещины движется с постоянной скоростью, а поверхность скола получается зеркально гладкой.

Показательны в этом смысле эксперименты по расклиниванию Джилмена, Кнудсена и Уолша [5] и, особенно, В. М. Косевича [6], которые обнаружили, что предположение о постоянстве скорости движения конца трещины при достаточно малой скорости расклинивания не выполняется. Джилмен, Кнудсен и Уолш обнаружили скачкообразные движения конца трещины при достаточно малой скорости расклинивания кристалла фтористого лития.

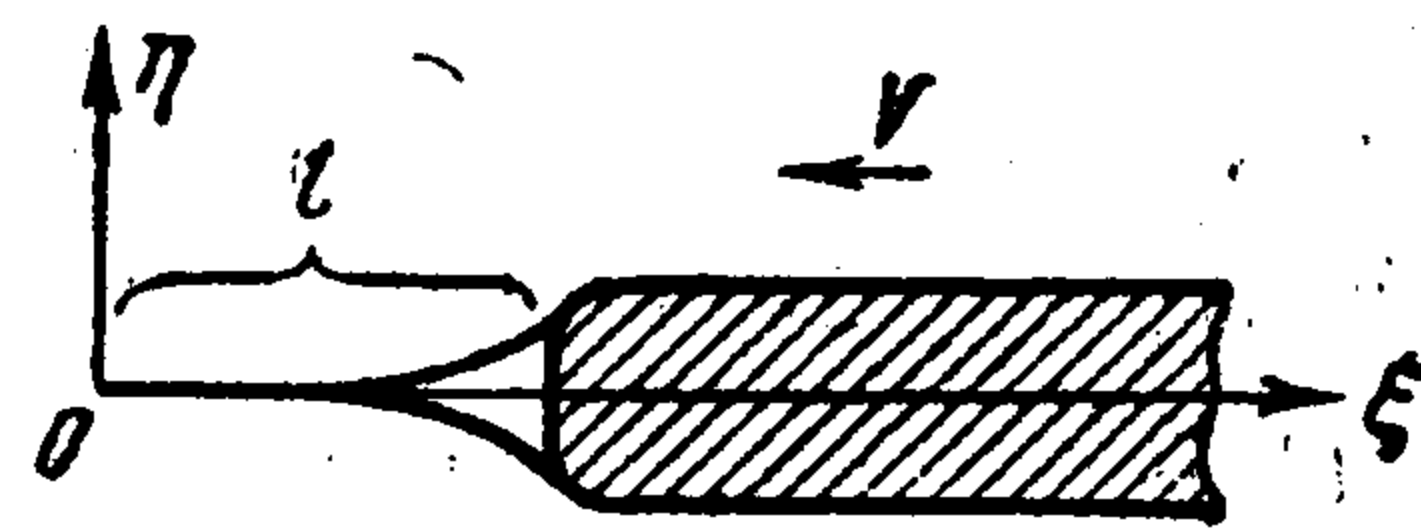
В. М. Косевич получил, что при медленном расклинивании кристаллов висмута по плоскости спайности на поверхности скола появляется симметричный относительно плоскости скола волнообразный рельеф, причем направление линий гребней волн не имеет определенной кристаллографической ориентации и всегда перпендикулярно к направлению распространения трещины. При этом скорость конца трещины совершает периодические колебания около среднего значения, равного скорости движения клина. Явление исчезает, когда скорость движения клина, увеличиваясь, достигает некоторой критической величины, существенно меньшей скорости распространения поперечных колебаний.

Измерение распределения плотности дислокаций на поверхности скола обнаружило периодичность этого распределения, причем оказалось, что максимумы плотности дислокаций соответствуют гребням рельефа на поверхности скола. В работах [5,6] было высказано утверждение, что неравномерность развития трещины объясняется чередованием в процессе распространения трещины хрупкого разрушения и пластической деформации.

В предлагаемой работе развивается теория автоколебательного процесса, возникающего при расклинивании. Объяснение явления основано на предположении, что модуль сцепления — основная характеристика сил, действующих в конце трещины [7] — зависит от мгновенной скорости распространения конца трещины, вначале убывающая с увеличением этой скорости. Уменьшение модуля сцепления при увеличении скорости распространения трещины специфично для квазихрупкого разрушения широкого класса материалов и связано с уменьшением неупругой деформации в приповерхностном слое трещины.

В соответствии с опытными данными можно принять, что интервал скоростей расклинивания, в котором происходят автоколебания, ограничен, — по крайней мере для разумных размеров расклиниваемых тел, — скоростями, существенно меньшими скорости распространения поперечных колебаний.

§ 1. Постановка задачи и основное уравнение. 1°. Пусть весьма большое идеально упругое тело расклинивается в условиях плоской деформации (фиг. 1) жестким симметричным клином, движущимся с постоянной скоростью V , много меньшей скорости распространения поперечных колебаний c . Силами трения, действующими на щеках клина, пренебрегаем. Клином считаем монотонно расширяющимся, максимальную ширину его обозначим через $2h$. Оси подвижной декартовой системы координат с началом в конце трещины обозначим через ξ, η ; неподвижной системы — через x, y . Оси x, ξ направлены против движения клина. Мгновенную длину свободной трещины перед клином обозначим через l . Имеем, очевидно,



Фиг. 1

$$\xi = x + \int v dt, \quad \eta = y \quad (1.1)$$

где $v(t)$ — мгновенная скорость перемещения конца трещины, t — время.

Предлагаемое объяснение автоколебательных явлений, возникающих при расклинивании твердого тела, основано на предположении о квазихрупком характере разрушения. Это означает, что при разрушении образуется тонкая зона неупругих деформаций вблизи поверхности трещины.

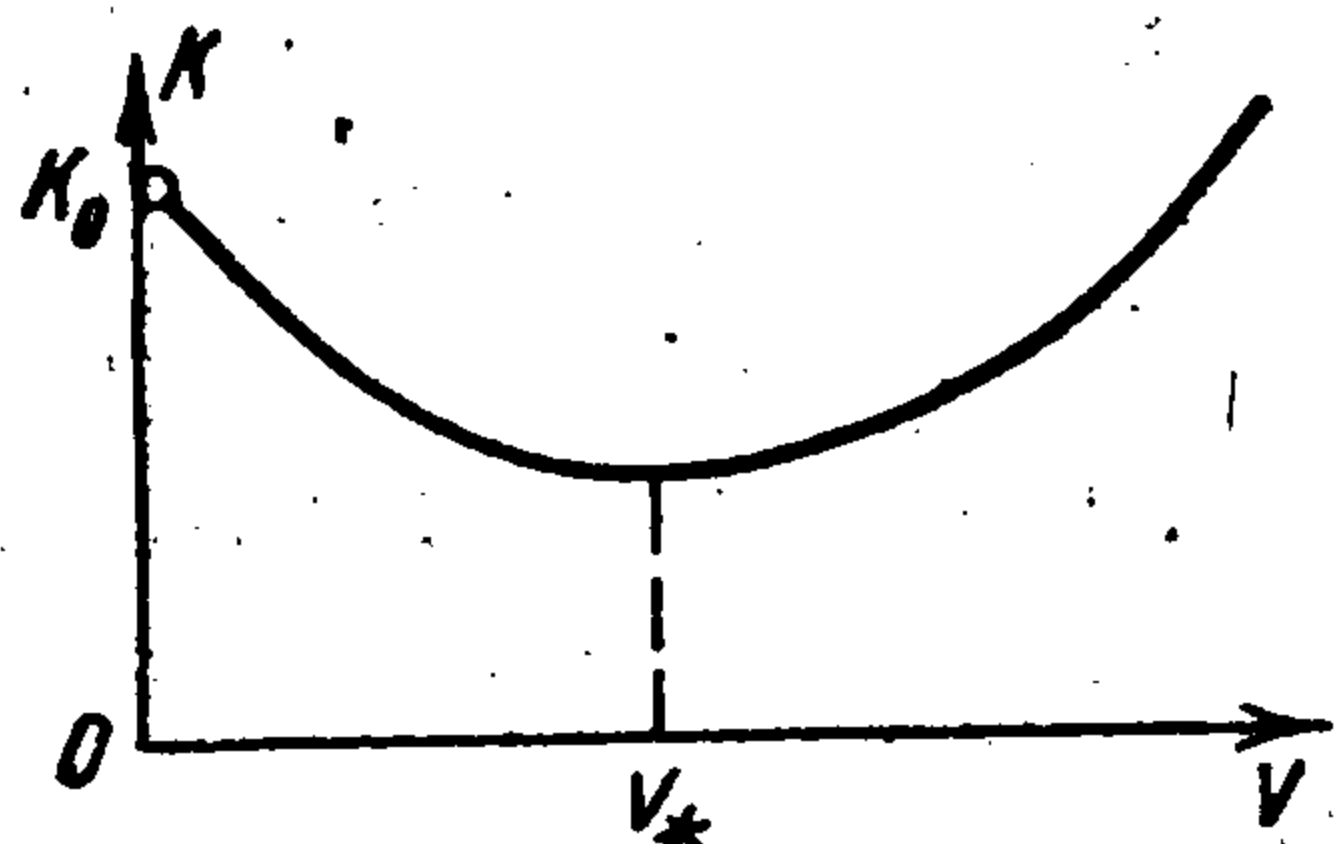
При распространении трещины данная точка поверхности трещины находится под действием интенсивных нагрузок во время прохождения через нее головки трещины. Мера неупругой деформации в данной точке возрастает с увеличением интенсивности и продолжительности действия этих нагрузок. При увеличении скорости продолжительность приложения нагрузки уменьшается. Величина нагрузки в области малых скоростей, когда вязкие эффекты незначительны, остается примерно постоянной. В области больших скоростей, когда вязкие эффекты становятся значительными, величина нагрузки возрастает. Поэтому мера неупругой деформации с увеличением скорости конца трещины v сначала падает, а затем, по-видимому, возрастает.

Мерой неупругой деформации естественно считать основную интегральную характеристику сил, действующих в концевой области трещины — модуль сцепления K (см. напр. [7]). При квазихрупком разрушении за поверхность трещины принимается граница раздела упругой и неупругой областей. Силы, действующие со стороны отброшенной области неупругих деформаций на упругое тело, являются внешними по отношению к упругому телу. Таким образом, модуль сцепления K возрастает с увеличением неупругих деформаций. В связи со сказанным об изменении неупругих деформаций при увеличении скорости, предположим¹, что

¹ Предположение о зависимости модуля сцепления (или плотности поверхностной энергии) от скорости конца трещины было высказано в связи с другими задачам в работе Стро [8] и, независимо, В. А. Максимовым.

модуль сцепления сначала убывает (до $v = v_*$), а затем возрастает (фиг. 2). Критическая скорость v_* может быть как много меньшей скорости звука, так и сравнимой со скоростью звука.

Аналогичная по характеру зависимость от скорости v получается и для плотности поверхностной энергии T , связанной с модулем сцепления K соотношением (см. например, [7]).



Фиг. 2

$$T(v) = \frac{(1 - \nu^2) K^2(v)}{\pi E} \quad (1.2)$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона материала расклиниваемого тела. Характерно сходство зависимости модуля сцепления от скорости с зависимостью от скорости коэффициента кулонова трения; это сходство является одним из проявлений глубокой аналогии процессов трения и трещинообразования.

Скорость перемещения конца трещины v выражается в виде

$$v = V + \frac{dl}{dt} \quad (1.3)$$

Напомним далее, что при стационарном расклинивании тела жестким гладким клином постоянной толщины, движущимся с малой скоростью, длина свободной трещины l определяется статическим соотношением [2]

$$l = \frac{E^2 h^2}{4(1 - \nu^2)^2 K^2} \quad (1.4)$$

2°. При выводе основного уравнения, определяющего зависимость длины свободной трещины от времени, будем исходить из закона сохранения энергии, который для рассматриваемой задачи записывается в виде

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} + \frac{d\Pi}{dt} = FV - 2T(v)v \quad (1.5)$$

где \mathcal{E} — кинетическая энергия расклиниваемого тела, Π — его потенциальная энергия, F — абсолютная величина расклинивающей силы, действующей со стороны клина на расклиниваемое тело и направленной, очевидно, вдоль оси клина по ходу движения. Величина FV представляет собой работу внешних сил, действующих на расклиниваемое тело, за единицу времени; величина $-2T(v)v$ — изменение поверхностной энергии тела за единицу времени.

Представим себе теперь вспомогательное движение, отличающееся от исследуемого тем, что мгновенная скорость конца трещины равна нулю, а клин движется так, что величины l , \dot{l} , \ddot{l} в данный момент времени у обоих движений совпадают. Соответствующее этому движению уравнение сохранения энергии имеет вид:

$$\frac{d\mathcal{E}'}{dt} + \frac{d\Pi'}{dt} = -F' \frac{dl}{dt} \quad (1.6)$$

где \mathcal{E}' , Π' и F' , соответственно, кинетическая и потенциальная энергия и расклинивающая сила для вспомогательного движения. Заметим, теперь, что скорость движения клина мала сравнительно со скоростью

звука. Поэтому можно приближенно считать, что величины $d\Pi' / dt$ и F' вполне определяются геометрией движения, в данном случае величинами l, \dot{l}, \dots , совпадающими для обоих рассматриваемых движений. Таким образом, $F' = F$, $d\Pi' / dt = d\Pi / dt$, так что, вычитая (1.6) из (1.5), получаем

$$\frac{d(\mathcal{E} - \mathcal{E}')}{dt} = [F - 2T(v)]v \quad (1.7)$$

Оценим теперь порядок величин, входящих в последнее уравнение. Упругие смещения точек расклиниваемого тела имеют, очевидно, порядок h , деформации — порядок h / l . Тогда сила F равна по порядку величины произведению нормального напряжения на щеках клина ($\sim Eh / l$) на ширину клина ($\sim h$), так что $F \sim Eh^2 / l$. Такова же по порядку и величина T (ср. (1.4) и (1.2)). Скорости частиц тела имеют порядок h / τ , где τ — характерное время процесса, $\tau \sim l / V$, так что порядок скорости частиц $\sim Vh / l$. Таким образом, скорость изменения кинетической энергии имеет порядок

$$\rho \frac{V^2 h^2}{l^2} l^2 \frac{V}{l} \sim \rho \frac{V^3 h^2}{l} \sim FV \frac{V^2}{c^2}$$

т. е. порядок членов правой части уравнения (1.7), умноженный на V^2 / c^2 .

Это означает, что уравнение (1.7) содержит малый параметр, так что член, стоящий в левой части этого уравнения представляет собой в принятом предположении $V / c \ll 1$ малую разность больших чисел. Поэтому в принятом приближении следует учитывать только те члены с малым параметром, которые содержат старшие производные (в данном случае величину \ddot{l}).

В частности, предполагая, что динамическая часть расклинивающей силы F не зависит в принятом приближении от ускорения движения конца трещины, получаем, что входящую в уравнение (1.7) величину F можно вычислять с помощью статического решения. Учитывая, что размеры тела по предположению очень велики (сравнительно с длиной свободной трещины) расклинивающую силу можно вычислять при помощи статического решения для бесконечного тела, по формуле [3]:

$$F = -2 \int_l^\infty \sigma_y f_*'(x) dx$$

где σ_y — нормальное напряжение, действующее со стороны клина на поверхность трещины, $f_*(x)$ — функция, определяющая форму клина. Величину расклинивающей силы F вычислим для более общего случая полубесконечного разреза вдоль положительной полуоси, нагруженного по поверхности распределенными по некоторому закону симметричными нормальными напряжениями $\sigma_y = -g(x)$. Будем считать, что приложенные нормальные напряжения таковы, что нормальное смещение точек поверхности разреза $f_*(x)$ монотонно возрастает с увеличением x . Имеем

$$F = -2 \int_0^\infty \sigma_y f_*'(x) dx \quad \left(f_*'(x) = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E \sqrt{x}} \int_0^\infty \frac{g(t) \sqrt{t} dt}{t-x} \right)$$

(Выражение для $f_*(x)$ см., например, в [7]). Отсюда

$$F = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{g(x)g(t)t dx dt}{\sqrt{x}\sqrt{t}(t-x)} =$$

$$= \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \int_0^\infty \frac{g(x)}{\sqrt{x}} \left(\int_0^\infty \frac{g(t)(t-x+x)}{\sqrt{t}(t-x)} dt \right) dx = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \left(\int_0^\infty \frac{g(t) dt}{\sqrt{t}} \right)^2 = F$$

Таким образом, имеем

$$F = \frac{2\pi(1-\nu^2)N^2}{E}, \quad N = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{g(t) dt}{\sqrt{t}}$$

где величина N — коэффициент интенсивности напряжений [7]. Как известно, для равновесных трещин $N=0$, так что на конце трещины имеет место конечность напряжений и плавное смыкание противоположных берегов трещины. Условием этого, как видно, является равенство расклинивающей силы нулю. Заметим, что расклинивающая сила представляет собой для данного случая введенную Ирвином [9] «силу, вызывающую расширение трещины».

Система сил, действующая со стороны клина на упругое тело, и, следовательно, ее результирующая F , не зависят от сил, действующих в концевой области и влияющих на упругое поле только в малой окрестности конца трещины. Поэтому при вычислении F следует взять величину N равной N_0 — коэффициенту интенсивности напряжений, вычисленному без учета сил сцепления. В частности, для случая достаточно длинного клина постоянной толщины можно воспользоваться решением для полубесконечного клина в бесконечном теле, которое дает:

$$F = \frac{Eh^2}{2\pi(1-\nu^2)l(t)}$$

3°. Для вычисления левой части уравнения (1.7), благодаря сделанному предположению о малости скорости расклинивания сравнительно со скоростью распространения поперечных колебаний, можно воспользоваться статическим решением. Статическое решение дает некоторое выражение для смещения в подвижной системе координат:

$$\mathbf{u} = \{u_x, u_y\} = \mathbf{u}(\xi, \eta, l(t))$$

В неподвижной системе координат xy , связанной с расклиниваемым телом, скорость в квазистатическом приближении равна в силу (1.1):

$$\mathbf{q} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} v(t) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial l} \dot{l} \quad (1.8)$$

Далее, скорость изменения кинетической энергии определяется соотношением

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \rho \int_{\Omega} \mathbf{q} \dot{\mathbf{q}} d\omega, \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{q}}{dt} \quad (1.9)$$

где интегрирование ведется по всему объему Ω расклиниваемого тела.

При вычислении интеграла в правой части (1.9) можно, по предыдущему, в силу принятого приближения $V/c \ll 1$ пренебрегать членами, не содержащими старшую производную \dot{l} . Получаем:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = Mv\dot{l} + M_1\ddot{l} \quad (1.10)$$

$$M = \rho \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \right] d\omega, \quad M_1 = \rho \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^2 \right] d\omega$$

Полагая в (1.10) $v = 0$, получим выражение для $d\mathcal{E}'/dt$; вычитая его из (1.10), найдем

$$\frac{d(\mathcal{E} - \mathcal{E}')}{dt} = Mv\dot{l} \quad (1.11)$$

Таким образом, определение левой части уравнения (1.7) свелось к вычислению «присоединенной массы» трещины M . Анализ показывает, что присоединенная масса, вычисленная из статического решения задачи о расклинивании бесконечного тела полубесконечным клином бесконечно велика. Аналогичное обстоятельство, как известно, возникает при определении присоединенных масс движущихся дислокаций (см. например недавнюю работу Веертмана [10]). Оно связано со спецификой плоской стационарной задачи теории упругости и обходится введением внешнего размера тела L . В рассматриваемом нами случае, когда внешний размер расклиниваемого тела L много больше длины свободной трещины l , для присоединенной массы M имеет место асимптотическое представление по l/L :

$$M = \rho h^2 \left[A \ln \frac{L}{l} + B + o(1) \right] \quad (1.12)$$

Коэффициент A можно вычислить из решения статической задачи о расклинивании бесконечного тела полубесконечным клином. Предполагая для простоты, что толщина клина постоянна, и используя метод Мусхелишвили, получаем для компонент смещения u_x и u_y следующее выражение:

$$u_x + iu_y = \frac{h}{4\pi(1-\nu)} \{ \kappa \varphi(z) - \varphi(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\varphi'(z)} \} + u_0$$

$$z = \xi + i\eta, \quad \kappa = 3 - 4\nu$$

$$\varphi'(z) = \frac{1}{\sqrt{z(z-l)}}, \quad \varphi(0) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{\sqrt{z(z-l)}} = -1 \quad (1.13)$$

где константа u_0 (которая может зависеть от длины трещины и, следовательно, от времени) выбирается так, чтобы асимптотическое решение (1.13) удовлетворяло условию обращения в нуль скорости q на бесконечности. Принимая во внимание (1.8), получаем

$$u_0(t) = -\frac{(1-2\nu)}{2\pi(1-\nu)} \ln l(t) + \text{const} \quad (1.14)$$

где константа не зависит от времени. Главный (логарифмический) член выражения для M , т. е. константу A , можно получить разложением подинтегрального выражения в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$A = \frac{\kappa^2 + 5}{16\pi(1-\nu)^2} \quad (1.15)$$

Считая, что свободная трещина приблизительно равноудалена от границ тела, постоянную B можно также найти из асимптотического решения (1.13), производя в (1.10) интегрирование по кругам с центром в конце трещины.

Вычисление дает:

$$B = A \ln \gamma, \quad \gamma = \exp \left[\frac{\kappa^2 + 1}{2(\kappa^2 + 5)} + (2 \ln 2) \frac{\kappa^2 - 5}{\kappa^2 + 5} \right] \quad (1.16)$$

Подставляя последние соотношения в (1.12) и пренебрегая малыми величинами $o(1)$, получаем выражение для присоединенной массы трещины в виде:

$$M = m\rho h^2, \quad m = \frac{\kappa^2 + 5}{16\pi(1 - \nu)^2} \ln \frac{\gamma L}{l}$$

Подставляя в (1.7) полученные выражения для величин F , $d(\mathcal{E} - \mathcal{E}')/dt$, выражая T через модуль сцепления по формуле (1.2) и сокращая общий множитель ν , получаем основное уравнение для определения $l(t)$ в виде:

$$m\rho h^2 \frac{d^2 l}{dt^2} = F - 2T = \frac{Eh^2}{2\pi(1 - \nu^2)l(t)} - \frac{2(1 - \nu^2)K^2(\nu)}{\pi E} \quad (1.17)$$

4°. Если ввести силу инерции dI/dt трещины, приложенную в ее конце, так, чтобы работа этой силы равнялась приращению величины $\mathcal{E} - \mathcal{E}'$, т. е.

$$\frac{d(\mathcal{E} - \mathcal{E}')}{dt} = -\nu \frac{dI}{dt} \quad \text{или} \quad -m\rho h \frac{d^2 l}{dt^2} = \frac{dI}{dt} \quad (1.18)$$

то уравнение (1.17) можно истолковать как силовое равенство:

$$\frac{dI}{dt} = F - R, \quad R = 2T \quad (1.19)$$

где $R = 2T$ — сила сопротивления расклиниванию, также приложенная в конце трещины и направленная против движения трещины.

Таким образом, при равновесии или стационарном расклинивании расклинивающая сила F уравновешивается силой сопротивления R , откуда и может быть получена формула (1.4). При нестационарном расклинивании расклинивающая сила F не уравновешивается силой сопротивления R , так как вследствие инерции тела длина свободной трещины $l(t)$ не успевает приспособиться к модулю сцепления, соответствующему мгновенной скорости конца трещины $\nu(t)$.

§ 2. Исследование основного уравнения. 1°. Принимая $\nu = V + dl/dt$ за независимую переменную, а l — за зависимую, приводим уравнение (1.17) к виду

$$\frac{dl}{d\nu} = \frac{(\nu - V)l}{A - B l K^2(\nu)} \equiv \frac{Pl}{Ql} \quad \left(A = \frac{E}{2\pi(1 - \nu^2)m\rho}, B = \frac{2(1 - \nu^2)}{\pi m\rho E h^2} \right) \quad (2.1)$$

Заметим теперь, что при расклинивании длина свободной трещины l меняется несильно (заведомо меньше чем на порядок), поэтому, так как по предположению L/l велико и входит под знак логарифма, величину m можно считать постоянной.

Интегральные кривые уравнения (2.1) следует рассматривать только в первом квадранте плоскости vl , так как только отрезки интегральных кривых, находящиеся в этом квадранте, имеют физический смысл. В самом деле, длина свободной трещины перед клином не может быть отрицательной, и вследствие необратимости трещины скорость движения ее конца v также не может быть отрицательной.

Как показывает исследование, в первом квадранте уравнение (2.1) имеет только одну особую точку:

$$v = V, \quad l = l_*(V) = \frac{E^2 h^2}{4(1-v^2)^2 K^2(V)} \quad (2.2)$$

которая соответствует стационарному квазистатическому расклиниванию, когда клин движется со скоростью V , а длина трещины перед ним остается постоянной. Исследование характера особой точки показывает, что она представляет собой фокус или узел, неустойчивые при

$$K'(V) < 0 \quad (2.3)$$

и устойчивые при $K'(V) > 0$.

Таким образом, в силу того, что функция $K(V)$ вблизи $V=0$ убывает (фиг. 2), всегда существует область неустойчивости стационарного расклинивания $0 < V < v_*$, где v_* определяется из уравнения

$$K'(v_*) = 0 \quad (2.4)$$

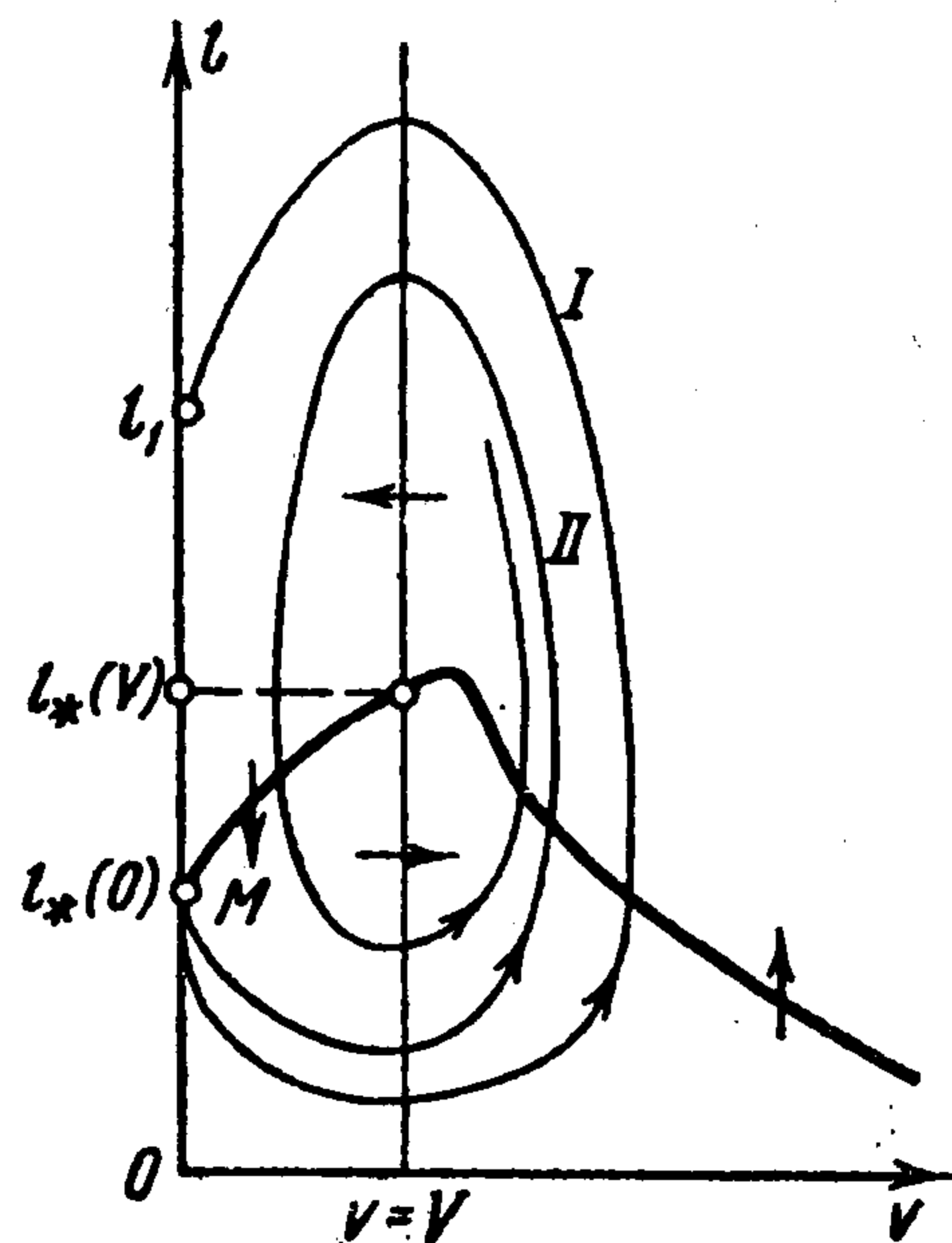
Очевидно, что если участка возрастания на кривой $K(v)$ в рассматриваемом диапазоне скоростей не имеется, то область неустойчивости стационарного расклинивания распространяется по крайней мере на все скорости, допускающие квазистатическую трактовку.

Рассмотрим нестационарные движения, которые возникают при скорости клина V , лежащей в области неустойчивости.

На фиг. 3 изображены для случая неустойчивости особой точки изоклины $dl/dv = 0$ и $dl/dv = \infty$ с указанными на них направлениями движения изображающей точки по интегральным кривым.

Для полного описания возникающих движений необходимо выяснить, что происходит с изображающей точкой вблизи границ первого квадранта. Если изображающая точка расположена вблизи линии $v=0$, то она приходит на эту линию, при $l > l_*(0)$ и отходит от нее внутрь первого квадранта при $l \leq l_*(0)$. Из условия необратимости трещины следует, что в первом

случае изображающая точка движется по линии $v=0$ вниз со скоростью V (конец трещины неподвижен, клин движется) вплоть до достижения точки $M \{v=0, l=l_*(0)\}$, после чего начинает идти по интегральной кривой, выходящей из этой точки.



Фиг. 3

Граница $l = 0$ является интегральной кривой, единственной, по которой изображающая точка может уйти в бесконечность. Таким образом, интегральные кривые выйти из первого квадранта через границу $l = 0$ не могут; с другой стороны, легко видеть, что движение по интегральной кривой $l = 0$ неустойчиво.

Изображающая точка, сойдя с нее внутрь первого квадранта, начинает двигаться вокруг особой точки, стремясь к ней, или к окружающему ее предельному циклу, если таковой имеется.

Покажем, что в случае неустойчивости особой точки, т. е. «самовозбуждения» колебаний, всегда имеется хотя бы один устойчивый предельный цикл.

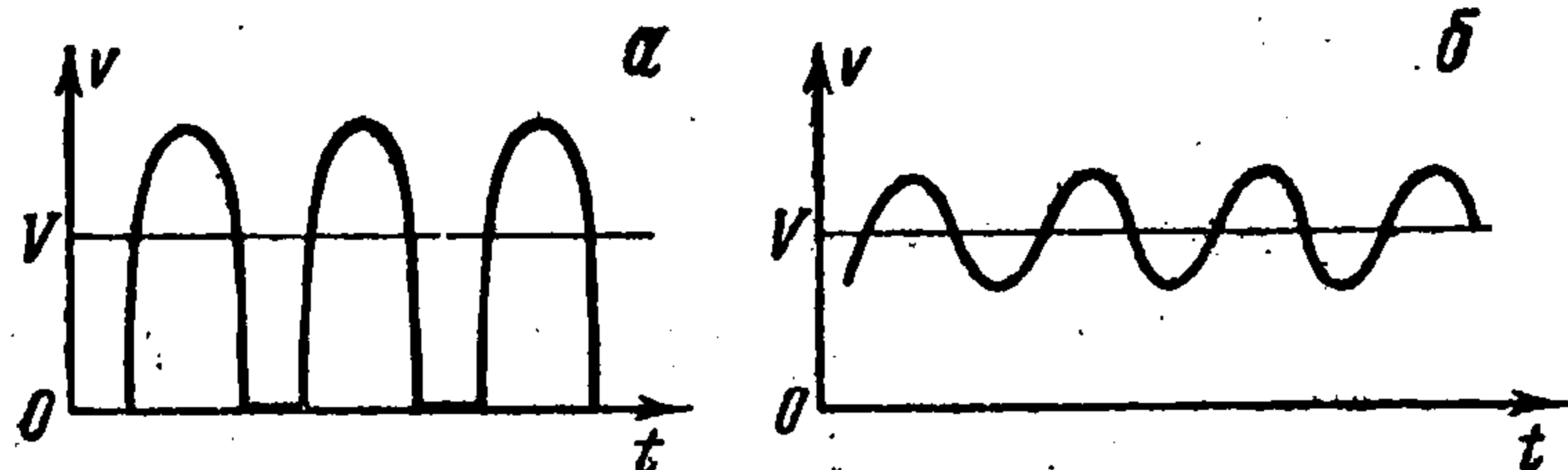
В самом деле, интегральная кривая, выходящая из точки M , может иметь одну из двух форм, показанных на фиг. 3 цифрами I и II. Заметим, что эта интегральная кривая может пересекать изоклину $dl/dv = \infty$ как правее, так и левее максимума. Последний случай заведомо имеет место при малых скоростях расклинивания и малых наклонах кривой $K(v)$. Если интегральная кривая, выходящая из точки M , имеет форму I, то предельным циклом является линия, состоящая из отрезка этой интегральной кривой от точки M до следующей точки пересечения ее с осью ординат: $v = 0, l = l_I$ и замыкающего отрезка оси ординат $v = 0, l_*(0) \leq l \leq l_I$.

Этот предельный цикл всегда устойчив, независимо от того, устойчива или неустойчива особая точка.

Для точек области, внутренней по отношению к предельному циклу, в этом можно убедиться, продолжая эту область от точки M отрезок граничной интегральной кривой. Продолженная таким образом интегральная кривая может либо подходить спиралью к особой точке (в неустойчивом случае), либо наматываться на некоторый внутренний предельный цикл. Интегральная кривая, проходящая через любую точку внутренней области, внешнюю к этому второму предельному циклу (если он существует), должна подойти к оси ординат в некоторой внутренней точке замыкающего отрезка $v = 0, l_*(0) \leq l \leq l_I$ и, тем самым, попасть на предельный цикл. По отношению к точкам внешней области устойчивость предельного цикла вытекает из того, что интегральная кривая, проходящая через каждую такую точку, подходит к оси ординат над точкой $l = l_I$, после чего, как указывалось выше, спускается со скоростью V до точки $v = 0, l = l_I$ и попадает на предельный цикл. Заметим, что во всех случаях изображающая точка попадает на предельный цикл через конечный промежуток времени.

Если интегральная кривая, выходящая из точки M , имеет форму II, то существование хотя бы одного абсолютно устойчивого предельного цикла вытекает из неустойчивости особой точки [11].

Случай I соответствует колебаниям с остановками конца трещины (фиг. 4, а), случай II — колебаниям без остановок конца трещины (фиг. 4, б).



Фиг. 4

2°. Для системы (2.1) имеем

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial l} + \frac{\partial Q}{\partial v}\right) = BK^{2'}(v)$$

Это выражение не обращается в нуль при $v < v_*$.

Из критерия Бендиксона [11] следует, что если предельный цикл расположен левее прямой $v = v_*$, то он соответствует колебаниям с отставками конца трещины.

Таким образом, показано, что при $V > v_*$ (если критическая скорость v_* существует), стационарное расклинивание устойчиво по отношению к малым возмущениям. При $V < v_*$ стационарное расклинивание неустойчиво и имеет место автоколебательный режим распространения трещины. В общем случае приходится ограничиваться выводами качественного характера: для расчета возникающих автоколебательных движений необходимо численно интегрировать полученное уравнение (1.17), задаваясь конкретным видом функции $K(v)$. В результате интегрирования находится предельный цикл — замкнутая кривая C в плоскости vl . Период колебаний определяется формулой

$$\theta = \oint_C \frac{dl}{v(l) - V} \quad (2.5)$$

Длина волны λ — путь, проходимый концом трещины за период, — определяется соотношением

$$\lambda = \int_0^\theta v(\tau) d\tau = V\theta \quad (2.6)$$

На опыте длина волны определяется, например, как расстояние между двумя соседними гребнями волн на плоскости скола.

Можно показать, что предельный цикл, соответствующий некоторому значению скорости расклинивания V , охватывает все предельные циклы, соответствующие меньшим значениям V . Таким образом, амплитуда колебаний длины свободной трещины возрастает с увеличением скорости клина.

§ 3. Предельные случаи. Обсуждение результатов. 1°. Запишем уравнение (1.17) в безразмерной форме. Положим

$$\Lambda = \frac{l}{l_*(0)}, \quad \tau = \frac{v_1 t}{l_*(0)}, \quad f\left[\frac{V}{v_1} + \frac{d\Lambda}{d\tau}\right] \equiv \frac{K^2(v)}{K^2(0)}, \quad \alpha = \pi(1 - \nu)m \frac{v_1^2}{c^2}, \quad w = \frac{v}{v_1} \quad (3.1)$$

где v_1 — характерная скорость, которую в различных случаях удобно определять по-разному. Тогда уравнение примет вид

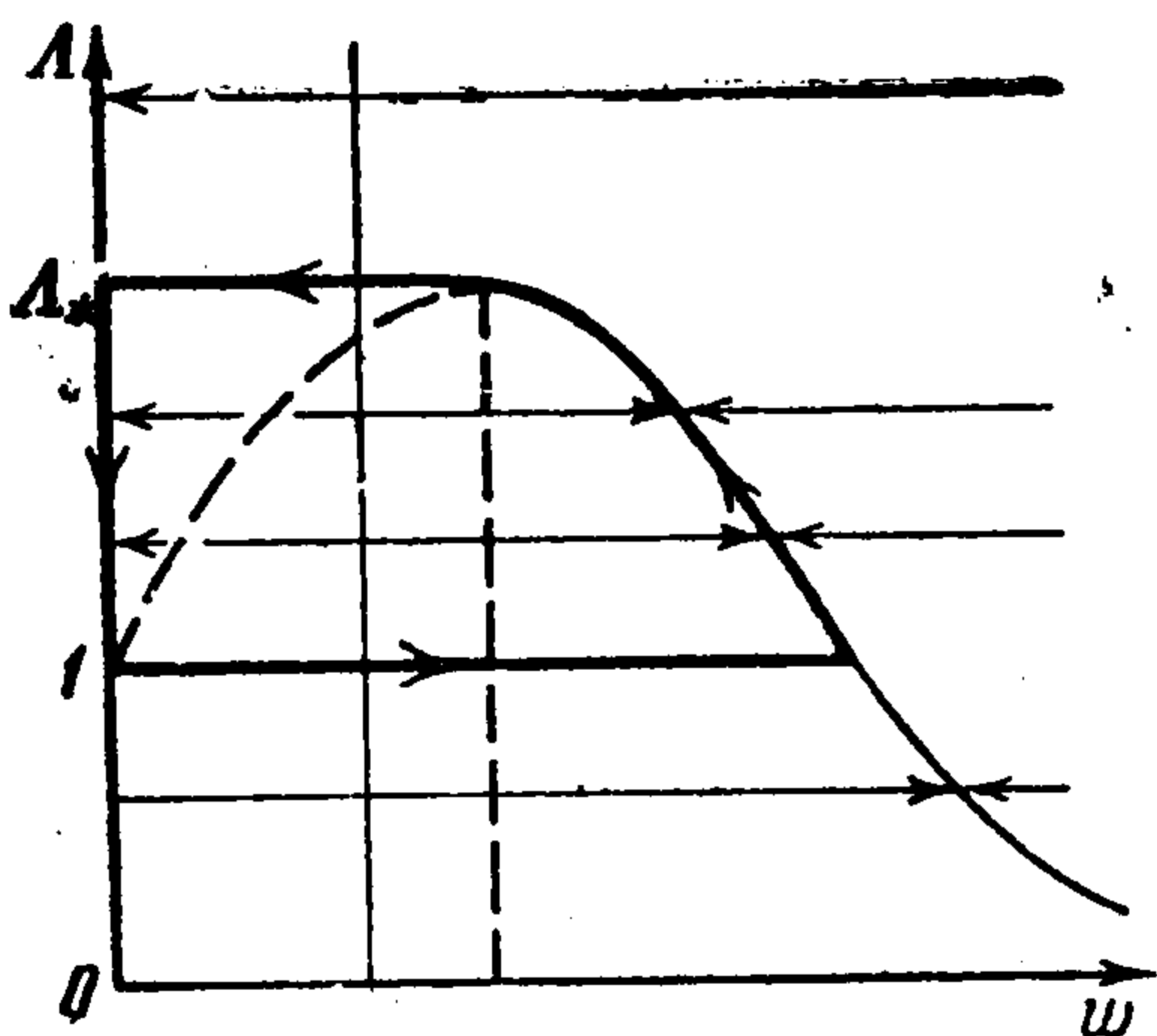
$$\alpha \frac{d^2\Lambda}{d\tau^2} = \frac{1}{\Lambda} - f\left[\frac{V}{v_1} + \frac{d\Lambda}{d\tau}\right] \quad (3.2)$$

Выше было указано, что зависимость $K(v)$ аналогична зависимости коэффициента кулонова трения от относительной скорости трущихся поверхностей. В основанной на этом предположении теории автоколебаний, возникающих при кулоновом трении, развитой учениками Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси, имеется два важных случая, в которых исследование удается провести до конца. В первом случае коэффициент трения сильно зависит от скорости, и, если инерция колеблющегося тела достаточно мала, то фазовая плоскость разбивается на области «быстрых» и «медленных» движений. Заменяя быстрые движения скачками, можно вообще не принимать во внимание инерцию. Этот случай разрывных релаксационных колебаний рассмотрен С. Э. Хайкиным и Н. Л. Кайда-

новским [12]. Во втором случае коэффициент трения слабо зависит от скорости и инерцию нужно учитывать. Этот случай рассмотрен С. П. Стрелковым [13]. Аналогичные возможности возникают и в задаче об автоколебаниях при расклинивании. Рассмотрим первую из них — случай сильной зависимости модуля сцепления K от скорости v . Полагая в (3.1) $v_1 = V$ и переходя в уравнении (3.3) на фазовую плоскость $w\Lambda$, получим

$$\frac{d\Lambda}{dw} = \frac{\alpha(w-1)\Lambda}{1-f(w)\Lambda}, \quad \alpha = \pi(1-v)m \frac{V^2}{c^2} \quad (3.3)$$

Параметр α , характеризующий в известном смысле инерцию процесса, с самого начала был предположен малым. Из (3.3) видно, что при малом α величина $d\Lambda/dw$ отличается заметно от нуля только в узкой полосе, окружающей изоклину $d\Lambda/dw = \infty$; в остальных точках плоскости $w\Lambda$ при малых α величина $d\Lambda/dw$ близка к нулю. Поэтому, в соответствии с общими результатами теории «пограничного слоя» — теории уравнений с малым параметром при старшей производной (см. [11] гл. X) — получаем, что в том случае, когда кривая $f(w)$ имеет максимум ($w = w_*$), фазовая картина фиг. 3 в пределе при $\alpha \rightarrow 0$



Фиг. 5

принимает вид, изображенный на фиг. 5.

Согласно общему методу, изложенному в § 4 гл. X книги [11], получаем следующие результаты. Медленные движения происходят в области $1/\Lambda - f| < O(w_0\alpha^{1/2})$, где $w_0 > 0$ определяется уравнением $f(w_0) = 1$. В остальной части фазовой плоскости движения быстрые. При $w > w_*$ изображающая точка входит в область медленных движений, остается в этой области и движется в пределе в соответствии с уравнением

$$\frac{1}{\Lambda} = f \left(1 + \frac{d\Lambda}{d\tau} \right) \quad (3.4)$$

При $w < w_*$ изображающая точка из области медленных движений выходит в область быстрого изменения w при почти постоянном значении Λ .

Рассмотрим интегральную кривую, выходящую из точки M . Если

$$O(w_0\sqrt{\alpha}/(1/f')_{w=0}) < 1$$

(скорость клина не очень мала), то эта кривая попадет в область быстрых движений. Оставаясь почти горизонтальной, она подойдет к изоклине $d\Lambda/dw = \infty$ в точке $(w_0, 1)$, после чего пойдет в области медленных движений вдоль этой изоклины, пока не придет в точку $w = w_*$, $\Lambda = \Lambda_*$.

Если

$$w_* - 1 > O(w_0^{1/2}\alpha^{1/4}/\sqrt{-(1/f)''_{w=w_*}})$$

(скорость клина не слишком близка к v_*), то кривая, выходящая из точки M , выйдет вблизи этой точки в область быстрых движений, и, оставаясь

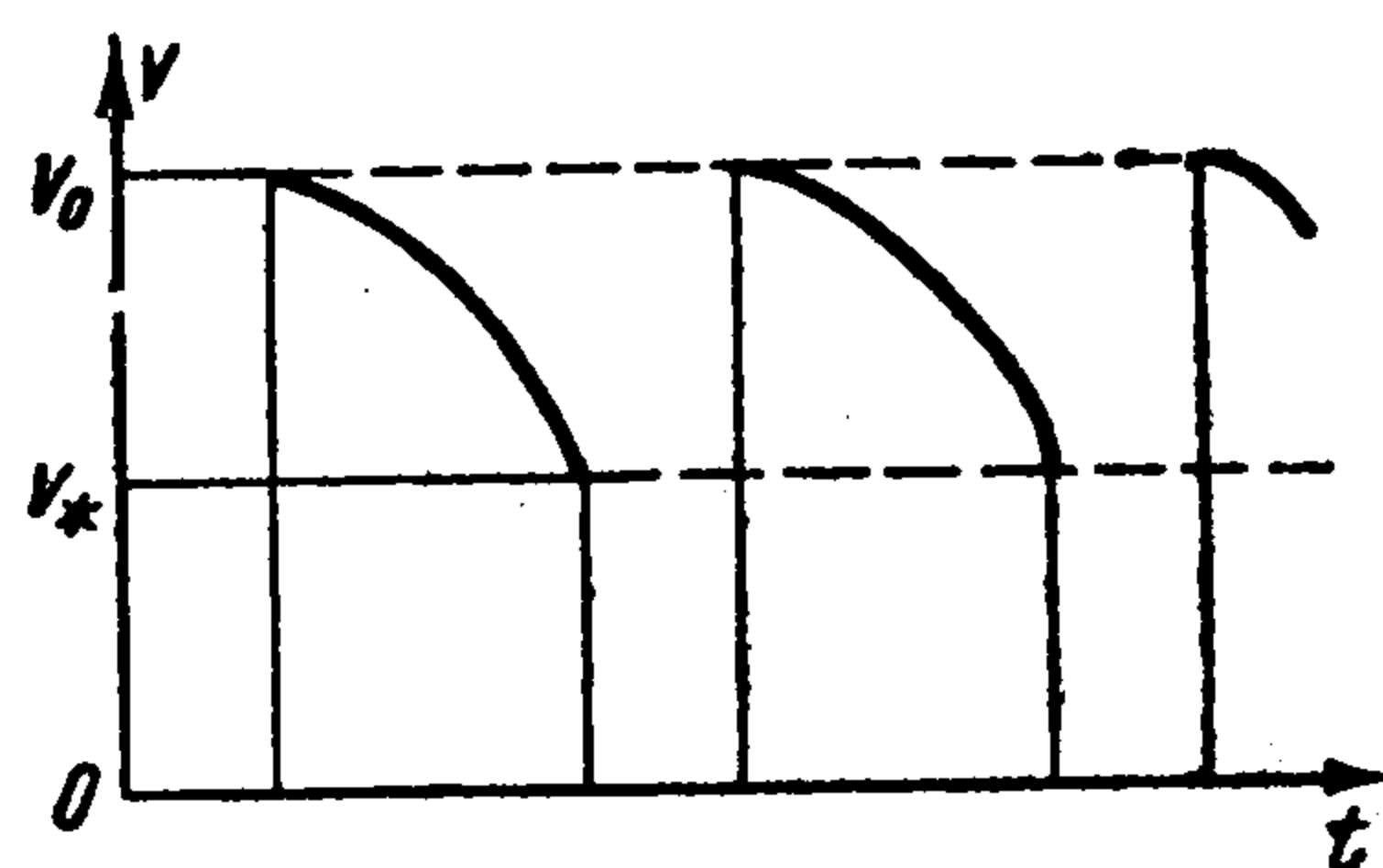
почти горизонтальной, пойдет вплоть до точки $w = 0$, $\Lambda = \Lambda_*$, описав, таким образом, кривую типа I.

Следовательно, при выполнении указанных двух неравенств, которые с учетом (3.1) сводятся к условию

$$V_1 \ll V \ll V_2 \quad (3.5)$$

где величины V_1 и V_2 стремятся, соответственно, к нулю и v_* при увеличении $K'(0)$ и $K''(v_*)$, имеется разрывный предельный цикл, устойчивый и единственный. Он составлен из описанной сейчас кривой типа I и замыкающего отрезка оси ординат, который, как и ранее, проходится с постоянной безразмерной скоростью, равной $d\Lambda/d\tau = 1$. Вид зависимости скорости конца трещины v от времени t представлен на фиг. 6.

В нулевом приближении период получающихся разрывных релаксационных колебаний складывается из времен прохождения изображающей точкой негоризонтальных участков предельного цикла и определяется интегрированием уравнения (3.4). Если допускаемый неравенствами (3.5) диапазон скоростей расклинивания настолько широк,



Фиг. 6

что для V возможны значения, малые сравнительно с v_* , то для таких значений V вкладом в период от криволинейного участка предельного цикла можно пренебречь. Тогда длина волны колебаний λ перестает зависеть от скорости и представляет собой просто разность длин свободной трещины, соответствующих минимальному и начальному модулям сцепления

$$\lambda = \frac{[K^2(0) - K^2(v_*)] E^2 h^2}{4(1 - v^2)^2 K^2(0) K^2(v_*)} \quad (3.6)$$

Если во всем интервале $0 < V < v_*$ неравенства (3.5) не удовлетворяются (это будет иметь место при достаточно малых $K'(0)$ и $K''(v_*)$), то схема релаксационных колебаний становится непригодной и инерцию нужно учитывать. Мы не будем здесь проводить соответствующего исследования в полном объеме и ограничимся случаем достаточно малых значений V , для которых не удовлетворяется левая сторона неравенства (3.5).

В этом случае брать $v_1 = V$ неудобно, поэтому будем считать, что v_1 — некоторая фиксированная скорость, например, некоторая часть скорости звука c .

При $W = V/v_1 \rightarrow 0$ особая точка представляет собой либо неустойчивый узел (при $4\alpha < [f'(0)]^2$), либо неустойчивый фокус (при $4\alpha > [f'(0)]^2$).

Если особая точка — узел, то внутренних предельных циклов при как угодно малых W быть не может, так как в противном случае они пересекали бы некоторые траектории, идущие из узла. Поэтому траектория, выходящая из точки M , имеет форму I и вместе с замыкающим отрезком оси ординат образует единственный предельный цикл, устойчивый и отвечающий колебаниям с остановкой. Размеры этого предельного цикла не стремятся к нулю вместе с W . Это согласуется с тем, что в случае узла, когда $\alpha \rightarrow 0$ и $v_* \ll c$, предельный цикл стремится к рассмотренному

в предыдущем пункте разрывному предельному циклу, форма которого от величины W не зависит.

Если особая точка — фокус, то при достаточно малом W траектория, выходящая из точки M , делает первые пол-оборота в области, где уравнение (3.2) близко к линейному, и образует вместе с замыкающим отрезком оси ординат предельный цикл того же типа, что и в случае узла. Другие предельные циклы (обязательно внутренние) могут располагаться только внутри этого предельного цикла, что, однако, невозможно из-за близости там уравнения (3.2) к линейному. Очевидно, что в случае фокуса размеры предельного цикла стремятся к нулю вместе с W .

Близость уравнения (3.2) к линейному в области, где расположен предельный цикл, дает возможность найти этот цикл и, в частности, определить длину волны. После линеаризации уравнение (3.2) принимает вид

$$\alpha \frac{d^2\delta}{d\tau^2} + f'(0) \frac{d\delta}{d\tau} + \delta = -f'(0)W, \quad \delta = \Lambda - 1 \quad (3.7)$$

Его решение, соответствующее траектории, выходящей из точки M ($\delta = 0$, $d\delta/d\tau = -W$ при $\tau = 0$), в случае фокуса ($4\alpha > [f'(0)]^2$) имеет вид

$$\delta(\tau) = -W \left\{ e^{n\tau} \left[2\alpha n \cos \omega\tau + \frac{1-2\alpha n^2}{\omega} \sin \omega\tau \right] - 2\alpha n \right\} \\ 2\alpha n = -f'(0), \quad 2\alpha\omega = \sqrt{4\alpha - [f'(0)]^2} \quad (3.8)$$

Время t_1 прохождения изображающей точки по криволинейному участку предельного цикла определяется из условия прихода ее на ось ординат, т. е. $d\delta/d\tau = -W$.

Отсюда с учетом (3.8) получаем

$$\sqrt{\alpha\omega} e^{-n\tau_1} = \cos(\omega\tau_1 + \varepsilon), \quad \operatorname{tg} \varepsilon = n/\omega \quad (3.9)$$

Уравнение (3.9) имеет бесконечно много решений, из которых, очевидно, следует выбрать наименьшее положительное.

Таким образом, длина волны колебаний равна

$$\lambda = Vt_1 + l(t_1) - l_*(0) \quad (3.10)$$

где t_1 и $l(t_1)$ определяются из формул (3.8) и (3.9).

Полученные результаты позволяют, таким образом, объяснить возникновение автоколебаний при расклинивании хрупких тел как кристаллических, так и аморфных, в которых имеется зависимость $K(v)$. Об этой зависимости в настоящее время известно очень мало. Из обнаруженного экспериментального факта «устойчивости» расклинивания некоторых кристаллов на больших скоростях нельзя даже сделать вывода о существовании у кристаллов критической скорости v^* и о том, что эти большие скорости превышали v_* . Выше было отмечено, что при увеличении скорости клина амплитуда колебаний длины свободной трещины возрастает. Поэтому гладкая поверхность скола, по появлению которой судили об устойчивости расклинивания, могла получаться не от того, что скорость расклинивания превышала v_* , а вследствие того, что амплитуда колебаний

длины свободной трещины превосходила размеры кристалла, так что на длине кристалла неравномерность движения конца трещины не могла быть замечена. В. М. Косевич [6] отмечал, что при увеличении скорости клина длина волны возрастала пока, наконец, поверхность скола не получилась гладкой. Для кристаллов скорее следует ожидать слабой зависимости $K(v)$, чем сильной. Напротив, для таких материалов, как аморфные полимеры, эта зависимость по-видимому сильна, а наличие у этих материалов заметной вязкости позволяет думать, что для них критическая скорость v_* невелика. Именно в такого рода материалах скорее всего будут осуществляться характерные для сильной зависимости $K(v)$, имеющей минимум, разрывные релаксационные колебания с остановками конца трещины.

Колебания с остановками конца трещины (релаксационные и нерелаксационные) имеют по-видимому основное значение. При этом может оказаться, что вследствие наклепа значение K будет зависеть от продолжительности остановки. Здесь также имеется аналогия с трением: коэффициент трения может зависеть от продолжительности контакта трущихся поверхностей. Соответствующая теория была развита в работе А. Ю. Ишлинского и И. В. Крагельского [14].

Поступила 10 III 1963

Институт механики
Московского университета

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., Христианович С. А. Об обрушении кровли при горных выработках. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 11.
2. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Прямолинейные трещины в плоских пластинках. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 4.
3. Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П. О расклинивании хрупких тел. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 4.
4. Schardin H., Velocity effects in fracture] «Fracture» Wiley. N. Y., 1959, pp. 297—330.
5. Gilman J. J., Knudsen C., Walsh W. P. Cleavage cracks and dislocation in LiF crystals. J. Appl. Phys., 1958, vol. 29, № 4.
6. Косевич В. М. Образование дислокаций при расколе кристалла висмута по плоскости спайности. Кристаллография, 1962, т. VII, вып. 1.
7. Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1961, № 4.
8. Stroh A. N. A simple model of a propagating crack. J. Mech. Phys. Solids, 1960, 8, p. 1.
9. Irwin G. R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. J. Appl. Mech., 1957, 24, pp. 361—364.
10. Weertman J. High velocity dislocations. В книге «Response of metals to high velocity deformation», Interscience Publ., N. Y.—London, 1961.
11. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. Физматгиз, 1959.
12. Кайдановский Н. Л., Хайкин С. Э. Механические релаксационные колебания. ЖТФ, 1933, т. III, вып. 1.
13. Стрелков С. П. Маятник Фроуда. ЖТФ, 1933, т. III, вып. 4.
14. Ишлинский А. Ю., Крагельский И. В. О скачках при трении. ЖТФ, 1944, т. XIV, вып. 4—5.