Прикладная математика и механика. Том XXVII, 1963

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Г. П. Черепанов

(Москва)

Пусть на неизвестном замкнутом контуре L в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ заданы вторые производные бигармонической функции, являющиеся известными функциями координат x и y. Требуется определить границу L и бигармоническую функцию. К такой математической постановке сводится упруго-пластическая задача для тела, находящегося в условиях плоской деформации или плоского напряженного состояния, в том случае, когда пластическая зона целиком охватывает контур тела, так как напряжения в пластической области, как правило, определяются непосредственно по граничным нагрузкам [1]. К аналогичной математической задаче приводятся некоторые задачи выпучивания пластин и разрушения материалов [2].

В случае, когда заданные граничные функции являются соответствующими вторыми производными бигармонической функции, задача может быть решена методом Л. А. Галина [3].

Ниже предлагается метод решения некоторого класса указанных задач, в котором граничные функции могут и не удовлетворять последнему условию. Подробно рассмотрена задача об упруго-пластическом равновесии пластины с круговым отверстием в том случае, когда к контуру отверстия приложена постоянная нормальная нагрузка и равная нулю касательная, а на бесконечности имеет место однородное напряженное состояние.

§ 1. Постановка задач. Пусть бесконечное упруго-пластическое тело, находящееся в условиях плоской деформации или плоского напряженного состояния, имеет отверстие, загруженное произвольной нормальной и касательной нагрузкой. На бесконечности действуют напряжения, являющиеся полиномиальными функциями декартовых координат x и y. Начало координат расположим внутри отверстия. Все отверстие целиком охвачено пластической зоной. Предположим, что напряжения в пластической области определяются только формой контура отверстия и граничной нагрузкой и не зависят от напряженного состояния в упругой области. Тогда напряжения находятся из решения уравнений теории пластичности [1]. Будем считать их известными функциями x и y.

В плоской задаче теории упругости компоненты тензора напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} определяются по формулам Колосова — Мусхелишвили [4]

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\,[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \qquad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\,[\bar{z}\,\Phi'(z) + \Psi(z)] \qquad (1.1)$$

Здесь $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ — аналитические функции $z = x + iy$, которые в бесконечно удаленной точке ведут себя следующим образом (1.2)

$$\Phi(z) = d_n z^n + \ldots + d_0 + O(z^{-1}), \qquad \Psi(z) = e_n z^n + \ldots + e_0 + O(z^{-1})$$

Напомним, что напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy} выражаются через вторые производные бигармонической функции $V(x, y)$ так:

$$\sigma_x = V_{yy}, \qquad \sigma_y = V_{xx}, \qquad \tau_{xy} = -V_{xy}$$

На неизвестном контуре L, разделяющем упругую и пластическую области, все напряжения непрерывны. Отсюда по формулам (1.1) получаем следующую граничную задачу для внешности контура L

$$\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} = f_1(x, y) \quad \text{на } L, \qquad \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z) = f_2(x, y) \quad \text{на } L \tag{1.3}$$

Здесь $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ — непрерывные функции, известные из решения соответствующей задачи теории пластичности (первая из них действительна, вторая — комплексна). Требуется найти контур L и функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ на основании краевых условий (1.2) и (1.3).

Совершенно аналогично ставится внутренняя плоская упруго-пластическая задача, когда упругая область занимает внутренность контура L (при этом потребность в условии (1.2), естественно, отпадает). Везде в дальнейшем для краткости говорится только о внешней упруго-пластической задаче.

Математическая постановка краевой задачи (1.3), (1.2) может быть привлечена также для описания физических задач несколько другого рода. Пусть в бесконечной пластине с нагруженным отверстием, растягиваемой на бесконечности и находящейся в плоском напряженном состоянии, возникает зона местного выпучивания, охватывающая весь контур отверстия. Выпучивание может происходить также в том случае, когда отверстие отсутствует, но в пластине действуют интенсивные массовые силы. Предположим, что по некоторым соображениям нам известно напряженное состояние в зоне выпучивания (хотя бы с точностью до некоторых неопределенных постоянных). В частности, напряжения в выпученной зоне легко определяются в случае пластин с нулевой изгибной жесткостью [2]. Тогда на неизвестном контуре зоны выпучивания, очевидно, получаем краевую задачу (1.3).

Если контур тела, находящегося в условиях плоской деформации или плоского напряженного состояния, целиком охвачен некоторой областью предельного равновесия (зона разрушения), так что в области предельного равновесия напряжения могут быть определены из решения соответствующей статически определимой задачи независимо от напряженного состояния в остальной области, то соответствующая краевая задача совпадает с граничной задачей (1.3).

При решении упруго-пластических задач в дальнейшем делаются обычно принимаемые предположения [5]: 1) каждая характеристика, исходящая из контура тела, пересекает неизвестный контур L в одной точке, 2) при нагружении контуры раздела упругой и пластической зон последовательно охватывают друг друга.

§ 2. Метод решения краевой задачи. 1°. Перейдем на параметрическую плоскость комплексного переменного ζ при помощи преобразования $z = \omega(\zeta)$. Аналитическая функция $\omega(\zeta)$ конформно отображает внешность единичного круга плоскости ζ на внешность неизвестного контура L плоскости z с соответствием бесконечно удаленных точек $\omega(\infty) = \infty$; она должна быть определена в процессе решения задачи. Обозначим

$$\varphi(\zeta) = \Phi[\omega(\zeta)], \quad \psi(\zeta) = \Psi[\omega(\zeta)], \quad F_k[\omega(\zeta), \overline{\omega(\zeta)}] = \tag{2.1}$$

$$= f_k\{\tfrac{1}{2}[\omega(\zeta) + \overline{\omega(\zeta)}], \tfrac{1}{2i}[\omega(\zeta) - \overline{\omega(\zeta)}]\} \; (k = 1,2)$$

В принятых обозначениях из граничного условия (1.3) получаем на плоскости ζ следующую краевую задачу для определения трех аналитических функций $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$

$$\varphi(\zeta) + \overline{\varphi(\zeta)} = F_1[\omega(\zeta), \overline{\omega(\zeta)}] \quad \text{при } |\zeta| = 1 \tag{2.2}$$
$$\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta) + \psi(\zeta) = F_2[\omega(\zeta), \overline{\omega(\zeta)}] \quad \text{при } |\zeta| = 1$$

В бесконечно удаленной точке на основании (1.2) функции $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ ведут себя следующим образом:

$$\varphi(\zeta) = O(\zeta^n), \qquad \psi(\zeta) = O(\zeta^n), \qquad \omega(\zeta) = O(\zeta) \tag{2.3}$$

Рассмотрим второе краевое условие (2.2). Оно представляет собой некоторое конечное уравнение относительно $\overline{\omega(\zeta)}$.

Предложение 2.1. Пусть второе краевое условие (2.2) разрешимо относительно $\overline{\omega(\zeta)}$

$$\overline{\omega(\zeta)} = \Gamma[\omega(\zeta), \omega'(\zeta), \varphi'(\zeta), \psi(\zeta)] \tag{2.4}$$

и функция $\chi(\zeta)$

$$\chi(\zeta) = \Gamma[\omega(\zeta), \omega'(\zeta), \varphi'(\zeta), \psi(\zeta)] \tag{2.5}$$

является аналитической во внешности единичного круга $|\zeta| > 1$ за исключением, быть может, конечного числа изолированных особых точек однозначного характера. Тогда краевая задача (2.2) решается в замкнутом виде.

Действительно, пусть при $\zeta \to \infty$ функции $\omega(\zeta)$ и $\chi(\zeta)$ имеют вид

$$\omega(\zeta) = c_0\zeta + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\zeta^{-k}, \qquad \chi(\zeta) - \chi_0(\zeta) = O(\zeta^\nu) \qquad (\nu \gtrless 0) \tag{2.6}$$

Здесь $\chi_0(\zeta)$—функция, аналитическая в плоскости ζ, за исключением особых точек функции $\chi(\zeta)$, в которых она имеет особенности, совпадающие с особенностями функции $\chi(\zeta)$; функция $\chi_0(\zeta)$ известна с точностью, быть может, до неопределенных постоянных. Если функция $\chi(\zeta)$ на бесконечности имеет существенно особую точку, то соответствующая особенность также включается в выражение для $\chi_0(\zeta)$. Решение краевой задачи (2.4), очевидно, запишется в форме

$$\omega(\zeta) = c_0\zeta + \overline{P}_\nu(\zeta^{-1}) + \overline{\chi}_0(\zeta^{-1}), \qquad \chi(\zeta) = \overline{c}_0\zeta^{-1} + P_\nu(\zeta) + \chi_0(\zeta) \tag{2.7}$$

Здесь P_ν — полином ν-й степени с неопределенными пока коэффициентами. После этого функция $\varphi(\zeta)$ находится из решения задачи Дирихле (2.2). Все неизвестные постоянные определяются из конечных уравнений, полученных разложением найденных функций $\varphi(\zeta)$, $\omega(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ в окрестности особых точек функции $\chi(\zeta)$ и на бесконечности и использованием равенства (2.5).

2°. В указанном только что предложении условие аналитичности функции $\chi(\zeta)$ во внешности единичного круга является апостериорным. Укажем прием, который удобно использовать при практическом применении упомянутого предложения.

Рассмотрим следующее функциональное уравнение

$$\frac{\overline{\omega}(\zeta^{-1})}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta) + \psi(\zeta) = F_2[\omega(\zeta), \overline{\omega}(\zeta^{-1})] \qquad (|\zeta| > 1) \tag{2.8}$$

Функция $\overline{\omega}(\zeta^{-1})$, очевидно, аналитична внутри единичного круга $|\zeta| < 1$, за исключением начала координат, в котором она имеет полюс первого порядка.

Предложение 2.2. Пусть функция $\omega(\zeta)$ является аналитической во всей плоскости ζ за исключением бесконечно удаленной точки, в которой она имеет полюс первого порядка, и, может быть, конечного числа изолированных особых точек однозначного характера, расположенных внутри единичного круга $|\zeta| < 1$.

Тогда второе краевое условие (2.2) может быть аналитически продолжено во внешность единичного круга $|\zeta| > 1$ при помощи функционального уравнения (2.8).

Действительно, в названных предположениях функция $\omega(\zeta)$ может быть записана в форме (2.7). В частности, как это имеет место в рассматриваемом ниже примере, функция $\chi_0(\zeta)$ может быть тождественно равной нулю. Тогда очевидно

$$\overline{\omega}(\zeta^{-1}) = \bar{c}_0\zeta^{-1} + P_\nu(\zeta) + \chi_0(\zeta) \tag{2.9}$$

и левая часть функционального уравнения (2.8) является аналитической во внешности единичного круга функцией за исключением бесконечно удаленной точки и, быть может, конечного числа особых точек однозначного характера. Тогда и правая часть функционального уравнения (2.8) — функция $F_2[\omega(\zeta), \overline{\omega}(\zeta^{-1})]$ — должна быть аналитической во внешности единичного круга, за исключением бесконечно удаленной точки и, быть может, конечного числа особых точек однозначного характера, особенности в которых совпадают с соответствующими особенностями левой части. При этом второе краевое условие (2.2) будет, очевидно, удовлетворено.

Таким образом, необходимым признаком того, что функция $\omega(\zeta)$ имеет вид (2.7), является аналитичность правой части функционального уравнения (2.8) во внешности единичного круга $|\zeta| > 1$, за исключением конечного числа особых точек однозначного характера. Этот признак будет и достаточным, если особенности правой и левой частей функционального уравнения (2.8) можно выбрать так, чтобы они совпадали.

Этот признак позволяет иногда весьма просто находить замкнутые решения краевой задачи (2.2) и в том случае, когда неизвестно, аналитична ли функция $F_2[\omega(\zeta), \overline{\omega}(\zeta^{-1})]$ при $|\zeta| > 1$. Для этого следует формально подставить выражения (2.7) и (2.9) для функций $\omega(\zeta)$ и $\overline{\omega}(\zeta^{-1})$ в функциональное уравнение (2.8), потребовать аналитичности функции $F_2[\omega(\zeta), \overline{\omega}(\zeta^{-1})]$ почти всюду в $|\zeta| > 1$ и приравнять особенности левой и правой частей функционального уравнения (2.8).

Если некоторым выбором неопределенных коэффициентов и функций этим условиям можно удовлетворить, то существование решения (2.7) является доказанным.

Замечание. Высказанные соображения справедливы, очевидно, с несущественными изменениями не только для второго краевого условия (2.2), но и для краевого условия более общего вида

$$f[\overline{\omega(\zeta)},\ a_1(\zeta),\ a_2(\zeta), \ldots] = 0 \quad \text{при} \quad |\zeta| = 1$$

где $a_i(\zeta)$ — аналитические функции, f — дифференцируемая функция, в частности для задачи упруго-пластического кручения, когда упругое ядро полностью охвачено пластической зоной.

§ 3. Пластинка с круговым отверстием. 1°. Пусть бесконечная пластинка, находящаяся в плоском напряженном состоянии, имеет круговое отверстие радиуса R с центром в начале координат. К контуру отверстия приложена постоянная нормальная нагрузка $\sigma_r = p$ и равная нулю касательная $\tau_{r\theta} = 0$ (r, θ — полярные координаты). В бесконечно удаленной точке имеет место однородное напряженное состояние

$$\sigma_x = \sigma_x^\infty, \qquad \sigma_y = \sigma_y^\infty, \qquad \tau_{xy} = 0 \tag{3.1}$$

Считаем, что пластическая область охватывает все круговое отверстие. В качестве условия пластичности в пластической области возьмем условие пластичности Треска — Сен-Венана. Предположим, что в пластической области имеет место неравенство $\sigma_\theta \geqslant \sigma_r > 0$. Характеристики в пластической области будут радиальными прямыми, а напряжения равны [6]

$$\sigma_\theta = \sigma_s, \qquad \sigma_r = \sigma_s + (p - \sigma_s) R / r, \qquad \tau_{r\theta} = 0 \tag{3.2}$$

(σ_s — постоянная пластичности)

Для выполнения неравенства $\sigma_\theta \geqslant \sigma_r > 0$ нагрузка p, очевидно, должна удовлетворять условию $p \leqslant \sigma_s$. В упругой области имеют место основные представления Колосова — Мусхелишвили [4]

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 4 \operatorname{Re} \Phi(z), \qquad \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = 2e^{2i\theta} [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] \tag{3.3}$$

Используя (3.2) и (3.3), граничные условия на неизвестном контуре L, разделяющем упругую и пластическую области, представим так:

$$4 \operatorname{Re} \Phi(z) = 2\sigma_s + \frac{R(p - \sigma_s)}{r}, \qquad \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z) = \frac{R(\sigma_s - p)}{2r} e^{-2i\theta} \tag{3.4}$$

На основании (3.4) краевая задача на плоскости ζ для определения аналитических функций $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ запишется в виде

$$\begin{aligned} &4 \operatorname{Re} \varphi(\zeta) = 2\sigma_s + (p - \sigma_s) \frac{R}{|\omega(\zeta)|} && \text{при } |\zeta| = 1 \\ &\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}} \varphi'(\zeta) + \psi(\zeta) = \frac{R(\sigma_s - p)\overline{\omega(\zeta)}}{2|\omega(\zeta)|\,\omega(\zeta)} && \text{при } |\zeta| = 1 \end{aligned} \tag{3.5}$$

На основании формулы (3.1) функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ на бесконечности ведут себя следующим образом (3.6)

$$\varphi(\zeta) = \tfrac{1}{4}(\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) + O(\zeta^{-2}), \quad \psi(\zeta) = \tfrac{1}{2}(\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty) + O(\zeta^{-2}), \quad \omega(\zeta) = O(\zeta)$$

2°. Рассмотрим функциональное уравнение

$$\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \psi(\zeta) = \frac{R(\sigma_s - p)\,\bar{\omega}(\zeta^{-1})}{2\omega(\zeta)\sqrt{\omega(\zeta)\,\bar{\omega}(\zeta^{-1})}} \qquad (|\zeta| > 1) \tag{3.7}$$

Ищем решение функционального уравнения (3.7) в виде

$$\omega(\zeta) = c_0\zeta + \bar{P}_\nu(\zeta^{-1}) \tag{3.8}$$

Подставляя (3.8) в (3.7) и раскладывая все функции в ряд в окрестности бесконечно удаленной точки, нетрудно заметить, что $\nu = 3$, так что, если функция $\omega(\zeta)$ имеет вид (3.8), то она необходимо равна

$$\omega(\zeta) = c_0\zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \frac{c_3}{\zeta^3} \tag{3.9}$$

Здесь $c_0, \ldots, c_3$ — неопределенные пока постоянные. Из условий симметрии следует, что постоянная c_2 равна нулю, а остальные постоянные действительны. Покажем, что их можно выбрать таким образом, чтобы правая часть функционального уравнения (3.7) была аналитической во внешности единичного круга. Функция $\omega(\zeta)$ имеет, очевидно, четыре нуля, расположенные внутри единичного круга $|\zeta| < 1$, а у функции $\overline{\omega}(\zeta^{-1})$ все четыре нуля расположены вне единичного круга. Для того чтобы правая часть функционального уравнения (3.7) была аналитической во внешности единичного круга, необходимо и достаточно потребовать попарного совпадения нулей функции $\overline{\omega}(\zeta^{-1})$. Так как функция $\overline{\omega}(\zeta^{-1})$ равна

$$\overline{\omega}(\zeta^{-1}) = \zeta^{-1}(c_0 + c_1\zeta^2 + c_3\zeta^4) \tag{3.10}$$

то для попарного совпадения нулей достаточно потребовать равенства нулю дискриминанта биквадратного уравнения

$$c_1^2 = 4c_0c_3 \tag{3.11}$$

Используя условие (3.11), функции $\omega(\zeta)$ и $\overline{\omega}(\zeta^{-1})$ можно записать в виде

$$\omega(\zeta) = \frac{c_0}{\zeta^3}\left(\zeta^2 + \frac{c_1}{2c_0}\right)^2, \qquad \overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{c_3}{\zeta}\left(\zeta^2 + \frac{c_1}{2c_3}\right)^2 \tag{3.12}$$

Из функционального уравнения (3.7) находим

$$\psi(\zeta) = \frac{R(\sigma_s - p)\sqrt{c_3}\,(\zeta^2 + c_1/2c_3)\,\zeta^4}{2c_0^{3/2}(\zeta^2 + c_1/2c_0)^3} - \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\overline{\omega}(\zeta^{-1}) \tag{3.13}$$

3°. Найдем функцию $\varphi(\zeta)$. Первое краевое условие (3.5), используя формулы (3.12), удобно записать в виде

$$4\,\mathrm{Re}\,\varphi(\zeta) = 2\sigma_s + \frac{R(p - \sigma_s)\,\zeta^2}{\sqrt{c_0c_3}\,(\zeta^2 + c_1/2c_3)(\zeta^2 + c_1/2c_0)} =$$

$$= 2\sigma_s + \frac{2R(p - \sigma_s)\sqrt{c_0c_3}}{c_1(c_3 - c_0)}\left[\frac{1}{\zeta^2 + c_1/2c_3} - \frac{1}{\zeta^2 + c_1/2c_0}\right] \quad \text{при } |\zeta| = 1 \tag{3.14}$$

Функция $F^+(\zeta)$, равная

$$F^+(\zeta) = -2\overline{\varphi}(\zeta^{-1}) + \frac{2R\sqrt{c_0c_3}\,(p - \sigma_s)}{c_1(c_3 - c_0)}\,\frac{\zeta^2}{\zeta^2 + c_1/2c_3} \tag{3.15}$$

аналитична всюду внутри единичного круга $|\zeta| < 1$, а функция

$$F^-(\zeta) = 2\varphi(\zeta) - 2\sigma_s + \frac{2R(p - \sigma_s)\sqrt{c_0c_3}}{c_1(c_3 - c_0)}\,\frac{\zeta^2}{\zeta^2 + c_1/2c_0} \tag{3.16}$$

аналитична всюду вне единичного круга $|\zeta| > 1$.

Краевое условие (3.14) можно представить в виде

$$F^+(\zeta) = F^-(\zeta) \quad \text{при } |\zeta| = 1 \tag{3.17}$$

Следовательно, функции $F^+(\zeta)$ и $F^-(\zeta)$ являются аналитическим продолжением друг друга через единичную окружность. По теореме Лиувилля они равны тождественно одной и той же постоянной. Отсюда, а также из условия на бесконечности (3.6) для $\varphi(\zeta)$ легко получить

$$\varphi(\zeta) = \sigma_s - \frac{1}{4}(\sigma_y^\infty + \sigma_x^\infty) - \frac{R(p - \sigma_s)\sqrt{c_0c_3}}{c_1(c_3 - c_0)}\,\frac{\zeta^2}{\zeta^2 + c_1/2c_0} \tag{3.18}$$

причем между тремя неизвестными пока коэффициентами должна существовать следующая связь

$$\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty - 2\sigma_s + \frac{2R(p-\sigma_s)\sqrt{c_0 c_3}}{c_1(c_3-c_0)} = 0 \qquad (3.19)$$

Из формулы (3.18) находим

$$\varphi'(\zeta) = -\sqrt{\frac{c_3}{c_0}}\frac{R(p-\sigma_s)}{(c_3-c_0)\zeta^3} + O(\zeta^{-4}) \quad \text{при } \zeta\to\infty \qquad (3.20)$$

Используя условия на бесконечности (3.6) и (3.20), по формуле (3.13) получим еще одно соотношение между коэффициентами c_0, c_1, c_3

$$\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty = \frac{R(\sigma_s - p)\sqrt{c_3}}{c_0\sqrt{c_0}}\frac{c_0+c_3}{c_0-c_3} \qquad (3.21)$$

Итак, функции $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ определяются формулами (3.12), (3.13) и (3.18), а постоянные c_0, c_1, c_3 находятся из решения системы трех конечных уравнений (3.11), (3.19) и (3.21). Легко проверить, что при этом все граничные условия и условия на бесконечности удовлетворены.

Решение системы (3.11), (3.19) и (3.21) можно представить в виде

$$c_0 = \frac{4R}{\alpha(a^2-4)}, \qquad c_1 = \frac{4aR}{\alpha(a^2-4)}, \qquad c_3 = \frac{a^2R}{\alpha(a^2-4)}, \qquad \alpha = \frac{\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty - 2\sigma_s}{\sigma_s - p} \qquad (3.22)$$

где a является действительным корнем кубического уравнения

$$a^3 + 4a + \beta = 0, \qquad \beta = \frac{8(\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty)}{\sigma_y^\infty + \sigma_x^\infty - 2\sigma_s} \qquad (3.23)$$

Так как дискриминант $D = -4^4 - 27\beta^2$ кубического уравнения (3.23) всегда отрицателен, то уравнение (3.23) имеет один действительный и два сопряженных комплексных корня [7].

Окончательно, исходные функции $\omega(\zeta)$, $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ согласно формулам (3.12), (3.13), (3.18) и (3.22) примут вид

$$\omega(\zeta) = \frac{R(2\zeta^2+a)^2}{\alpha(a^2-4)\zeta^3}, \qquad \varphi(\zeta) = \sigma_s - \frac{1}{4}(\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) - \frac{\alpha(p-\sigma_s)\zeta^2}{2\zeta^2+a}$$

$$\psi(\zeta) = \alpha(p-\sigma_s)\zeta^4\frac{(a\zeta^2+a)[2(a^2+4)\zeta^2 - a(4-3a^2)]}{2(2\zeta^2+a)^2(2\zeta^2+a)(2\zeta^2-3a)} \qquad (3.24)$$

4°. Исследуем полученное решение (3.24). Уравнение контура L, разделяющего упругую и пластическую области, представим в параметрическом виде

$$x^*(t) = 4(1+a)\cos t + a^2\cos 3t, \qquad y^*(t) = 4(1-a)\sin t - a^2\sin 3t$$

$$[Rx^*(t) = \alpha(a^2-4)x(t), \ Ry^*(t) = \alpha(a^2-4)y(t), \ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)] \qquad (3.25)$$

Найдем границы существования решения. Для определенности считаем $\sigma_y^\infty \geqslant \sigma_x^\infty \geqslant 0$. Кроме того, должно выполняться очевидное неравенство $\sigma_y^\infty \leqslant \sigma_s$. Отсюда вытекают неравенства $\alpha < 0$, $\beta < 0$, $a > 0$. Для того чтобы пластическая зона охватывала все отверстие, необходимо, чтобы параметр a удовлетворял еще одному неравенству

$$a < 2\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \qquad (3.26)$$

Окончательно получаем следующие неравенства, определяющие границы существования решения (3.24)

$$0 > \alpha > -1, \qquad 2\frac{1+\alpha}{1-\alpha} > a > 0 \qquad (2 > a > 0) \tag{3.27}$$

5°. Производная выражения (3.24) для $\omega(\zeta)$ будет

$$\omega'(\zeta) = \frac{R\,(2\zeta^2 + a)\,(2\zeta^2 - 3a)}{\alpha\,(a^2 - 4)\,\zeta^4} \tag{3.28}$$

Для конформности отображения, производимого аналитической функцией $\omega(\zeta)$, необходимо, чтобы всюду во внешности единичного круга ее производная была отлична от нуля. В противном случае на контуре L, разделяющем упругую и пластическую области, появляется петля неоднозначности, которая не имеет физического смысла. Для выполнения этого условия параметр a согласно (3.28) должен удовлетворять неравенству

$$0 < a < {}^2/_3 \tag{3.29}$$

Отсюда, и из неравенства (3.27) вытекает, что параметр должен изменяться в пределах

$$-1 < \alpha < -{}^1/_2 \tag{3.30}$$

Несуществование физически реального решения при значениях параметра α в диапазоне $-{}^1/_2 < \alpha < 0$ заставляет сделать вывод, что решение исходной упруго-пластической задачи, непрерывной в напряжениях и в пластической и в упругой областях, при этих значениях параметра α не существует; следует или вводить разрывы напряжений в пластической области, или принять более совершенную модель упруго-пластического тела. По-видимому, вообще, решение упруго-пластической задачи существует лишь до появления точки возврата на контуре раздела L. Аналогичное обстоятельство имеет место в теории фильтрации [8,9], в теории трещин [10], при выпучивании пластин в мембранной постановке [2].

Заметим, что при $\sigma_s = 0$ полученное решение можно интерпретировать как решение задачи о выпучивании мембраны с круговым отверстием, к контуру которого приложены постоянные нормальные растягивающие напряжения и равные нулю касательные.

Автор благодарен Л. А. Галину и Г. И. Баренблатту за внимание к работе и ее обсуждение.

Поступила 2 II 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. ГИТТЛ, 1956.
2. Черепанов Г. П. О вынучивании мембран с отверстиями при растяжении. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 2.
3. Галин Л. А. Плоская упруго-пластическая задача. ПММ, 1946, т. X, вып. 5—6.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, 1954.
5. Хилл Р. Математическая теория пластичности. ГИТТЛ, 1956.
6. Соколовский В. В. Теория пластичности. ГТТИ, 1950.
7. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Физматгиз, М., 1962.
8. Галин Л. А. Неустановившаяся фильтрация со свободной поверхностью. ДАН СССР, 1945, т. XLVII, № 4.
9. Полубаринова-Кочина П. Я. К вопросу о перемещении контура нефтеносности. ДАН СССР, 1945, т. XLVII, № 4.
10. Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1961, № 4, стр. 3—56