Прикладная математика и механика. Том XXVII, 1963

СЖАТИЕ УПРУГИХ ТЕЛ В УСЛОВИЯХ СЦЕПЛЕНИЯ

(ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАЙ)

В. И. Моссаковский

(Днепропетровск)

Задача о сжатии упругих тел была сформулирована и решена Герцем в 1882 году [1]. Герц учитывал лишь первые члены разложения уравнений поверхностей контактирующих тел и пренебрегал трением, поэтому ему удалось использовать разработанный к тому времени аппарат теории ньютоновского потенциала. В частности, выявилась полная аналогия между задачей о контакте двух упругих тел и задачей о гравитационном поле однородного эллипсоида.

В дальнейшем применению и проверке результатов Герца было посвящено много работ.

Н. М. Беляев [2] подсчитал значения напряжений внутри-контактирующих тел.

Попытки оценить влияния сил трения на напряжения при контакте и на относительные перемещения контактирующих тел делались различными авторами.

В работах Коттанео [3] и Миндлина [4] решена задача для сжатия тел из материалов с одинаковыми механическими характеристиками; в этом случае распределение давлений, величина и форма области контакта оказываются не зависящими от сдвигающих усилий. Задача определения сил сцепления в конечном итоге сводилась снова к изученным задачам теории потенциала.

В тех же предположениях задача о качении упругих тел рассматривалась в работе [5].

Принципиально новые в математическом отношении задачи возникают при исследовании контактных задач с учетом трения (или сцепления) в том случае, когда характеристики материалов неодинаковы.

Первая такая задача в условиях плоской задачи была сформулирована и решена В. М. Абрамовым [6].

Задача ставилась так: найти распределение усилий (нормальных и тангенциальных) под подошвой плоского абсолютно жесткого штампа, взаимодействующего с упругой полуплоскостью, если его основание и граница полуплоскости сцеплены. Ясно, что это другой крайний случай: силы сцепления настолько велики, что они полностью препятствуют проскальзыванию точек границы полуплоскости относительно основания штампа.

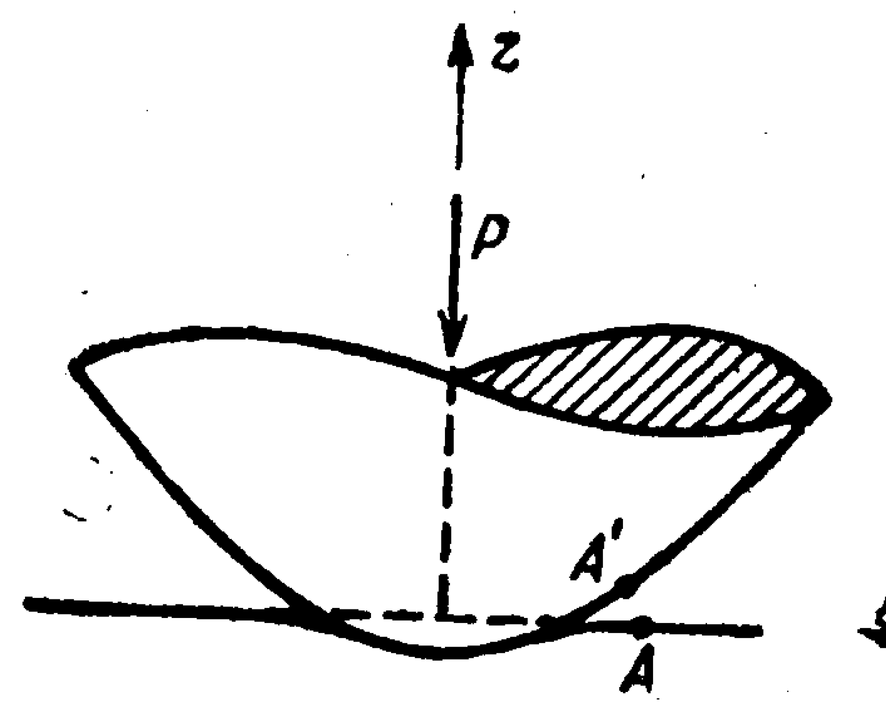
В этом случае граничные условия смешанной задачи для полуплоскости таковы: вне области контакта внешние усилия отсутствуют (или заданы), внутри области контакта заданы компонентны вектора перемещений.

Позже эта задача рассматривалась в общей постановке Л. А. Галиным [7] и Н. И. Мусхелишвили [8]. В другой работе [9] Л. А. Галин рассмотрел задачу, когда на площадке контакта, кроме участка сцепления, имеются участки проскальзывания. Трение на этих участках предполагалось связанным с давлением линейной зависимостью (закон Кулона).

Смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий в общем виде впервые сформулирована и решена автором работы [10]. В качестве примеров рассмотрены различные случаи взаимодействия плоского круглого штампа с упругим полупространством при условии сцепления на всей области контакта.

Несколько позже эта задача другим способом рассматривалась Я. С. Уфляндом [11].

Ниже рассматривается следующая задача (фиг. 1). Будем предполагать, что при постепенном увеличении сжимающей силы происходит постепенное увеличение области контакта. Пусть при некотором значении силы P вошли в соприкосновения точки A_1 и A_2 соответственно тел *1* и *2*. При дальнейшем увеличении сжимающей силы эти точки оказываются внутри области контакта. Будем предполагать, что силы сцепления в дальнейшем не позволяют смещаться одной точке относительно другой.



Будем рассматривать контакт упругих тел в процессе его развития, предполагая рост нагрузки достаточно медленным, чтобы не учитывать динамики процесса, при этом напряженное состояние будет зависеть от параметра нагружения. Задача решается в условиях осевой симметрии.

В § 1 статьи для иллюстрации предлагаемого метода решения рассматривается хорошо изученная задача о вдавливании гладкого осесимметричного штампа в упругое полупространство. В § 2 решается задача о вдавливании в упругое полупространство жесткого штампа в условиях сцепления (предельный случай поставленной задачи, когда одно из контактирующих тел абсолютно жесткое).

В § 3 и 4 результаты § 2 распространяются на общий случай, когда упругие постоянные контактирующих тел различны. В § 5 рассмотрен конкретный пример сжатия двух параболоидов вращения.

§ 1. Рассмотрим задачу о вдавливании гладкого абсолютно жесткого штампа в упругое полупространство (фиг. 1). Пусть $z = \Phi(\rho)$ — уравнение поверхности штампа, причем $\Phi(0) = 0$. В качестве параметра нагружения, определяющего стадию напряженного состояния, примем радиус площадки контакта a.

Напряженно деформированное состояние полупространства при отсутствии тангенциальных усилий на граничной плоскости в конечном итоге можно описать одной гармонической функцией $\varphi_3(x, y, z)$, при этом напряжения σ_z на границе и перемещения w выражаются формулами

$$\sigma_z(x, y, 0) = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \varphi_{3z}'(x, y, 0), \qquad w(x, y, 0) = \varphi_3(x, y, 0) \tag{1.1}$$

В дальнейшем, учитывая зависимость φ_3 от параметра a, будем обозначать ее $\varphi_3(\rho, z, a)$.

Рассмотрим два близких состояния, соответствующих значениям параметра a и $a + \delta a$. В силу линейности задач теории упругости разность напряженных состояний также будет некоторым напряженным состоянием.

Пусть $f(a)$ — осадка в центре штампа. Тогда граничные условия для рассматриваемых напряженных состояний будут

$$\begin{aligned} &w(\rho, 0, a) = -f(a) - \Phi(\rho) \quad (\rho < a), \qquad \sigma_z(\rho, 0, a) = 0 \quad (\rho > a) \\ &w(\rho, 0, a + \delta a) = -f(a + \delta a) - \Phi(\rho) \quad (\rho < a + \delta a) \\ &\sigma_z(\rho, 0, a + \delta a) = 0 \quad (\rho > a + \delta a) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Используя (1.1), получим

$$\varphi_3(\rho, 0, a) = -f(a) - \Phi(\rho) \quad (\rho < a), \qquad \varphi_{3z}'(\rho, 0, a) = 0 \quad (\rho > a)$$

$$\varphi_3(\rho, 0, a+\delta a) = -f(a+\delta a) - \Phi \quad (\rho < a+\delta a) \tag{1.3}$$

$$\varphi_{3z}'(\rho, 0, a+\delta a) = 0 \quad (\rho > a+\delta a)$$

Из (1.3), перейдя к пределу при $\delta a \to 0$, имеем

$$\frac{\partial \varphi_3(\rho, 0, a)}{\partial a} = -f'(a) \quad (\rho < a), \qquad \frac{\partial \varphi_{3z}'(\rho, 0, a)}{\partial a} = 0 \quad (\rho > a) \tag{1.4}$$

Производная гармонической функции по параметру является гармонической функцией.

Условия (1.4) достаточны для нахождения гармонической функции $\varphi_{3a}'(\rho, z, a)$. Очевидно, что эта функция будет решением задачи о вдавливании в упругое полупространство круглого штампа с гладким плоским основанием на глубину $f'(a)$. Таким образом, имеет место

$$\frac{\partial \varphi_3(\rho, z, a)}{\partial a} = f'(a)\,\varphi_0(\rho, z, a) \tag{1.5}$$

где $\varphi_0(\rho, z, a)$ — известная функция, соответствующая решению задачи о вдавливании в упругое полупространство круглого штампа на единичную глубину. Из (1.5) следует

$$\varphi_3(\rho, z, a) = \int_0^a f'(t)\,\varphi_0(\rho, z, t)\,dt \tag{1.6}$$

Полагая $z = 0$ в равенстве (1.6) и учитывая условие (1.2), получим интегральное уравнение для нахождения неизвестной функции $f(a)$

$$-\Phi(\rho) = \int_0^a f'(t)\,[\varphi_0(\rho, 0, t) + 1]\,dt \tag{1.7}$$

На границе полупространства $\varphi_0(\rho, z, t)$ принимает значения

$$\varphi_0(\rho, 0, t) = -1 \quad (t > \rho), \qquad \varphi_0(\rho, 0, t) = -\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{t}{\rho} \quad (t < \rho)$$

Таким образом, уравнение (1.7) принимает вид

$$-\Phi(\rho) = \int_0^\rho f'(t)\left[-\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{t}{\rho} + 1\right]dt \tag{1.8}$$

Дифференцируя (1.8) по ρ, получим

$$-\Phi'(\rho) = \frac{2}{\pi}\int_0^\rho f'(t)\,\frac{t\,dt}{\rho\sqrt{\rho^2 - t^2}} \tag{1.9}$$

Это — уравнение Абеля. Его решение имеет вид

$$f'(t) = -\frac{1}{\pi}\int_0^t (t^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}}\,[\Phi'(\rho) + r\Phi''(r)]\,dr$$

имеет место

$$\varphi_{0z}'(\rho, 0, t) = \frac{2}{\pi\sqrt{t^2-\rho^2}} \quad (\rho < t), \qquad \varphi_{0z}'(\rho, 0, t) = 0 \quad (\rho > t) \tag{1.10}$$

Используя (1.6), найдем

$$\varphi_z'(\rho, 0, a) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\rho}^{a}\left\{\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\int\limits_{0}^{t}\frac{\Phi'(r)\,r\,dt}{\sqrt{t^2-r^2}}\right\}\frac{dt}{\sqrt{t^2-r^2}} \tag{1.11}$$

После несложных преобразований, используя (1.1), получим известную формулу для давления под штампом в случае, когда давления на его границе ограничены [12]

$$\sigma_z(\rho, 0, a) = -\frac{E}{\pi(1-\nu^2)}\int\limits_{\rho}^{a}\frac{dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\int\limits_{0}^{t}\frac{\Phi'(r)+\Phi''(r)\,r}{\sqrt{t^2-r^2}}\,dr \tag{1.12}$$

Для дальнейшего отметим, что если $f'(t) = t^m$, то $\Phi(\rho) = C_m\rho^m$.

Для нахождения постоянной C_m используем известную формулу

$$\int\limits_{0}^{1} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{1.13}$$

или после преобразований

$$\int\limits_{0}^{1} x^{2\alpha-1}(1-x^2)^{\beta-1}\,dx = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(a+\beta)}$$

В рассматриваемом случае $\beta = {}^1/_2$, $\alpha = {}^1/_2\, m + 1$. Таким образом, при помощи подстановки $f'(t) = t^m$ из (1.9) получим

$$C_m = -\frac{2}{\pi}\,\frac{\Gamma(^1/_2)\,\Gamma(^1/_2 m+2)}{\Gamma(^1/_2 m+3)} \tag{1.14}$$

В общем случае, когда $\Phi'(\rho)$ является полиномом

$$\Phi'(\rho) = \sum_{n=0}^{k} A_m\rho^m$$

функция $f'(t)$ также является полиномом

$$f'(t) = \sum_{m=0}^{k}\frac{A_m}{C_m}\,t^m \tag{1.15}$$

§ 2. Рассмотрим теперь вдавливание абсолютно жесткого штампа, обладающего осевой симметрией, в упругое полупространство. Будем предполагать, что сцепление между поверхностями штампа и полупространства настолько велико, что проскальзывание на площадке контакта полностью отсутствует. Точки границы упругого полупространства, вошедшие в соприкосновение с поверхностью штампа, прилипают к ней и при дальнейшем развитии процесса двигаются вместе со штампом, т. е. параллельно оси z. Математически это условие выразится в том, что функция радиальных перемещений $u_r(\rho, z, a)$ в области контакта не зависит от радиуса штампа a.

Таким образом, граничные условия задачи можно записать в виде

$$\begin{aligned} &w(\rho, 0, a) = -f(a) - \Phi(\rho), \quad u_r(\rho, 0, a) = F(\rho) \quad (\rho < a)\\ &\sigma_z(\rho, 0, a) = 0, \quad \tau_{zr}(\rho, 0, a) = 0 \quad (\rho > a) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Используя общее решение уравнений теории упругости в форме Треффтца, напряженное состояние для полупространства можно описать при помощи двух гармонических функций. В случае осевой симметрии соотношения (2.1) принимают вид (2.2)

$$\varphi_3(\rho, 0, a) = -f(a) - \Phi(\rho), \qquad \varphi_{4z}'(\rho, 0, a) = \frac{\partial F(\rho)}{\partial \rho} + \frac{F(\rho)}{\rho} \quad (\rho < a)$$

$$\varphi_{3z}'(\rho, 0, a) - \frac{1}{A}\varphi_{4z}'(\rho, 0, a) = 0, \quad \varphi_3(\rho, 0, a) - A\varphi_4(\rho, 0, a) = 0 \quad (a < \rho)$$

Здесь

$$A = \frac{2\mu + \lambda}{\mu} = 2\,\frac{1-\nu}{1-2\nu}$$

Для близкого состояния с радиусом площадки $a + \delta a$ соотношения (2.2) примут вид

$$\varphi_3(\rho, 0, a+\delta a) = -f(a+\delta a) - \Phi(\rho)$$

$$\varphi_{4z}'(\rho, 0, a+\delta a) = \frac{\partial F(\rho)}{\partial \rho} + \frac{F(\rho)}{\partial \rho} \qquad (\rho < a + \delta a)$$

$$\varphi_{3z}'(\rho, 0, a+\delta a) - \frac{1}{A}\varphi_{4z}'(\rho, 0, a+\delta a) = 0 \tag{2.3}$$

$$\varphi_3(\rho, 0, a+\delta a) - A\varphi_4(\rho, 0, a+\delta a) = 0 \qquad (a + \delta a < \rho)$$

Как и в § 1, рассмотрим разность напряженных состояний, устремив $\delta a \to 0$; тогда получим

$$\frac{\partial \varphi_3(\rho, 0, a)}{\partial a} = -f'(a), \qquad \frac{\partial \varphi_{4z}'(\rho, 0, a)}{\partial a} = 0 \qquad (\rho < a)$$

$$\frac{\partial \varphi_{3z}'(\rho, 0, a)}{\partial a} - \frac{1}{A}\frac{\partial \varphi_{4z}'(\rho, 0, a)}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_3(\rho, 0, a)}{\partial a} - A\,\frac{\partial \varphi_4(\rho, 0, a)}{\partial a} = 0 \quad (a < \rho) \tag{2.4}$$

Условия (3.4) показывают, что напряженное состояние полупространства, описываемое гармоническими функциями $\partial\varphi_3(\rho, z, a)/\partial a$, $\partial\varphi_4(\rho, t, a)/\partial a$, соответствует симметричному вдавливанию плоского круглого штампа в упругое полупространство в условиях сцепления на глубину $f'(a)$. Таким образом, искомые функции представляются в виде

$$\frac{\partial \varphi_3(\rho, z, a)}{\partial a} = f'(a)\,\varphi_{30}(\rho, z, n), \qquad \frac{\partial \varphi_4(\rho, z, a)}{\partial a} = f'(a)\,\varphi_{40}(\rho, z, a) \tag{2.5}$$

где φ_{30}, φ_{40} — известные функции [10], соответствующие решению задачи о вдавливании в упругое полупространство плоского круглого штампа на единичную глубину в условиях сцепления

$$\varphi_3(\rho, z, a) = \int_0^a f'(t)\,\varphi_{30}(\rho, z, t)\,dt \tag{2.6}$$

$$\varphi_4(\rho, z, a) = \int_0^a f'(t)\,\varphi_{40}(\rho, z, t)\,dt \tag{2.7}$$

Полагая $z = 0$ в равенстве (2.6) и учитывая (2.2), получим интегральное уравнение

$$-\Phi(\rho) = \int_0^a f'(t)\,[\varphi_{30}(\rho, 0, t) + 1]\,dt \tag{2.8}$$

На границе полупространства функция φ_{30} (ρ, 0, t) принимает значения

$$\varphi_{30}(\rho, 0, t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\rho u'_{1x}(x, 0, t)\frac{dx}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} \tag{2.9}$$

где

$$u'_{1x}(x, 0, t) = -4 \quad (x < t), \quad u'_{1x}(x, 0, t) = \left[-4 + 4\cos\theta\ln\frac{x-t}{x+t}\right] \quad (x > t) \tag{2.10}$$

$$\theta = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{A+1}{A-1} = \frac{1}{2\pi}\ln(3 - 4\nu)$$

Таким образом,

$$\varphi_{30}(\rho, 0, t) = -1 \quad (\rho < t)$$

$$\varphi_{30}(\rho, 0, t) = -1 + \frac{2}{\pi}\int_0^\rho \cos\left(\theta\ln\frac{x-t}{x+t}\right)\frac{dt}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} \quad (\rho > t) \tag{2.11}$$

Таким образом, уравнение для определения неизвестной функции $f'(t)$ принимает вид

$$-\Phi(\rho) = \frac{2}{\pi}\int_t^\rho f'(t)\,dt\int_t^\rho \frac{\chi(x,t)\,dx}{\sqrt{\rho^2 - x^2}}, \quad \chi(x,t) = \cos\left(\theta\ln\frac{x-t}{x+t}\right) \tag{2.12}$$

Изменив порядок интегрирования в (2.12), получим

$$-\Phi(\rho) = \frac{2}{\pi}\int_0^\rho \frac{dx}{\sqrt{\rho^2 - x^2}}\int_0^x f'(t)\cos\theta\ln\frac{x-t}{x+t}\,dt \tag{2.13}$$

Теперь становится очевидным, что обнаруженное свойство уравнения (1.9) остается в силе и для уравнения (2.13). Подставив вместо $f'(t) = t^m$, найдем, что $\Phi(\rho) = d_m\rho^{m+1}$, где

$$d_m = -\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{x^{m+1}}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx\int_0^1 t^m\cos\left(\theta\ln\frac{1-t}{1+t}\right)dt \tag{2.14}$$

Следовательно, уравнение (2.13) всегда может быть обращено для того случая, когда Φ (ρ) является полиномом.

Давление под подошвой плоского круглого штампа с единичной осадкой определяется из формулы

$$\sigma_{0z}(\rho, 0, t) = \frac{8\theta t\mu(2\mu + \lambda)\sqrt{A^2 - 1}}{\pi(3\mu + \lambda)}\int_0^\rho \frac{\chi(x,t)dx}{\sqrt{\rho^2 - x^2}(t^2 - x^2)} \quad (\rho < t)$$

$$\sigma_{0z}(\rho, 0, t) = 0 \quad (\rho > t) \tag{2.15}$$

Таким образом, давление в общем случае вдавливания абсолютно жесткого штампа с осевой симметрией в условиях сцепления определяется по формуле

$$\sigma_z(\rho, 0, a) = \frac{8\theta\mu(2\mu + \lambda)\sqrt{A^2 - 1}}{\pi(3\mu + \lambda)}\int_\rho^a f'(t)\,t\,dt\int_0^\rho \frac{\chi(x, t)dt}{\sqrt{\rho^2 - x^2}(t^2 - x^2)} \tag{2.16}$$

§ 3. Рассмотрим задачу о сжатии двух тел, обладающих осевой симметрией, как обычно будем считать, что площадка контакта мала по сравнению с линейными размерами контактирующих тел, заменяем их двумя полупространствами. В дальнейшем все величины, относящиеся к «нижнему» полупространству ($z \leqslant 0$), будем обозначать индексом 1; величины, относящиеся к «верхнему» полупространству,— индексом 2.

Как и раньше, в качестве параметра, определяющего различные напряженные состояния, примем радиус площадки контакта a.

Пусть уравнения поверхностей недеформированных полупространств соответственно

$$z = \Phi_1(\rho), \qquad z = \Phi_2(\rho) \tag{3.1}$$

Граничные условия задачи можно записать в виде

$$\begin{gathered}\sigma_{1z}(\rho, 0, a) = \sigma_{2z}(\rho, 0, a), \qquad \tau_{1z\rho}(\rho, 0, a) = \tau_{2z\rho}(\rho, 0, a) \qquad (0 < \rho < \infty)\\ w_1(\rho, 0, a) - w_2(\rho, 0, a) = \Phi_1(\rho) - \Phi_2(\rho) - f(a)\\ u_{1r}(\rho, 0, a) - u_{2r}(\rho, 0, a) = F(\rho) \qquad (\rho < a)\\ \sigma_{1z}(\rho, 0, a) = 0, \qquad \tau_{1z\rho}(\rho, 0, a) = 0 \qquad (\rho > a)\end{gathered} \tag{3.2}$$

Сопоставляя, как и раньше, два бесконечно близких состояния и учитывая, что $F(\rho)$ не зависит от a, найдем

$$\begin{gathered}\frac{\partial w_1(\rho, 0, a)}{\partial a} - \frac{\partial w_2(\rho, 0, a)}{\partial a} = -f'(a)\\ \frac{\partial u_{1r}(\rho, 0, a)}{\partial a} - \frac{\partial u_{2r}(\rho, 0, a)}{\partial a} = 0 \qquad (\rho < a)\\ \frac{\partial \sigma_{1z}(\rho, 0, a)}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{1rz}(\rho, 0, a)}{\partial a} = 0 \qquad (a < \rho)\\ \frac{\partial \sigma_{1z}(\rho, 0, a)}{\partial a} = \frac{\partial \sigma_{2z}(\rho, 0, a)}{\partial a}, \qquad \frac{\partial \tau_{1rz}(\rho, 0, a)}{\partial a} = \frac{\partial \tau_{2rz}(\rho, 0, a)}{\partial a} \qquad (0 < \rho < \infty)\end{gathered} \tag{3.3}$$

Граничные условия (3.3) определяют с точностью до множителя $-f'(a)$ следующую задачу: два полупространства склеены на круговой площадке и затем смещены одно относительно другого вдоль нормали к границе на расстояние 1. Если величины, определяющие решение этой задачи, снабдить индексами 10 и 20 для нижнего и соответственно верхнего полупространства, то будут иметь место соотношения

$$\begin{gathered}\frac{\partial w_1(\rho, z, a)}{\partial a} = -f'(a)\, w_{10}(\rho, z, a), \qquad \frac{\partial w_2(\rho, z, a)}{\partial a} = -f'(a)\, w_{20}(\rho, z, a)\\ \frac{\partial \sigma_{1z}(\rho, 0, a)}{\partial a} = -f'(a)\, \sigma_{10z}(\rho, z, a) \quad \text{и т. д.}\end{gathered} \tag{3.4}$$

или после интегрирования по a

$$\begin{gathered}w_1(\rho, z, a) = -\int_0^a f'(t)\, w_{10}(\rho, z, t)\, dt\\ w_2(\rho, z, a) = -\int_0^a f'(t)\, w_{20}(\rho, z, t)\, dt\\ \sigma_{1z}(\rho, z, a) = -\int_0^a f'(t)\, \sigma_{10z}(\rho, z, t)\, dt \quad \text{и т. д.}\end{gathered} \tag{3.5}$$

Первые два равенства (3.5) совместно с (3.2) дают интегральное уравнение для определения неизвестной функции

$$\Phi_1(\rho) - \Phi_2(\rho) = -\int_0^a f'(t)\,[w_{10}(\rho, 0, t) - w_{20}(\rho, 0, t) - 1]\,dt \qquad (3.6)$$

§ 4. Здесь решаем вспомогательную смешанную задачу, частный случай которой сформулирован в § 3: определить напряженно деформированное состояние двух полупространств, занимающих соответственно области $z \leqslant 0$ (нижнее или первое полупространство) и $z \geqslant 0$ (верхнее или второе полупространство), если заданы условия

$$\begin{aligned} &u_1(x, y, 0) - u_2(x, y, 0) = u(x, y) \\ &v_1(x, y, 0) - v_2(x, y, 0) = v(x, y) \qquad \text{в обл. } S \\ &w_1(x, y, 0) - w_2(x, y, 0) = w(x, y) \end{aligned} \qquad (4.1)$$

$$\sigma_{1z}(x, y, 0) = \sigma_{2z}(x, y, 0), \qquad \tau_{1zx}(x, y, 0) = \tau_{2zx}(x, y, 0)$$

$$\tau_{1zy}(x, y, 0) = \tau_{2zy}(x, y, 0)$$

где $u(x, u)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ — известные функции.

Кроме того, будем считать, что вне области S к поверхностям полупространств не приложены нагрузки и что напряжения и смещения внутри обоих полупространств исчезают на бесконечности. Пусть к части границы S упругого полупространства $z \leqslant 0$ приложены нагрузки

$$\sigma_{1z}(x, y, 0) = N(x, y), \quad \tau_{1zx}(x, y, 0) = L(x, y), \quad \tau_{1zy}(x, y, 0) = M(x, y) \qquad (4.2)$$

Перемещения точек границы определяются по формулам [3]

$$\begin{aligned} u_1(x, y, 0) = {} & \frac{1}{2\pi\mu_1}\int_S \frac{L}{r}\,dS - \frac{\mu}{4\pi\mu_1(\lambda_1+\mu_1)}\int_S L\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\,ds - \\ & - \frac{\lambda_1}{4\pi\mu_1(\lambda_1+\mu_1)}\int_S M\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial y}\,ds - \frac{1}{4\pi(\lambda_1+\mu_1)}\int_S N\frac{\partial}{\partial x}\ln r\,ds \end{aligned} \qquad (4.3)$$

$$\begin{aligned} v_1(x, y, 0) = {} & \frac{1}{2\pi\mu_1}\int_S \frac{M}{r}\,ds - \frac{\lambda_1}{4\pi\mu_1(\lambda_1+\mu_1)}\int_S M\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\,ds - \\ & - \frac{\lambda_1}{4\pi\mu_1(\lambda_1+\mu_1)}\int L\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial y} - \frac{1}{4\pi(\lambda_1+\mu_1)}\int_S N\frac{\partial}{\partial y}\ln r\,ds \end{aligned}$$

$$w_1(x, y, 0) = \frac{\lambda_1+2\mu_1}{4\pi\mu(\lambda_1+\mu_1)}\int_S \frac{N}{r}\,ds + \frac{1}{4\pi(\lambda_1+\mu_1)}\int_S\left(L\frac{\partial \ln r}{\partial x} + M\frac{\partial \ln r}{\partial y}\right)ds$$

Здесь и в дальнейшем

$$r = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} \qquad \left(\Lambda_i = \frac{\lambda i + 2\mu i}{\mu_i(\lambda_i+\mu_i)}, \quad i = 1, 2\right) \qquad (4.4)$$

Формулы (4.3) преобразуем к виду

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\Lambda_1}{4\pi}\int_S\left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{\partial s}{r} - \frac{1}{4\pi(\lambda_1+\mu_1)}\int_S \frac{N}{r^2}\,ds \qquad (4.5)$$

$$w_1 = \frac{\Lambda_1}{4\pi}\int_S \frac{N}{r} - \frac{1}{4\pi(\lambda_1+\mu_1)}\int_S\left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}\right)\ln r\,ds$$

Аналогичные формулы имеют место для верхнего полупространства с той разницей, что перед первыми интегралами нужно изменить знаки.

Таким образом, получим

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_1 - u_2) + \frac{\partial}{\partial y}(v_1 - v_2) = \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{4\pi} \int\limits_S \left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}\right) \frac{ds}{r} - \\ - \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\lambda_1 + \mu_1} - \frac{1}{\lambda_2 + \mu_2}\right] \int\limits_S \frac{N}{r^2}\, ds \tag{4.6}$$

$$w_1 - w_2 = \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{4\pi} \int\limits_S \frac{N}{r} - \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\lambda_1 + \mu_1} - \frac{1}{\lambda_2 + \mu_2}\right] \int\limits_S \left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}\right) \ln r ds$$

Для рассматриваемого случая осевой симметрии величины, входящие в (4.6), полностью определяют напряженно деформированное состояние.

Выражение (4.6) можно рассматривать как интегральные уравнения для определения величины N, $\partial L \,/\, \partial x + \partial M \,/\, \partial y$. С другой стороны, когда эти величины найдены, по формулам (4.6) можно найти значения функций $w_1 - w_2$ вне S.

Для упругого полупространства $z \leqslant 0$ с упругими постоянным λ, μ, определяемыми из формул

$$\frac{1}{\lambda + \mu} = \frac{1}{\lambda_1 + \mu_1} - \frac{1}{\lambda_2 + \mu_2}, \qquad \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} = \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)} + \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)} \tag{4.7}$$

интегральные уравнения смешанной задачи эквивалентны уравнениям (4.6). При этом силовые и геометрические факторы обеих задач на граничной плоскости совпадают.

Следовательно, решение задачи § 3 переносится автоматически на общий случай сжатия упругих тел с той только разницей, что вместо упругих постоянных λ и μ в формулы нужно подставить их значения из (4.7).

§ 5. В качестве примера рассмотрим вдавливание абсолютно жесткой сферы в упругую полуплоскость в условиях сцепления.

Ограничиваясь в разложении уравнения сферы радиуса R первыми членами, как обычно принято в такого типа задачах, получим

$$\Phi(\rho) = \frac{1}{2R^\circ}\rho^2 \tag{5.1}$$

Согласно (2.14) получим

$$f'(t) = \frac{1}{Rd_1}\rho \tag{5.2}$$

Приводим значения величин d_1 для различных значений коэффициента Пуассона ν.

$\nu = 0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$d_1 = -0.225$	−0.234	−0.240	−0.244	−0.248	−0.250

Для суммарной нагрузки P, вызывающей заданную осадку штампа, используя (2.16), найдем

$$P = \frac{8\theta\mu(2\mu + \lambda)\sqrt{A^2 - 1}}{\pi(3\mu + \lambda)} \int\limits_0^a 2\pi\rho d\rho \int\limits_\rho^a f'(t)\, t dt \int\limits_0^\rho \frac{\chi(x, t)\, dx}{\sqrt{\rho^2 - x^2}\,(t^2 - x^2)} \tag{5.3}$$

Подставив сюда выражение (5.2) для $f'(t)$, и произведя замену порядка интегрирования, получим

$$P = \frac{16\theta\mu\,(2\mu+\lambda)\sqrt{A^2-1}}{(3\mu+\lambda)\,Rd_1}\int_0^a dx\int_x^a \frac{t^2}{\sqrt{t^2-x^2}}\,\chi(x,t) \tag{5.4}$$

Меняя порядок интегрирования, имеем

$$P = \frac{16\theta\mu\,(2\mu+\lambda)\sqrt{A^2-1}}{(3\mu+\lambda)\,Rd_1}\int_0^a t^2dt\int_0^t \frac{\chi(x,t)}{\sqrt{t^2-x^2}} \tag{5.5}$$

Внутренний интеграл легко вычисляется методом А. Н. Мусхелишвили и равен

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{\sqrt{A+1}}{A}$$

В результате окончательно для суммарной силы P имеем

$$P = \frac{8\pi\theta\mu\,(2\mu+\lambda)\,(A^2-1)\,a^3}{3\,(3\mu+\lambda)\,Rd_1A} \tag{5.6}$$

Поступила 13 XII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Hertz H. Gesammelte Werke, 1895, B. 1.
2. Беляев Н. М. Вычисление наибольших расчетных напряжений при сжатии соприкасающихся тел. Сб. Ленингр. ин-та инж. путей сообщ., 1929, вып. 102.
3. Cottaneo C. Sul Contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degei sforzi. Accademia Lincei, 1948, vol. 65.
4. Minglin R. D. Compbian ce of elastic bodies in contact. Journal of Applied Mechanics, 1949, vol. 116, N 3.
5. Моссаковский В. И. О качении упругих тел. Сб. тр. III Всесоюзн. матем. съезда. М., 1958, т. 2.
6. Абрамов В. М. Проблема контакта упругой полуплоскости с абсолютно жестким фундаментом при учете сил трения. ДАН СССР, 1937, т. 17, № 4.
7. Галин Л. А. Смешанные задачи теории упругости с силами трения для полуплоскости. ДАН СССР, 1943, т. 39, № 3.
8. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., АН СССР, 1949.
9. Галин Л. А. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления. ПММ, 1945, т. 9, вып. 5.
10. Моссаковский В. И. Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий. ПММ, 1954, т. 18, вып. 2.
11. Уфлянд Я. С. Контактная задача теории упругости для кругового в плане штампа при наличии сцепления. ПММ, 1956, т. 20, вып. 5.
12. Моссаковский В. И. Давление круглого штампа на упругое полупространство. Ин-т машиноведения и автоматики АН УССР, Науч. зап. 1953, т. 1, вып. 2.