

ИСПРАВЛЕНИЕ К РАБОТЕ АВТОРА «О ВДАВЛИВАНИИ ЖЕСТКИХ ШТАМПОВ
В ПЛАСТИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО» (ПММ, 1959, Т. XXII, ВЫП. 2)

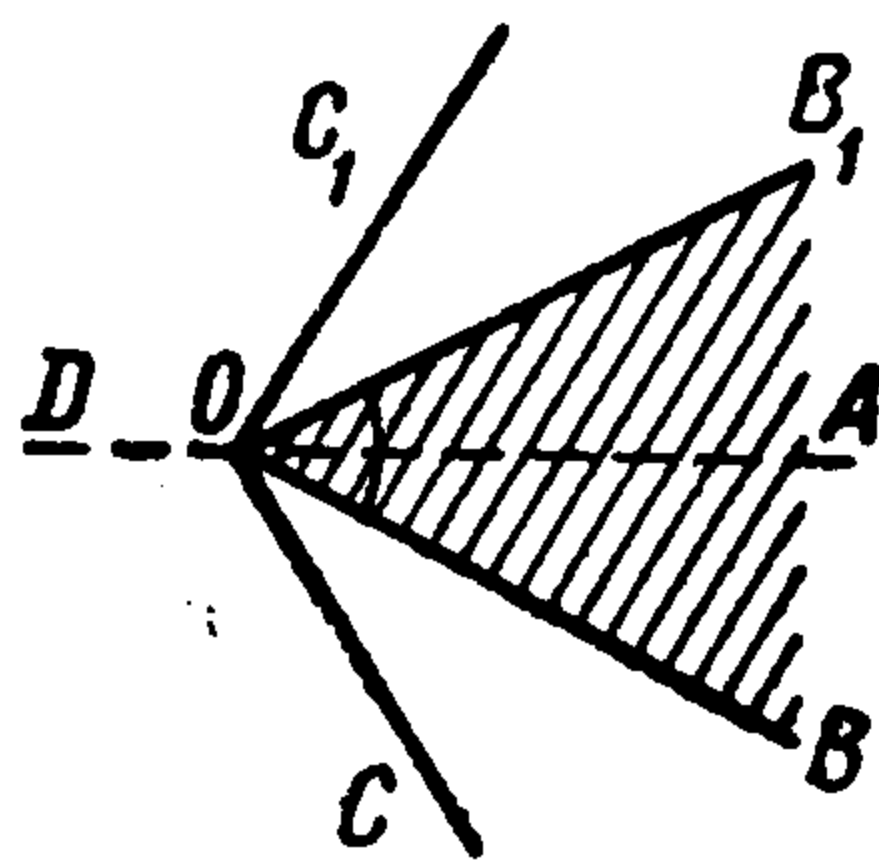
Д. Д. Ивлев

(Воронеж)

В работе [1] рассмотрены основные соотношения теории сферического деформированного состояния. При выводе частных интегралов автор не учел, что в отличие от теории плоского деформированного состояния идеально пластического тела, где удастся найти конечные соотношения вдоль характеристик и, следовательно, доказать возможность использования характеристик в качестве криволинейных координат [2], в теории сферического деформированного состояния подобные связи оказываются в общем случае неинтегрируемыми. Это обстоятельство привело к неверному выводу о постоянстве предельного давления, действующего при вдавливании со стороны клинообразного в плане штампа на полуплоскость.

Результаты, полученные в работе [1], полностью определяют каноническую систему уравнений, соотношения вдоль характеристик в плоскости двух переменных; поэтому задачи сферического деформированного состояния могут быть решены методом конечных разностей. Ниже приведено численное решение задачи о вдавливании клинообразного в плане штампа в пластическое полупространство.

Уравнения теории сферического деформированного состояния имеют вид [1]



Фиг. 1

$$\frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + (\sigma_{\theta} - \sigma_{\varphi}) \operatorname{ctg} \theta = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi}}{\partial \varphi} + 2\tau_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \theta = 0$$

$$(\sigma_{\theta} - \sigma_{\varphi})^2 + 4\tau_{\theta\varphi}^2 = 4k^2 \quad (k = \text{const}) \quad (2)$$

Условие пластичности [2] имеет место при любом условии пластичности, так как в случае сферического деформированного состояния третий инвариант девиатора напряжений равен нулю.

Используя замену переменных

$$\sigma_{\theta} = 2kp + k \cos 2\psi, \quad \sigma_{\varphi} = 2kp - k \cos 2\psi, \quad \tau_{\theta\varphi} = k \sin 2\psi \quad (3)$$

и подставляя ее в уравнения равновесия (2), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \sin 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\cos 2\psi}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \cos 2\psi \operatorname{ctg} \theta &= 0 \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \cos 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\sin 2\psi}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \sin 2\psi \operatorname{ctg} \theta &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Система уравнений (4) принадлежит к гиперболическому типу, характеристики ее имеют вид

$$\left(\frac{d\varphi}{d\theta} \right)_{1,2} = \frac{\operatorname{tg}(\psi \pm 1/4 \pi)}{\sin \theta} \quad (5)$$

Вдоль характеристик (5) имеют место соотношения

$$dp \pm d\psi \pm \cos \theta d\varphi = 0 \quad (6)$$

Соотношения (5), (6) могут быть записаны в конечных разностях и использованы для решения конкретных задач.

В задаче о вдавливании клинообразного в плане штампа с плоским основанием, вдавливаемого в пластическое полупространство (на фиг. 1 дан вид сверху, область BOB_1 соответствует контактной поверхности штампа, области BOS и B_1OC_1 — зонам

пластического состояния материала на свободной поверхности полупространства), следует рассмотреть прямоугольник

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right), \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi$$

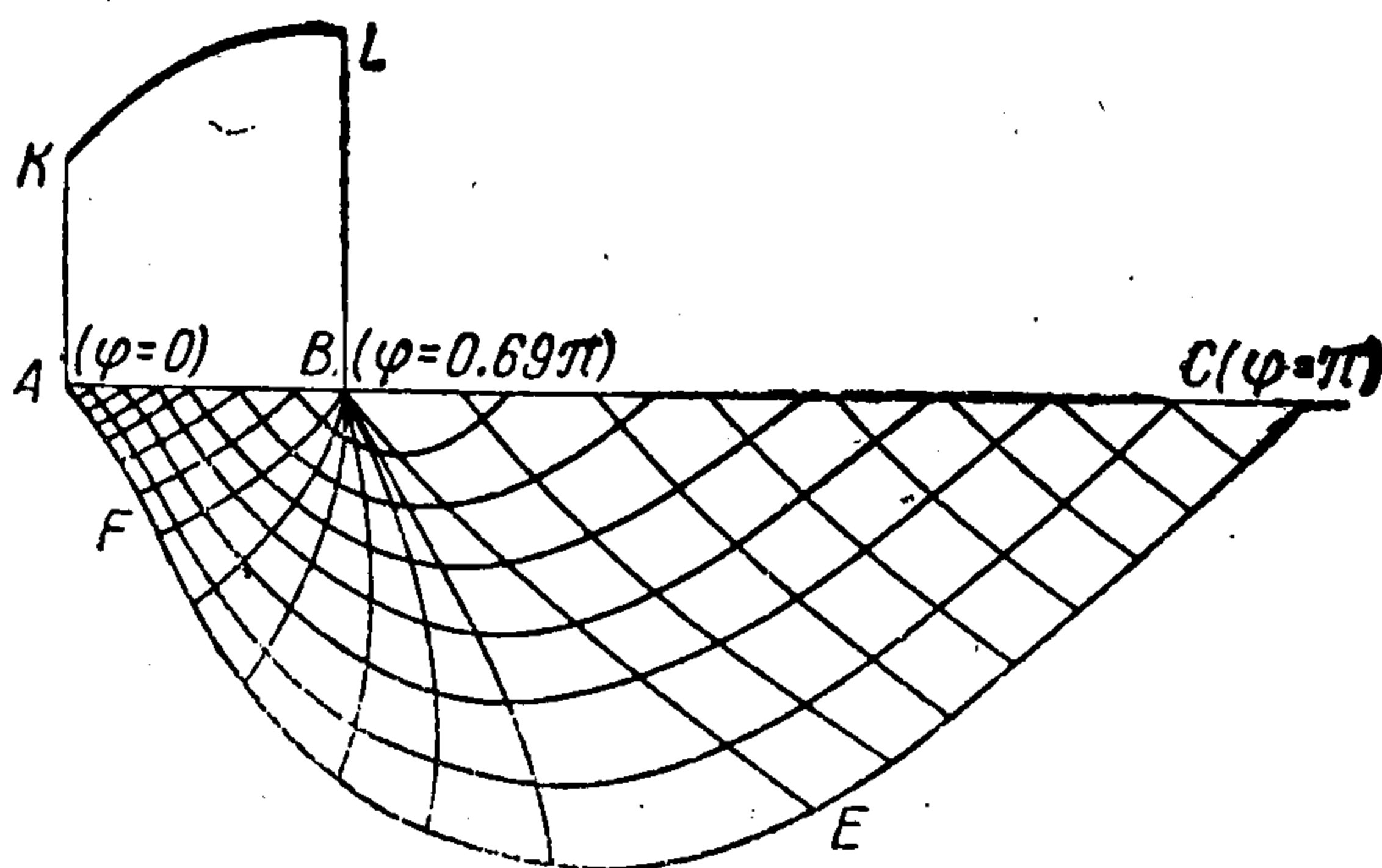
Из (5) и (6) очевидно, что изменение угла φ на постоянную величину не имеет никакого значения, необходимо лишь, чтобы интервал по φ был длиной 2π . Из условий симметрии достаточно рассмотреть интервал $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Решение задачи было проведено на машине Урал 1 ВЦ ВГУ. Результаты сведены в таблицу и представлены на фиг. 2.

На фиг. 2 интервал AC соответствует отрезку по φ , длиной π . Отрезок BC соответствует половине раствора угла свободной поверхности полупространства, AB — половине раствора штампа.

Решение в области BCE может быть определено аналитически [1]. В этом случае

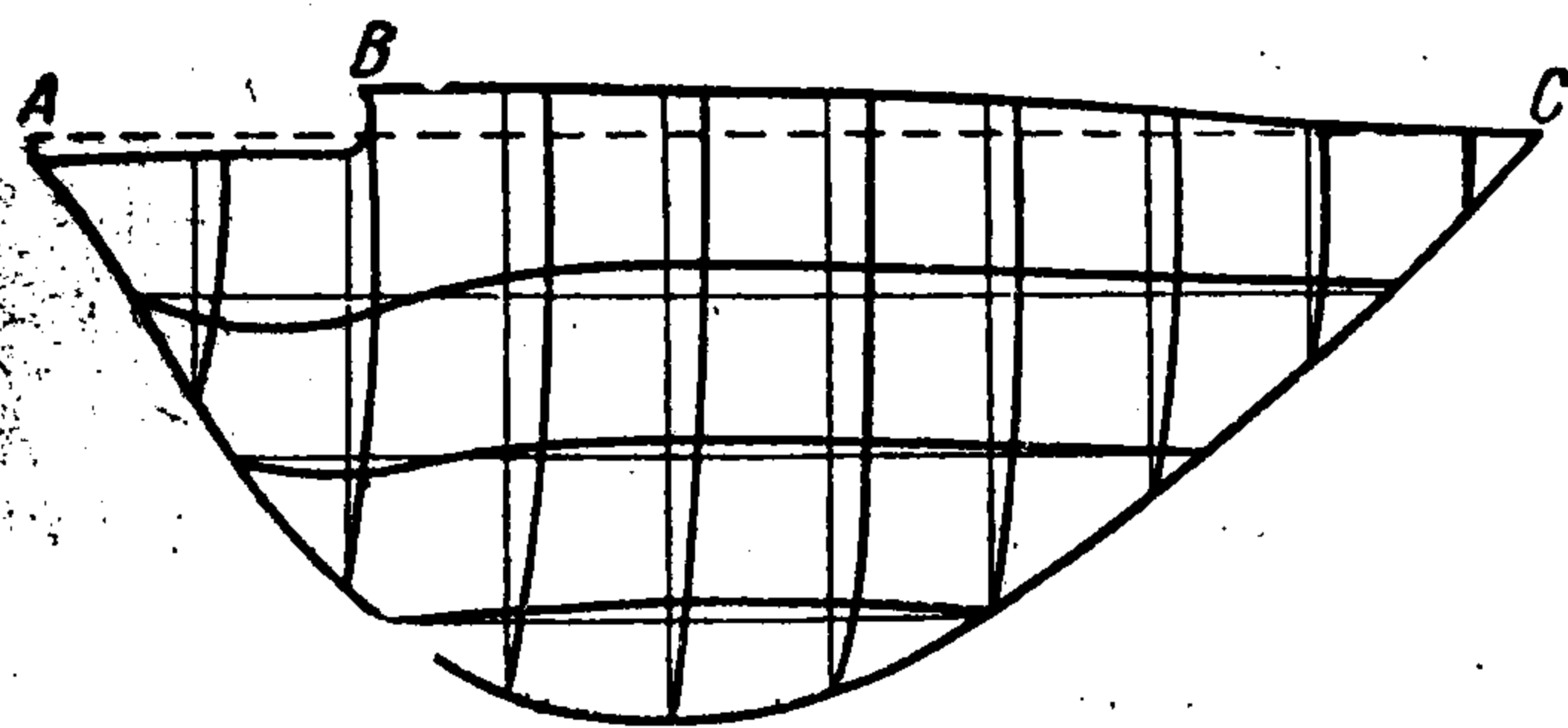
$$p = -\ln \sin \theta - \frac{1}{2} \varphi \pm \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \text{const} \quad (7)$$



Фиг. 2

Интегрирование велось от характеристики BE , определенной согласно (7). В области BEF строилось решение вырожденной задачи Гурса, в области ABF — смешанной задачи.

График KL на фиг. 2 представляет величину предельного давления на контактной поверхности при любом радиусе $\rho = \text{const}$, проведенном из вершины клина. Величина давления понижается от края штампа от значения, определенного по формуле Прандтля $q = -k \times (2 + \pi)$.



Фиг. 3

Максимальный угол раствора штампа, при котором справедливо приведенное решение (угол $\angle BOB_1$ на фиг. 1) приблизительно равен 1.4 или 80° . При большем угле раствора зоны пластического материала BOC и B_1OC_1 на фиг. 1 будут пересекаться между собой.

В приведенной ниже таблице даны значения величины давления q в зависимости от угла φ

$\varphi = 0$	0.02	0.04	0.06	0.07	0.10	0.14	0.20	0.26	0.32	0.39	0.49	0.59	0.69
$q = 2,21$	2.81	3.43	3.83	4.03	4.22	4.40	4.58	4.73	4.87	4.98	5.07	5.12	5.14

Очевидно, что данные, приведенные в таблице, определяют решение и для меньших углов раствора штампа.

Скорости перемещений могут быть вычислены из соотношений вдоль характеристик [1]

$$\cos \theta \cdot d\varphi \left[v \operatorname{tg} \left(\psi \pm \frac{1}{4} \pi \right) - w \right] + dv + dw \operatorname{tg} \left(\psi \pm \frac{1}{4} \pi \right) = 0 \quad (8)$$

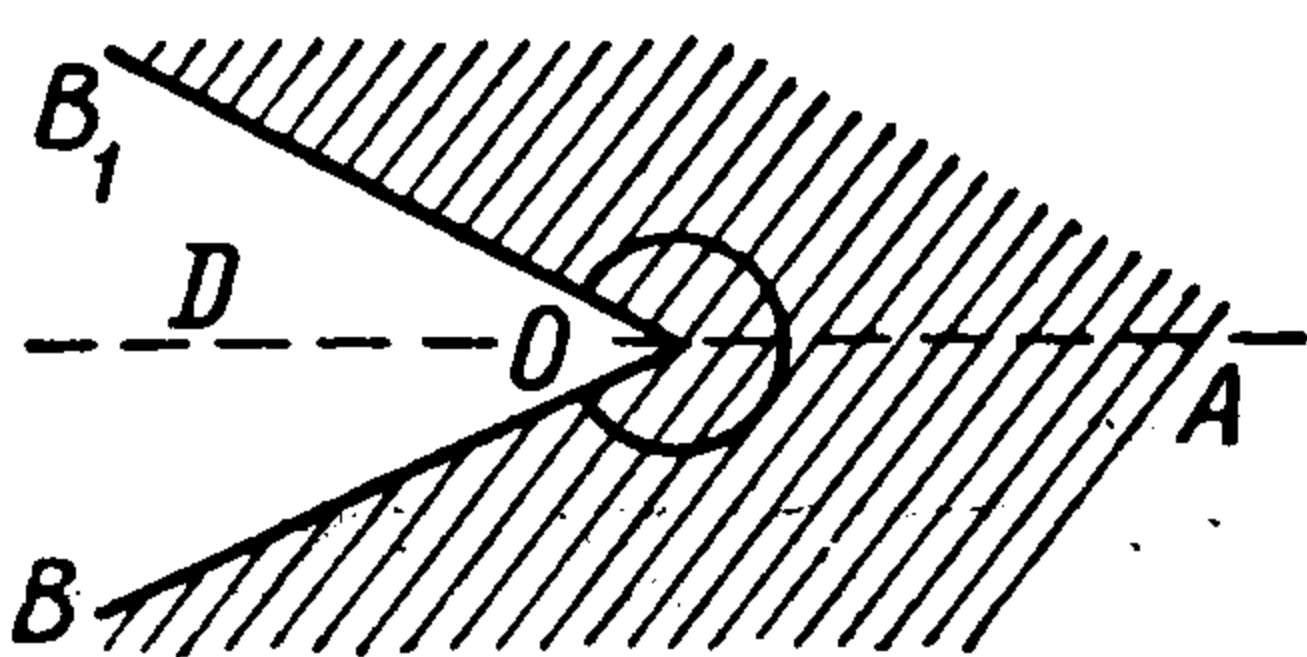
где v и w соответственно скорости перемещения вдоль θ и φ .

Граничные условия для определения скоростей перемещений: на AB (фиг. 2) дано $v = 1$, граница $AFEC$ разделяет области пластического и жесткого состояния

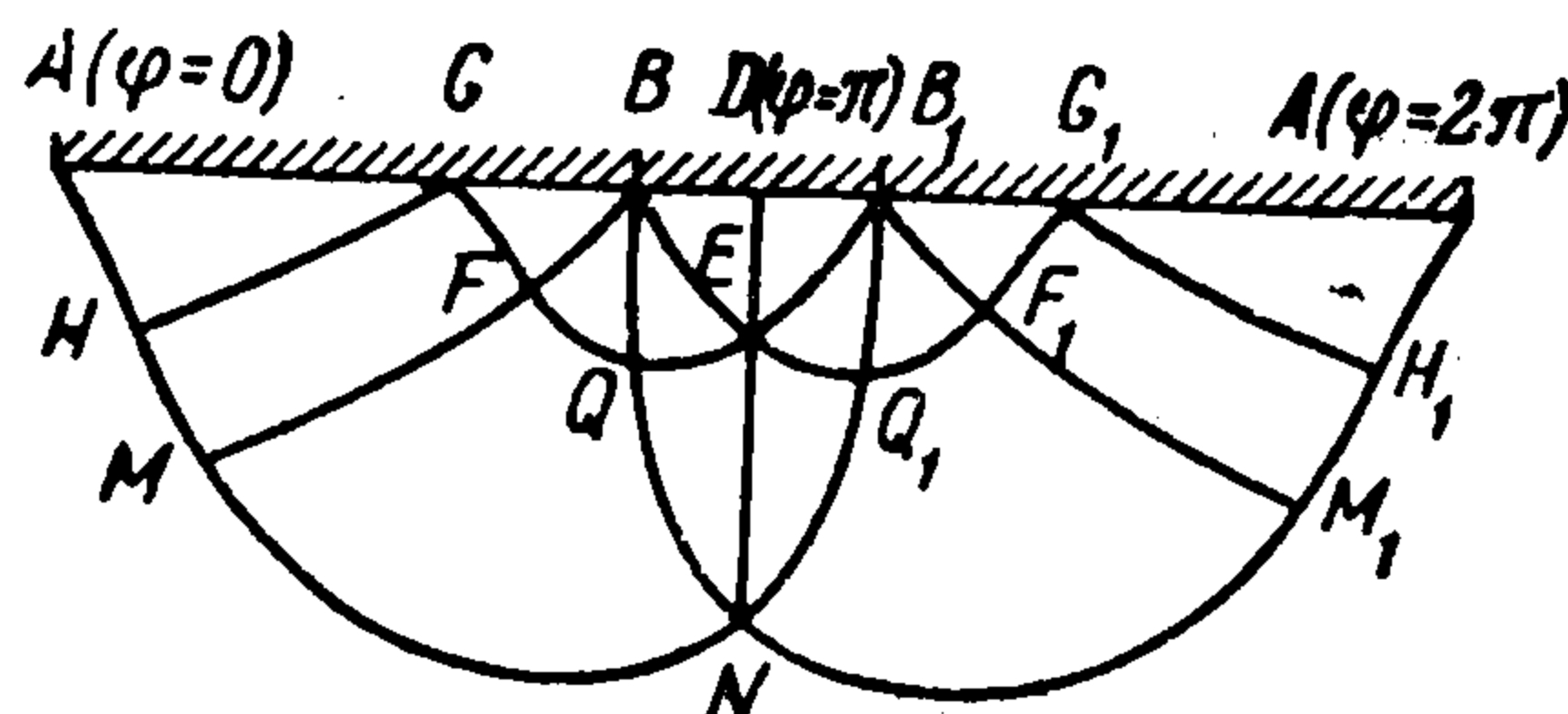
материала, поэтому нормальная скорость к $AFEC$ равна нулю. Эти условия полностью определяют построение поля скоростей в области $AFECBA$.

На фиг. 3 показано искажение координатной сетки и профиль выпучившейся поверхности BC при вдавливании штампа.

В случае, если вдавливаемый штамп имеет угол раствора BOB_1 больший, чем 80° (фиг. 4), то решение может быть проведено следующим образом. Следует рассмотреть прямоугольник $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ (или $0 \leq \theta \leq \pi/2$) и, учитывая симметрию решения, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 5 в плоскости $\theta\varphi$ изображены половины штампа AB и B_1A . Учитывая что решение должно быть симметричным относительно оси DG , можно ограничиться рассмотрением области $AGBDENMHA$. Так как на прямой DN всегда $\tau_{\theta\varphi} = 0$, то на ней $\psi = 0$ (или $\psi = \pi/2$) и, следовательно, величины могут быть определены из (5).

Решение в области $GBDEQFG$ не содержит ничего нового по сравнению с решением предыдущей задачи. В области QEN строится решение смешанной задачи, в области $HFQNMH$ — решение задачи Гурса, в области AGH — смешанной задачи.

Определение поля скоростей производится при следующих граничных условиях: $v = 1$ на AB , скорость, нормальная к линии $AHMN$, равна нулю; $w = 0$ на DN . В области $ABMA$ решается смешанная задача, в MBN — задача Гурса, в $BQND$ — смешанная задача.

Автор признателен В. С. Мищенко за проведенные расчеты.

Поступила 3 XII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. И в л е в Д. Д. О вдавливании жестких штампов в пластическое полупространство. ПММ, 1959, т. XXII, вып. 2.
2. С о к о л о в с к и й В. В. Теория пластичности. Гостехиздат, 1950.

Технический редактор Э. Ф. Бунова

Т-02355 Подписано к печати 2/IV—1963 Тираж 3115 экз. Зак. 1635
Формат бумаги $70 \times 108^{1/16}$ Бум. л. $6^{1/4}$ Печ. л. 17,12 Уч.-изд. л. 17,8

2-я типография Издательства Академии наук СССР, Москва, Шубинский пер., 10