

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ СТЕРЖНЕ

Ю. П. Суворов (Москва)

Решается задача о распространении волн напряжений в полубесконечном упруго-пластическом стержне вследствие внезапного нагрева свободного конца; при этом учитывается зависимость коэффициента температуропроводности от температуры (т. е. рассматривается нелинейное уравнение теплопроводности), что влечет [1,2] конечность скорости распространения тепла в стержне. Учет этого обстоятельства приводит к количественным особенностям упругого решения по сравнению с известными ранее решениями (например, [3]). Предполагается, что материал стержня является несжимаемым и обладает линейным упрочнением; механические характеристики считаются независимыми от температуры.

§ 1. Решение задачи сводится к решению следующей системы уравнений:

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (\text{уравнение движения}) \quad (1.1)$$

$$\sigma = E \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \alpha \vartheta \right) \quad (\text{уравнение состояния}) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) \quad (\text{уравнение теплопроводности}) \quad (1.3)$$

Здесь σ — напряжение, v — перемещение, ρ — плотность, ϑ — температура, α — коэффициент теплового расширения, λ — коэффициент температуропроводности. Предположим степенную зависимость λ от ϑ в следующем виде

$$\lambda = \lambda_0 \frac{n \alpha^{n-1}}{e_s^{n-1}} \vartheta^{n-1} \quad (n > 1) \quad \left(e_s = \frac{\sigma_s}{E} \right)$$

где σ_s — предел упругости. Тогда уравнение (1.3) переписется так:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \lambda_0 \frac{\alpha^{n-1}}{e_s^{n-1}} \frac{\partial^2 \vartheta^n}{\partial x^2}$$

В безразмерных величинах

$$y = \frac{\sqrt{E}}{\lambda_0 \sqrt{\rho}} x, \quad \tau = \frac{E}{\lambda_0 \rho} t, \quad T = \frac{\alpha \vartheta}{e_s}, \quad u = \frac{\sqrt{E}}{\lambda_0 \sqrt{\rho e_s}} v, \quad s = \frac{\sigma}{\sigma_s} \quad (1.4)$$

исходная система уравнений примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial s}{\partial y}, \quad s = \frac{\partial u}{\partial y} - T, \quad \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T^n}{\partial y^2} \quad (1.5)$$

Начальные и граничные условия будут

$$u(y, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(y, 0) = 0, \quad s(0, \tau) = 0 \quad (1.6)$$

$$T(y, 0) = 0, \quad T(0, \tau) = T_0 \quad (1.7)$$

Положим в (1.5) для определенности $n = 2$. Полученное уравнение решаем методом Кармана — Польгаузена; решение ищем в виде

$$T = a_0 + a_1 \frac{y}{l(\tau)} + a_2 \left[\frac{y}{l(\tau)} \right]^2 + \dots \quad (1.8)$$

причем $T \equiv 0$ при $y < l(\tau)$, $l(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$. Для упрощения последующих выкладок ограничимся двумя первыми членами в разложении (1.8). Можно непосредственно проверить, что учет большего числа членов не меняет качественной картины решения для напряжений. Учитывая условия (1.7), получаем

$$T = \begin{cases} T_0 [1 - y/l(\tau)], & y \leq l(\tau) \\ 0, & y \geq l(\tau) \end{cases} \quad (1.9)$$

Удовлетворяя последнему из уравнений (1.5) в среднем по y , имеем для $l(\tau)$ уравнение

$$\int_0^{l(\tau)} \frac{\partial T}{\partial \tau} dy = \int_0^{l(\tau)} \frac{\partial^2 T^2}{\partial y^2} dy$$

Подставляя сюда вместо T выражение (1.9) и производя интегрирование, получим

$$\frac{1}{2} \frac{dl}{d\tau} = \frac{2T_0}{l(\tau)}, \quad l(0) = 0 \quad (1.10)$$

Отсюда

$$l(\tau) = \beta \sqrt{\tau} \quad (\beta = 2 \sqrt{2T_0})$$

§ 2. Из (1.5) получаем уравнение движения в перемещениях

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Q(y, \tau), \quad Q = \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.1)$$

Решение его в области, ограниченной осью Oy и биссектрисой $\tau = y$ (фиг. 1), при начальных условиях (1.8) дается формулой Даламбера

$$\begin{aligned} u(B) &= -\frac{1}{2} \iint_{\Delta ABC} Q(\xi, \eta) d\xi d\eta = -\frac{1}{2} \int_0^\tau d\eta \int_{y+\eta-\tau}^{y-\eta+\tau} Q d\xi = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\tau [T(y-\eta+\tau, \eta) - T(y+\eta-\tau, \eta)] d\eta \end{aligned} \quad (2.2)$$

Учитывая (1.9), получаем решение в следующем виде.

В области $yOGN$

$$u = 0$$

В области $OGHO$

$$\begin{aligned} u &= \frac{4T_0}{3\beta} \tau \sqrt{\tau} + T_0 y - \frac{T_0 \beta}{2} (\sqrt{1/4\beta^2 + y + \tau} - \sqrt{1/4\beta^2 - y + \tau}) - \\ &- \frac{T_0}{\beta} (\tau - y) A^{1/2}(\tau - y) - \frac{T_0}{\beta} (\tau + y) A^{1/2}(\tau + y) + \frac{T_0}{3\beta} [A^{3/2}(\tau - y) + A^{3/2}(\tau + y)] \end{aligned}$$

В области $MHGN$

$$\begin{aligned} u &= T_0 \beta \sqrt{1/4\beta^2 - y + \tau} - \frac{T_0}{\beta} (\tau - y) [A^{1/2}(\tau - y) - B^{1/2}(\tau - y)] + \\ &+ \frac{T_0}{3\beta} [A^{3/2}(\tau - y) - B^{3/2}(\tau - y)] \end{aligned}$$

Здесь

$$A(x) = 1/2\beta^2 + x - \beta \sqrt{1/4\beta^2 + x}, \quad B(x) = 1/2\beta^2 + x + \beta \sqrt{1/4\beta^2 + x} \quad (2.3)$$

Для напряжений по формуле (1.6) получим следующие результаты

В области $yOGN$

$$s = 0$$

В области $OGHO$

$$s = \frac{T_0}{\beta} [A^{1/2}(\tau - y) - A^{1/2}(\tau + y)] - T_0 \left(1 - \frac{y}{\beta \sqrt{\tau}}\right) \quad (2.4)$$

В области $MHGN$

$$s = \frac{T_0}{\beta} [A^{1/2}(\tau - y) - B^{1/2}(\tau - y)] \quad (2.5)$$

На биссектрисе $\tau = y$ будем иметь

$$s = -T_0 + \frac{T_0}{\beta} \sqrt{y} - \frac{T_0}{\beta} A^{1/2}(2y) \quad (y \leq \beta^2), \quad s = -T_0 \quad (y \geq \beta^2) \quad (2.6)$$

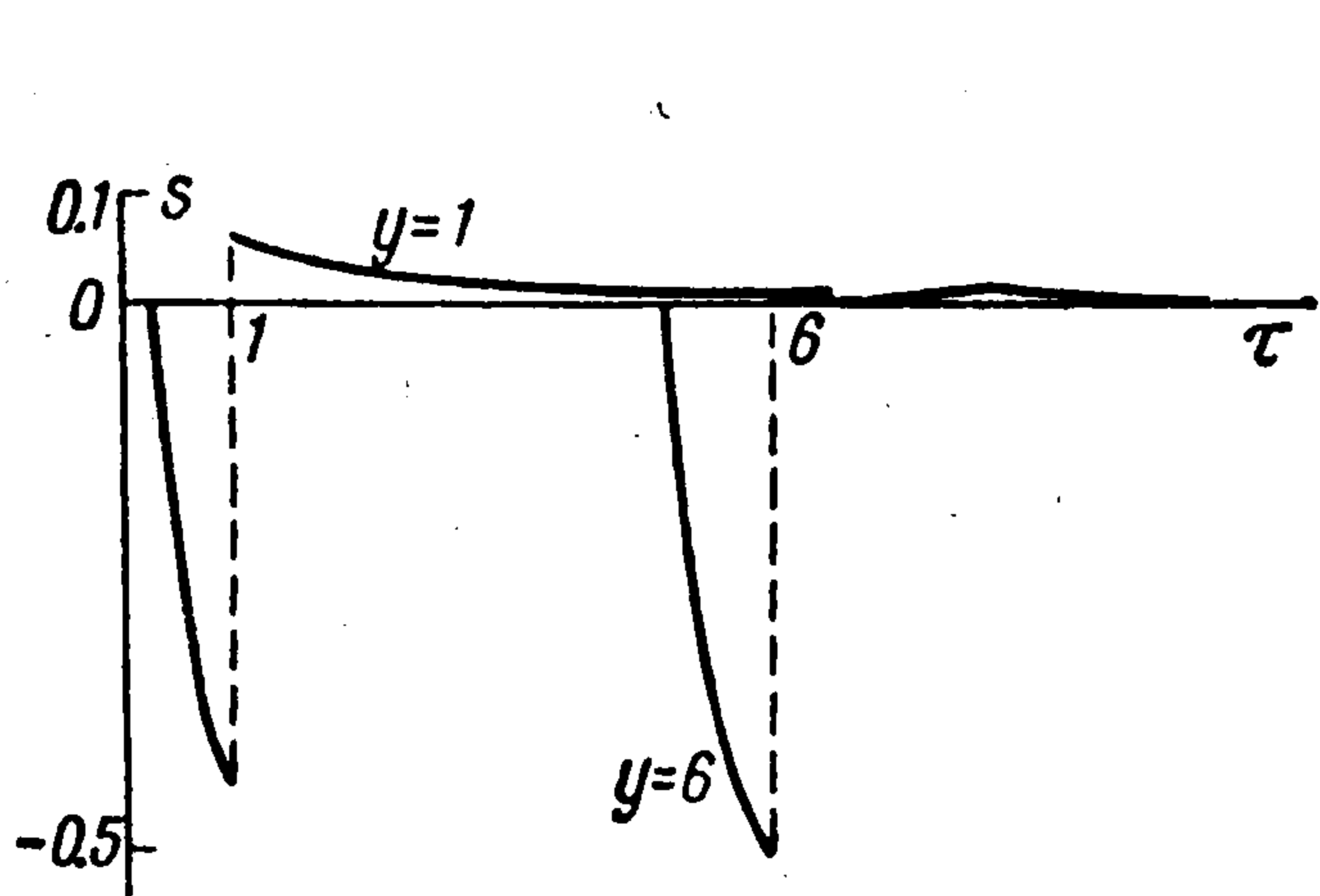
Отсюда видно, что в области $MHGN$ прямые, параллельные главной биссектрисе, являются линиями постоянных перемещений, скоростей и напряжений.

В упругой области (при $\tau \leq y$) справедливо прежнее решение (2.4), (2.5). Из этих формул и условия $s = -1$ находим уравнение упруго-пластической границы

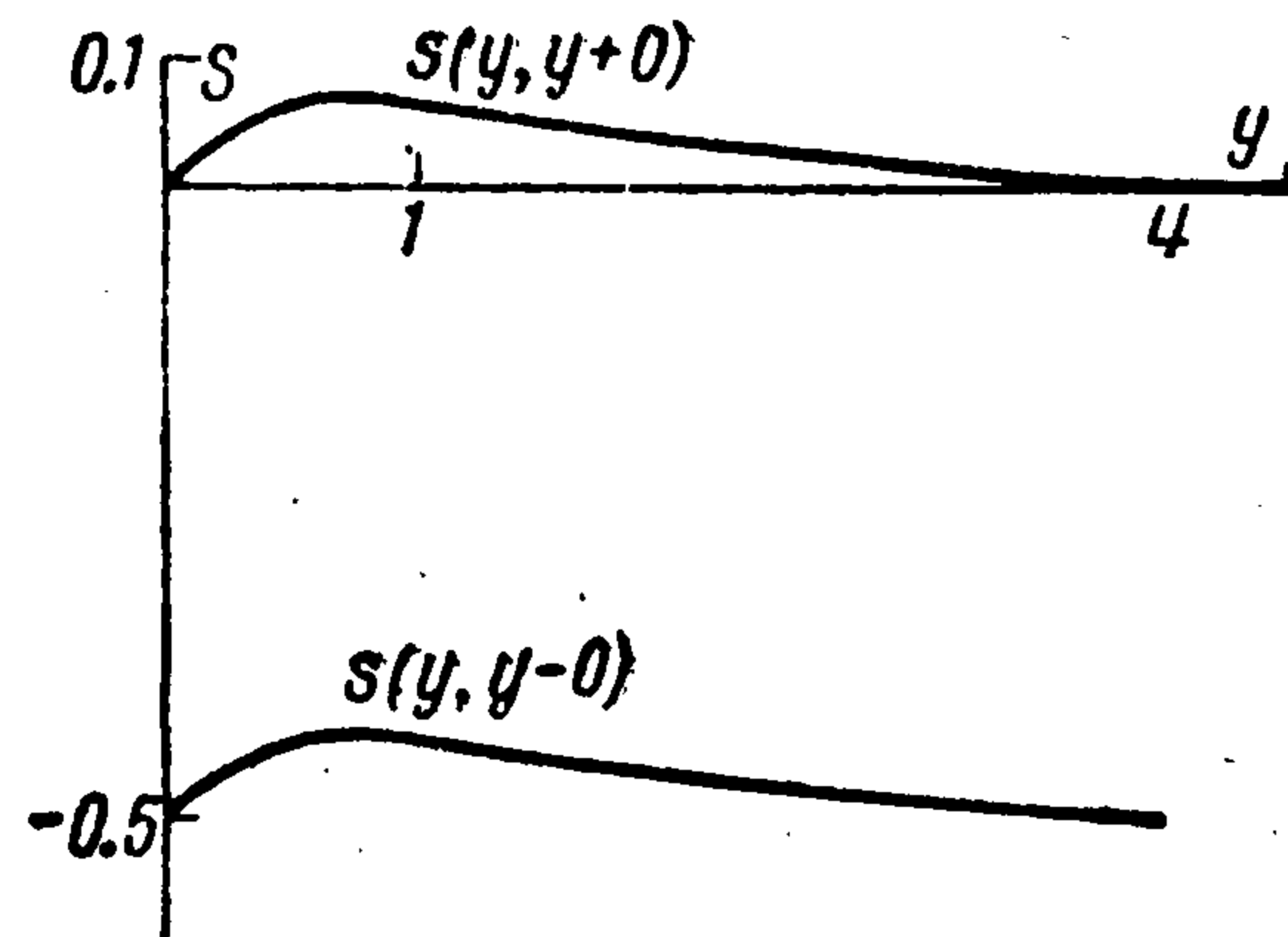
$$A^{1/2}(\tau + y) - A^{1/2}(\tau - y) = \frac{y}{\sqrt{\tau}} + \beta \frac{1 - T_0}{T_0} \quad (y \leq \beta \sqrt{\tau})$$

$$y = \tau + \frac{\beta^2 T_0^2 - 1}{4 T_0^2} \quad (y \geq \beta \sqrt{\tau}) \quad (3.1)$$

Найдем значение $T_0 = T_0^*$, при котором точки A и B сливаются, т. е. начиная с которого все сечения стержня с течением времени становятся пластическими. Оче-



Фиг. 2



Фиг. 3

видно, это произойдет (фиг. 3) при условии $\max s(y, y-0) = -1$. Приравнявая нулю производную ds/dy , получим

$$\sqrt{y}(2\sqrt{1/4\beta^2 + 2y} - \beta) - \sqrt{1/4\beta^2 + 2y}A^{1/2}(2y) = 0, \quad \text{или} \quad (4y - 1/2\beta^2)^2 = 0$$

Отсюда

$$y = \frac{1}{8}\beta^2, \quad T_0^* = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6 - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 1}} \approx \frac{17}{6} \quad (3.2)$$

В пластической области при наличии линейного упрочнения материала имеем при нагружении (фиг. 5)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e \equiv e^0 + T, \quad s = q^2 e^0 + q^2 - 1, \quad q^2 = \frac{E_1}{E} \quad (3.3)$$

где E_1 — модуль упрочнения, откуда

$$s = q^2 \frac{\partial u}{\partial y} - q^2 T + q^2 - 1 \quad (3.4)$$

Из (1.5) и (3.4) получаем уравнение движения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = q^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (3.5)$$

Это уравнение решается численно методом характеристик. Вдоль характеристик $dy = \pm q d\tau$ имеем соответственно

$$du_\tau = \pm q du_y - q^2 \frac{T_0}{\beta \sqrt{\tau}} d\tau$$

Интегрируя эти соотношения, получаем

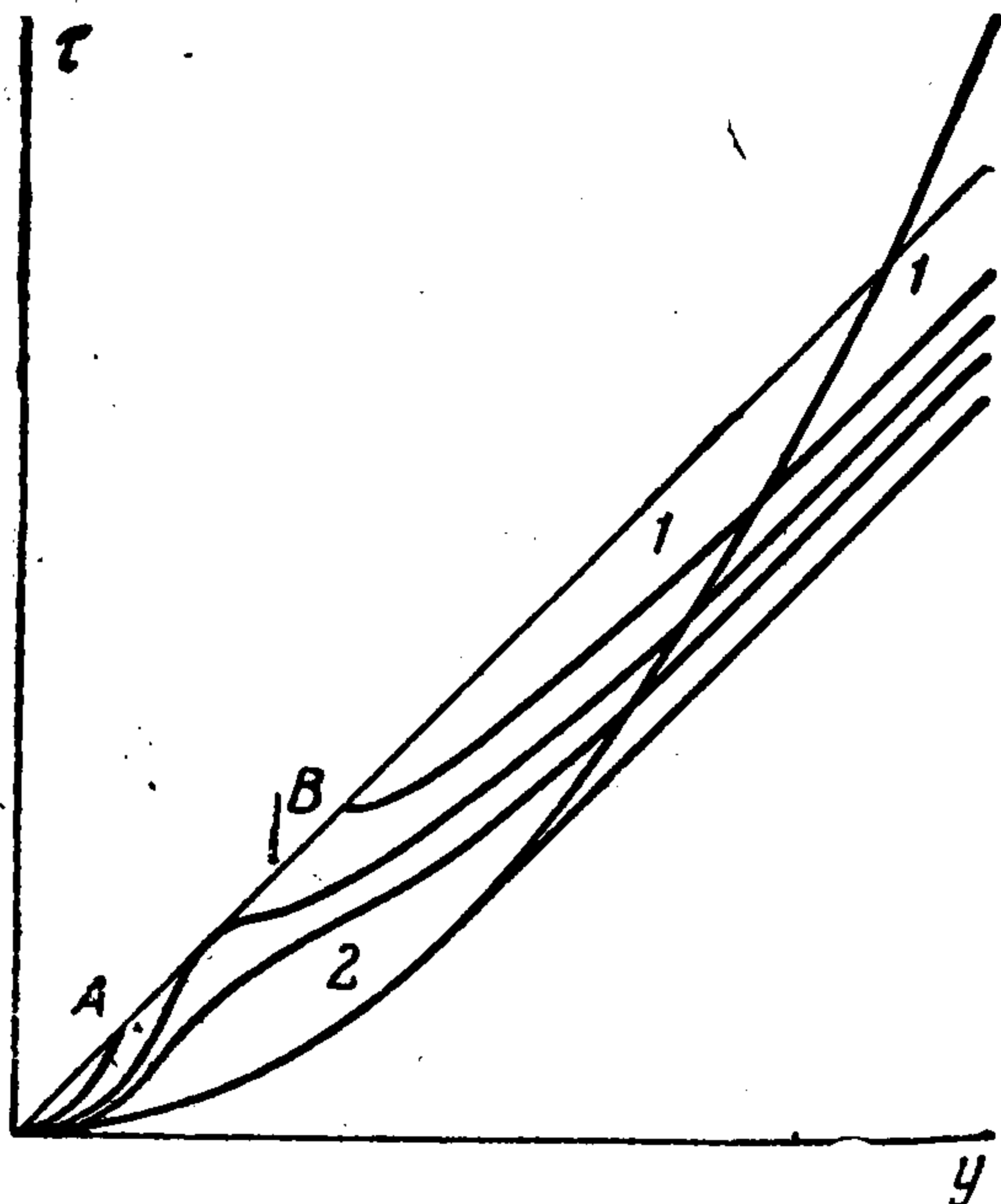
$$u_\tau = \pm q u_y - \frac{2q^2 T_0}{\beta} \sqrt{\tau} + C_{1,2} \quad \text{при } T \neq 0$$

$$u_\tau = \pm q u_y - D_{1,2} + C_{1,2} \quad \text{при } T = 0 \quad (3.6)$$

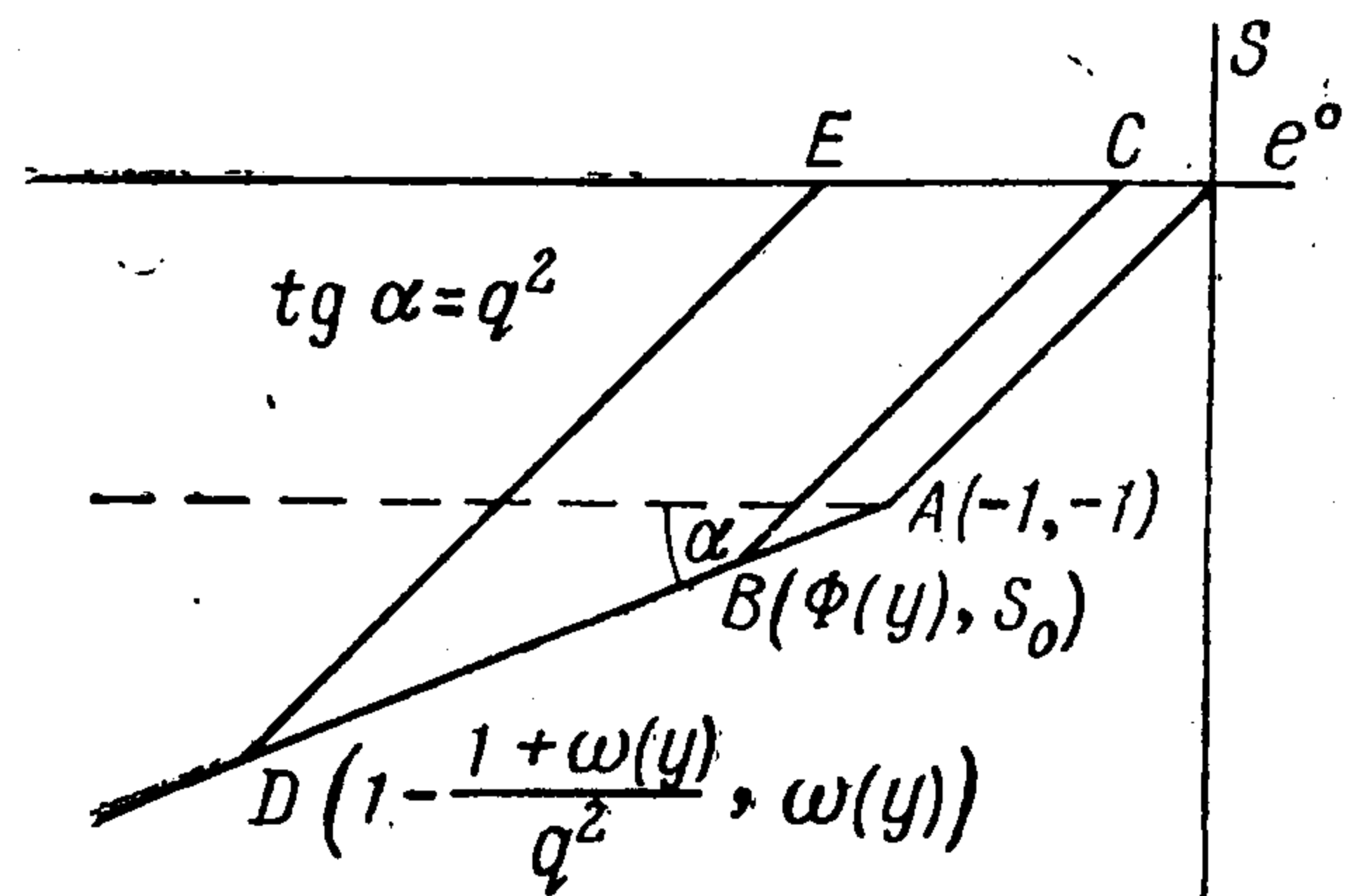
и далее легко найти напряжение. В последней формуле константы $D_{1,2}$ находятся из условий непрерывности скорости и напряжения вдоль характеристик, т. е. выбираются равными значению функции $2q^2 T_0 / \beta \cdot \sqrt{\tau}$ в точке пересечения соответствующей характеристики с параболой $y = \beta \sqrt{\tau}$; постоянные $C_{1,2}$ определяются из значений u_y и u_τ на упруго-пластической границе.

Построенное решение в пластических областях будет однозначным лишь для тех значений q , при которых характеристики $dy = \pm q d\tau$ пересекают упруго-пластическую границу только в одной точке. Это ограничение — следствие предположения о линейности упрочнения. Вычисления показывают, что при $T_0 \geq 2.5$ решение справедливо при любых значениях $0 \leq q < 1$.

Если известно решение в пластической области, то решение за фронтом ударной волны строится следующим образом.



Фиг. 4



Фиг. 5

Так как из упругого решения известно, что $[s] > 0$, то, следовательно, при переходе через фронт ударной волны происходит мгновенная разгрузка вдоль прямой BC (фиг. 5). Введем функции

$$\Phi(y) \equiv u_y(y, y=0) - T(y, y) \equiv e^0(y, y=0)$$

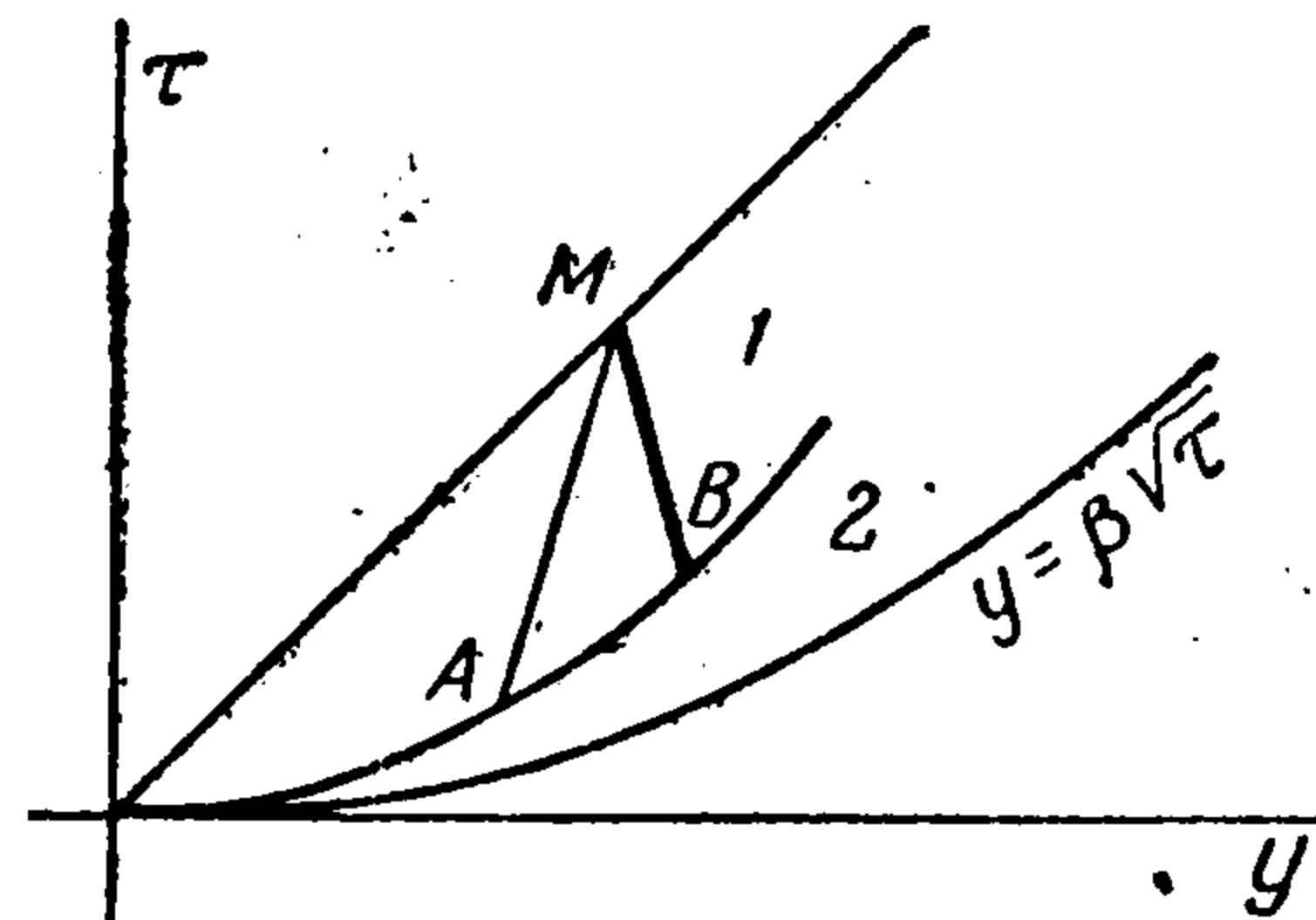
$$\Psi(y) = u_\tau(y, y=0)$$

По формуле (3.3) находим (фиг. 5)

$$s_0 = q^2 \Phi(y) + q^2 - 1$$

и уравнение прямой разгрузки BC будет

$$s = e^0 - (1 - q^2) [\Phi(y) + 1]$$



Фиг. 6

Следовательно, уравнение состояния в области за ударной волной можно записать следующим образом:

$$s = u_y - T + \alpha(y), \quad \alpha(y) = \begin{cases} (q^2 - 1) [\Phi(y) + 1] & (\Phi(y) \leq -1) \\ 0 & (\Phi(y) \geq -1) \end{cases} \quad (3.7)$$

причем при $T_0 > T_0^*$ для любых y

$$\alpha(y) = (q^2 - 1) [\Phi(y) + 1]$$

Таким образом, в области $\tau \geq y$ опять получаем задачу Коши:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + Q_2(y, \tau), \quad Q_2 = T_y - \alpha'(y)$$

$$u(0, \tau) = \varphi(\tau), \quad u_y(0, \tau) = T_0 - \alpha(0) \quad (3.8)$$

где $\varphi(\tau)$ — пока неизвестная функция.

Определим $\alpha_0 \equiv \alpha(0)$. Вдоль упруго-пластической границы (3.1) имеем

$$s = -1, \quad T = T_0 \left[1 - \frac{1}{\beta} A^{1/2} (\tau + y) + \frac{1}{\beta} A^{1/2} (\tau - y) + \frac{1 - T_0}{T_0} \right]$$

При $y, \tau \rightarrow 0$ вдоль (3.1)

$$A \rightarrow 0, \quad T \rightarrow T_0 \left(1 + \frac{1 - T_0}{T_0} \right) = 1$$

Следовательно, $u_y = s + T$ стремится к $u_0 = 0$.

На переднем фронте ударной волны около начала координат (фиг. 6) по формулам (3.6) имеем:

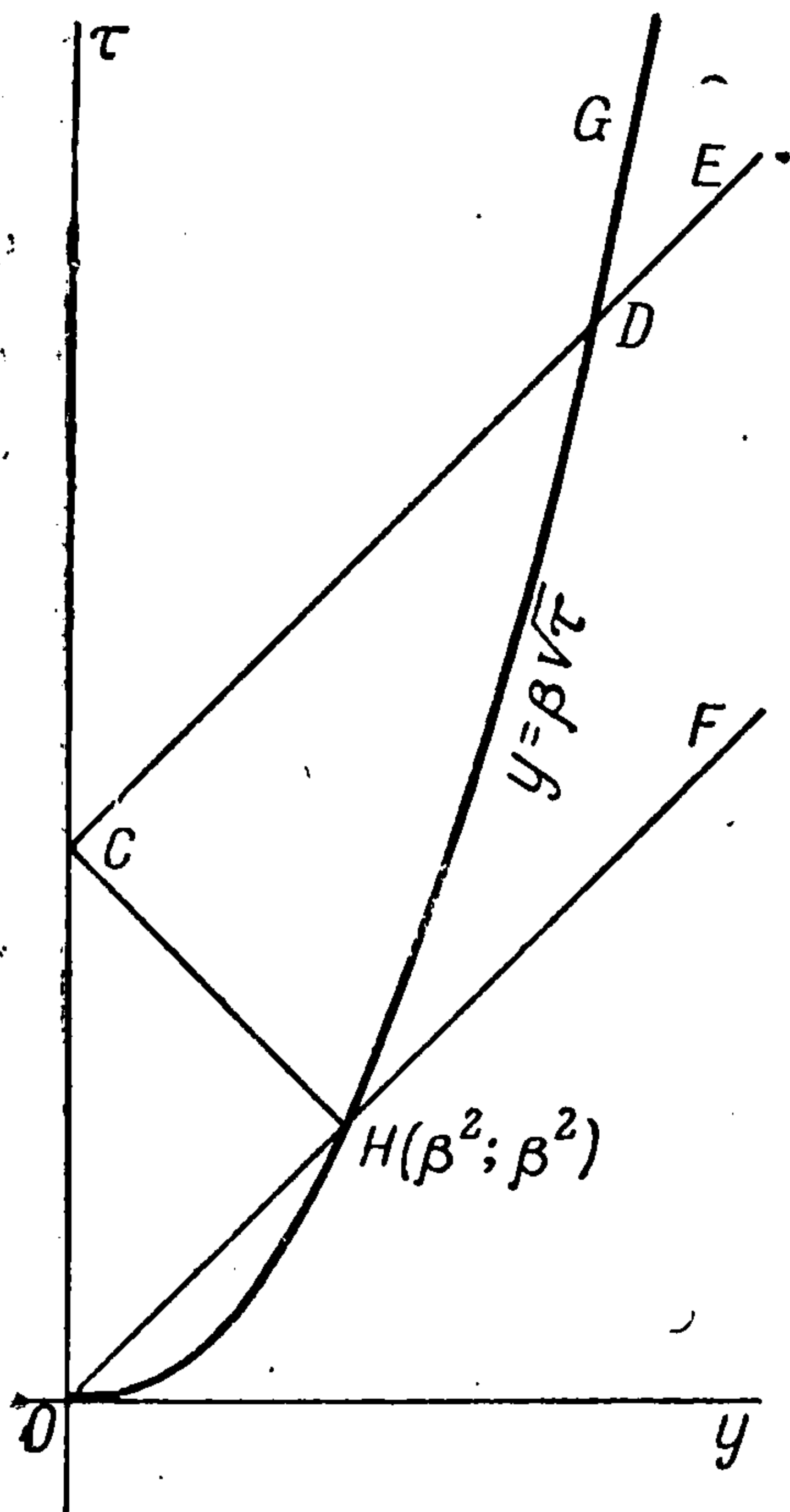
$$u_y(M) = \frac{u_y(A) + u_y(B)}{2} + \frac{u_\tau(A) - u_\tau(B)}{2q} + \frac{f(A) - f(B)}{2q}, \quad f(\gamma) = \frac{2q^2 T_0}{\beta} \sqrt{\gamma}$$

При $M \rightarrow 0$ имеем $u_y \rightarrow \frac{1}{2}(u_0 + u_0) = 0$, и, следовательно, $\Phi(0) = -T_0$. Аналогично можно показать, что $\Psi(0) = 0$. Таким образом,

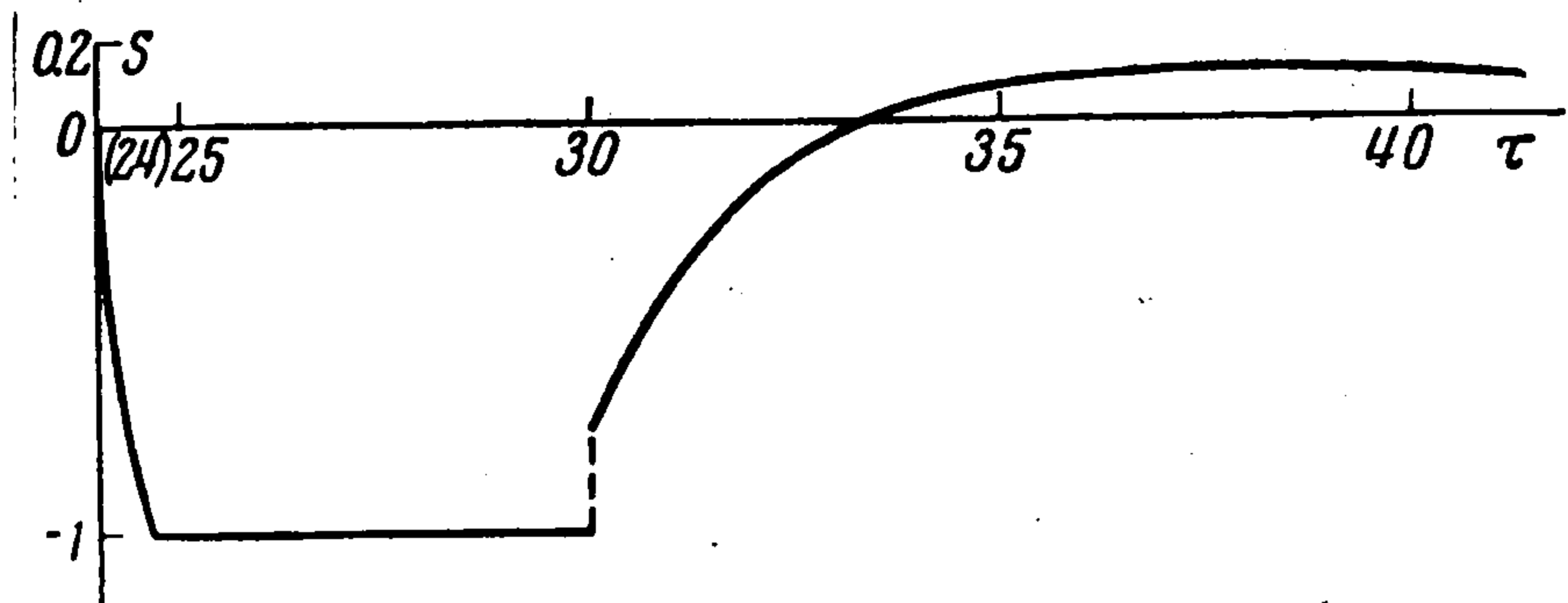
$$\alpha_0 = (1 - q^2)(T_0 - 1) \quad (3.9)$$

Решение (3.8) имеет вид

$$u(y, \tau) = \frac{1}{2} \Phi(\tau + y) + \frac{1}{2} \Phi(\tau - y) + \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\tau+y} T(y + \tau - \eta, \eta) d\eta + \frac{1}{2} \int_{\tau-y}^{\tau} T(y - \tau + \eta, \eta) d\eta - \int_0^y \alpha(y) dy \quad (3.10)$$



Фиг. 7



Фиг. 8

Из условия непрерывности u при $\tau = y$ находим

$$\Phi(\gamma) = -\Phi(0) + 2 \int_0^{\frac{1}{2}\gamma} \alpha(y) dy - \int_0^{\frac{1}{2}\gamma} T(y, y) dy - \int_{\frac{1}{2}\gamma}^{\gamma} T(\gamma - y, y) dy + 2U(\frac{1}{2}\gamma) \quad (3.11)$$

где $U(y) = u(y, y - 0)$. Из (1.9), (2.6), (3.10), (3.11) и учитывая, что $dU/dy = u_y(y, y - 0) + u_\tau(y, y - 0) = \Phi(y) + \Psi(y) + T(y, y)$

находим напряжения (фиг. 7) в соответствующих областях

$$s = F(y, \tau) - \frac{T_0}{\beta \sqrt{2}} (\sqrt{\tau + y} - \sqrt{\tau - y}) - T(y, \tau) \quad (OHCO) \quad (3.12)$$

$$s = F(y, \tau) + \frac{T_0}{\beta \sqrt{2}} \sqrt{\tau - y} - \frac{T_0}{\beta} A^{1/2}(\tau + y) - T(y, \tau) \quad (CHDC) \quad (3.13)$$

$$s = F(y, \tau) + \frac{T_0}{\beta \sqrt{2}} \sqrt{\tau - y} - \frac{T_0}{\beta} B^{1/2}(\tau - y) \quad (EDHF) \quad (3.14)$$

$$s = F(y, \tau) - \frac{T_0}{\beta} [A^{1/2}(\tau + y) - A^{1/2}(\tau - y)] - T(y, \tau) \quad (\tau CDG) \quad (3.15)$$

$$s = F(y, \tau) - \frac{T_0}{\beta} [B^{1/2}(\tau - y) - A^{1/2}(\tau - y)] \quad (GDE) \quad (3.16)$$

Здесь

$$F(y, \tau) = \frac{1}{2} \alpha\left(\frac{\tau + y}{2}\right) - \frac{1}{2} \alpha\left(\frac{\tau - y}{2}\right) + \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{\tau + y}{2}\right) - \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{\tau - y}{2}\right) + \frac{1}{2} \Psi\left(\frac{\tau + y}{2}\right) - \frac{1}{2} \Psi\left(\frac{\tau - y}{2}\right) + \frac{1}{2} T\left(\frac{\tau + y}{2}, \frac{\tau + y}{2}\right) - \frac{1}{2} T\left(\frac{\tau - y}{2}, \frac{\tau - y}{2}\right) + T_0 \quad (3.17)$$

Из (3.4), (3.12) и (3.14) находим

$$[s] = \frac{1}{2} \alpha(y) + \left(\frac{1}{2} - q^2\right) \Phi(y) + \frac{1}{2} \Psi(y) + \frac{1}{2} T(y, y) - \frac{1}{2} \alpha_0 + 1 - q^2$$

В той части пластической области, в которой характеристики $dy = \pm q d\tau$ не захватывают область $T > 0$, из (3.6) имеем: $u_y \equiv -1$, $u_\tau \equiv 1$. Следовательно, при достаточно больших y

$$\alpha(y) = (q^2 - 1) [\Phi(y) + 1] = (q^2 - 1) (u_y - T + 1) = 0$$

$$[s] = 1 - \frac{1}{2} (1 - q^2) (T_0 - 1)$$

При $T_0 > (3 - q^2) / (1 - q^2)$ скачок напряжений на ударной волне становится отрицательным, и полученное решение за фронтом ударной волны уже несправедливо, так как уравнение состояния (3.7) в этом случае верно не для всех значений y . Решение для $T_0 > (3 - q^2) / (1 - q^2)$ можно построить следующим образом.

Прежде всего отметим, что в этом случае напряжение превосходит предел упругости и за фронтом ударной волны. Считая искомое решение единственным, предположим, что пластическим

остается только задний фронт волны $\tau = y + 0$, а за ним сразу же наступает разгрузка. Введем функцию $\omega(y) = s(y, y + 0)$. Тогда уравнение прямой разгрузки DE (фиг. 5) будет

$$s = e^* + \omega(y) - \frac{\omega(y)}{q^2} + 1 - \frac{1}{q^2}$$

и уравнение состояния можно записать в виде:

$$s = u_y - T + \Omega(y), \quad \Omega(y) = \begin{cases} \alpha(y) & [s] \geq 0 \\ (q^2 - 1) / q^2 [\omega(y) + 1], & [s] \leq 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

При этом для достаточно малых y и τ всегда $\Omega(y) = \alpha(y)$, так как $\lim s(y, y+0) = 0$, $\lim s(y, y-0) = -T_0$ при $y \rightarrow 0$ и $[s]_{y=0} = T_0$. Следовательно, $\Omega(0) = \alpha_0$.

При $\tau \geq y$ теперь будет справедливо решение (3.12) — (3.17), в котором вместо $\alpha(y)$ нужно подставить $\Omega(y)$. Функция $\omega(y)$ находится из условия $s(y, y+0) = \omega(y)$

$$\omega(y) = \frac{q^2}{1+q^2} [\Phi(y) + \Psi(y) + T(y, y)] - \frac{\alpha_0 q^2 - q^2 + 1}{1+q^2} \quad (3.19)$$

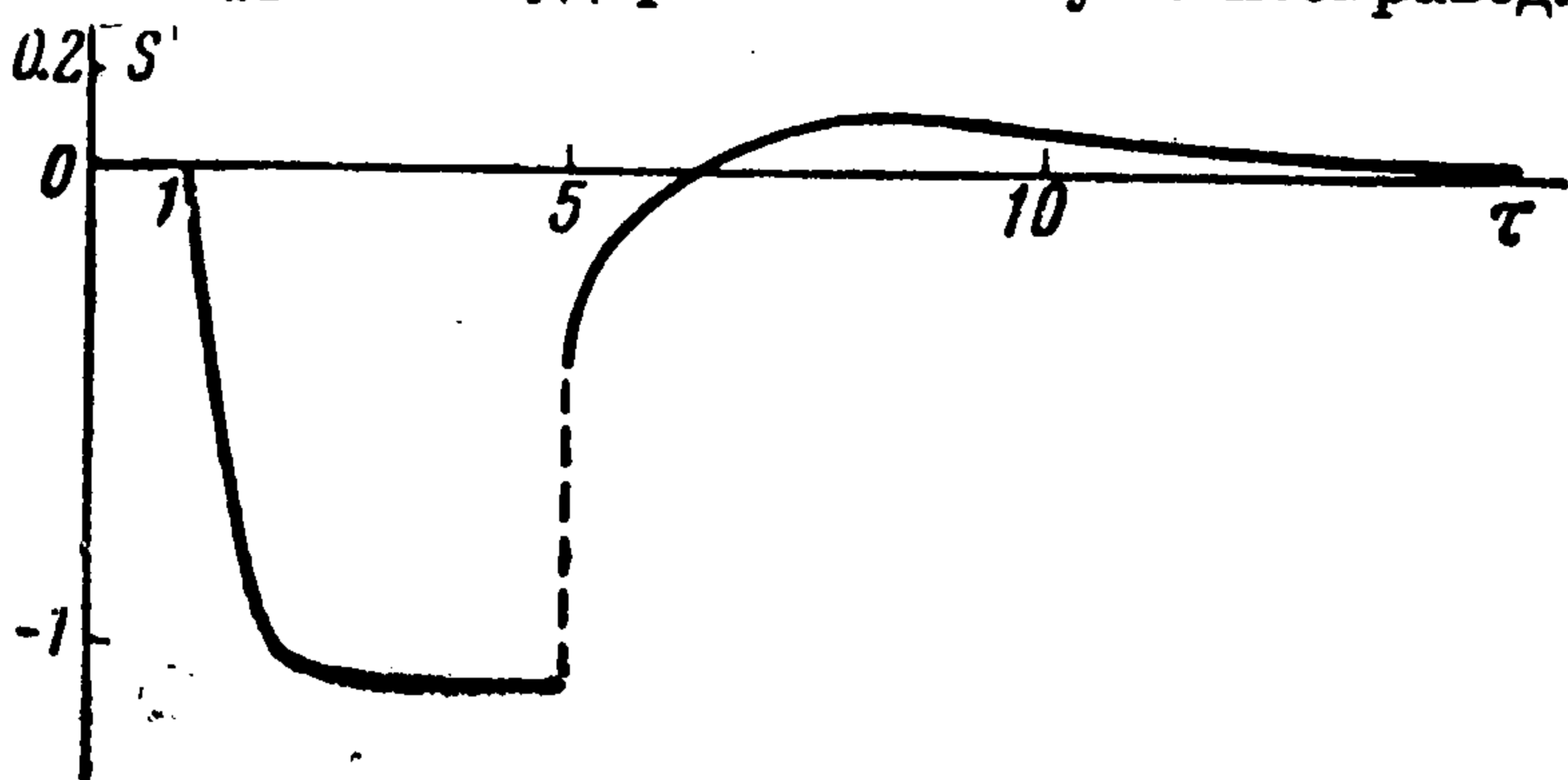
Легко проверить, что в области отрицательного скачка напряжений $s_\tau(y, y+0) = \infty$, т. е. выполняется предположение о том, что после прохождения ударной волны сразу же наступает разгрузка.

На фиг. 8 и 9 представлены полученные в результате численного расчета графики (s, τ) в сечениях стержня $y = 5$ и $y = 30$ при $T_0 = 3$, $q = 1/2$.

Поступила 17 IX 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. З е л ь д о в и ч Я. Б., К о м п а н е й ц А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. М., Сборник, посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе, 1950.
2. Б а р е н б л а т т Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. ПММ, 1952, т. 16, вып. 1.
3. Д а н и л о в с к а я В. И. Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы. ПММ, 1950, т. 14, вып. 3.



Фиг. 9