ПЕРЕХОДНАЯ ТЕОРИЯ ИЗГИБА ПОЛОСЫ

Б. Р. Сэт (Карагапур, Индия)

1. Введение. В обычной теории изгиба полосы делаются следующие допущения [1].

(1) Полоса достаточно широка, чтобы изгибаться в состоянии плоской деформации при отсутствии упрочнения.

(2) Она деформируется так, что ее толщина всюду одинакова, а плоские грани превращаются в круговые цилиндры.

(3) Она имеет нейтральную поверхность $r = d$, причем внешние волокна $(r > d)$ растянуты, а внутренние $(r < d)$ сжаты.

(4) Имеет место условие текучести

$$\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta} = 2k \quad (a < r < d), \qquad \tau_{\theta\theta} - \tau_{rr} = 2k \quad (d < r < b)$$

где a, b — радиусы цилиндрических границ в деформированном состоянии.

Если использовать переходную теорию пластических деформаций [1], то можно показать, что не обязательно принимать условие (4) и что две области текучести — при растяжении и при сжатии — получаются прямо из уравнений. Найдено также, что хотя в упругом состоянии полоса может принимать различные изогнутые формы, единственно возможной формой изгибания в пластическом состоянии является круговая, если только предположить, что ортогональный характер поверхностей до деформации сохраняется и после деформации.

Когда момент G (на единицу ширины), приложенный к кромкам, возрастает, упругая деформация принимает нелинейный характер. При дальнейшем возрастании G в пластине начинается текучесть. Классическая модель упруго-пластического тела прибегает к условию пластичности, чтобы согласовать два состояния. Она не принимает во внимание нелинейную область, через которую совершается переход. Теория конечных упругих деформаций приводит к нелинейным дифференциальным уравнениям, асимптотическое решение которых в точке ветвления представляет переход к пластическому состоянию. Этот переход, вызванный изменением соотношений между напряжениями и деформациями, может иметь место как при растяжении, так и при сжатии. Значит, мы получим две точки ветвления. Теперь достаточно положить пуассоново отношение σ равным 0.5 и заменить тензор деформации на тензор скоростей деформации, чтобы получить состояние полной пластичности из результатов перехода. Значения коэффициентов упругости при переходе можно выразить через предел текучести по результатам конечного деформирования при растяжении или при сдвиге. Покажем, как эту теорию можно применить к пластическому изгибу полосы.

2. Компоненты перемещений, деформаций и напряжений. Предположим, что недеформированные плоскости полосы $x' = \text{const}$ и $y' = \text{const}$ остаются взаимно-ортогональными после деформации. Тогда для перемещений можно принять

$$u = x - x' = x - f(\xi), \qquad v = y - y' = y - \varphi(\eta) \tag{2.1}$$

Здесь $x + iy = z = F(\xi + i\eta) = F(\zeta)$; функции f, φ и F подлежат определению.

Компоненты конечной деформации, отнесенные к деформированному состоянию, имеют вид

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \tfrac{1}{2}(1 - f'^2\xi_x^2 - \varphi'^2\eta_x^2) \\ e_{yy} &= \tfrac{1}{2}(1 - f'^2\xi_y^2 - \varphi'^2\eta_y^2) \\ e_{xy} &= -\tfrac{1}{2}(f'^2\xi_x\xi_y + \varphi'^2\eta_x\eta_y) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\left(\xi_x = \frac{\partial\xi}{\partial x}, \ldots\right) \\ &\left(\eta_x = \frac{\partial\eta}{\partial x}, \ldots\right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

---

[1] Seth B. R. Elastic-plastic transition in shells and tubes under pressure. Math. Res. Center, Madison, Report, 1962, N 295, 1—18; Elastic-plastic transition in torsion. Report, 1962, n. 302, 1—13.

Зависимость между напряжениями и деформациями примем в виде

$$\tau_{ij} = \lambda I_1 + 2\mu e_{ij} \qquad \left(I_1 = 1 - \frac{1}{2}(f'^2 + \varphi'^2)\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|\right)^2 \tag{2.3}$$

Для компонент напряжения будем иметь

$$\tau_{xx} = \lambda I_1 + \mu\,(1 - f'^2\xi_x{}^2 - \varphi'^2\eta_x{}^2)$$

$$\tau_{yy} = \lambda I_1 + \mu\,(1 - f'^2\xi_y{}^2 - \varphi'^2\eta_y{}^2), \qquad \tau_{xy} = -\mu\,(f'^2\xi_x\xi_y + \varphi'^2\eta_x\eta_y) \tag{2.4}$$

3. Уравнения равновесия. Уравнения равновесия в напряжениях

$$\tau_{ij,j} = 0 \tag{3.1}$$

приводят к двум нелинейным дифференциальным уравнениям

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda I_1 - \frac{1}{2}\mu\,(f'^2 + \varphi'^2)\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2\right] - \frac{1}{2}\mu\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2\frac{\partial}{\partial x}(f'^2 + \varphi'^2) = 0\\ \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda I_1 - \frac{1}{2}\mu\,(f'^2 + \varphi'^2)\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2\right] - \frac{1}{2}\mu\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2\frac{\partial}{\partial y}(f'^2 + \varphi'^2) = 0\end{gathered} \tag{3.2}$$

При замене $F_1 = f'^2 + \varphi'^2$, $F_2 = |d\zeta\,/\,dz|^2$ уравнения (3.2) принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(F_1F_2) + (1 - 2\sigma)\,F_2\frac{\partial F_1}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial}{\partial y}(F_1F_2) + (1 - 2\sigma)\,F_2\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 \tag{3.3}$$

Решение их имеет вид

$$F_1{}^{2(1-\sigma)}F_2 = k_0{}^2 \tag{3.4}$$

где σ — пуассоново отношение, k_0 — константа интегрирования.

Функциональное уравнение (3.4) может быть решено. Легко показать, что оно приводит к различным формам, которые включают круговые, гиперболические, эллиптические и гиперэллиптические функции. Не останавливаясь на этих вопросах, рассмотрим тип решений, который может получиться в точках ветвления, в которых f' или φ' стремится к нулю или к бесконечности. Из (3.4) видно, что в таких точках F_2 стремится стать функцией только или ξ или η. Так как $F_2 = |d\zeta\,/\,dz|^2$, соответствующее функциональное уравнение может быть удовлетворено только, если

$$z = \exp\,(k_0\zeta) \tag{3.5}$$

где k_0 — соответственно подобранная константа. Это показывает, что пластическое деформированное состояние должно давать круговой цилиндр.

4. Переходные и пластические компоненты напряжения. Для главных напряжений $\tau_{\xi\xi}$ и $\tau_{\eta\eta}$ легко получить следующие выражения:

$$\tau_{\xi\xi} = \lambda I_1 + \mu - \mu F_2 f'^2, \qquad \tau_{\eta\eta} = \lambda I_1 + \mu - \mu F_2\varphi'^2, \qquad \tau_{\xi\eta} = 0 \tag{4.1}$$

Обозначая

$$R = 2 - c - \frac{c}{\mu}\,\tau_{\xi\xi} = F_2\,[(1 - c)\,F_1 + cf'^2] \qquad \left(c = \frac{1 - 2\sigma}{1 - \sigma}\right) \tag{4.2}$$

получим

$$\frac{\partial \ln R}{\partial \xi} = \frac{1}{F_2}\frac{\partial F_2}{\partial \xi} + \frac{\partial F_1\,/\,\partial\xi - c\,\partial\varphi'^2\,/\,\partial\xi}{(1 - c)\,F_1 + cf'^2} \tag{4.3}$$

или, используя (3.4)

$$\frac{\partial \ln R}{\partial \xi} = \frac{\partial \ln F_2}{\partial \xi} - \frac{(1 - c\,/\,2)F_1\,\partial \ln F_2\,/\,\partial\xi - c\,\partial\varphi'^2\,/\,\partial\xi}{(1 - c)\,F_1 + cf'^2} \tag{4.4}$$

Аналогичное уравнение получим, дифференцируя (4.2) по η.

При $f' \to \infty$, что соответствует бесконечному растяжению, из (4.4) получим

$$\frac{\partial \ln R}{\partial \xi} = \frac{c}{2}\frac{\partial \ln F_2}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial \ln R}{\partial \eta} = \frac{c}{2}\frac{\partial \ln F_2}{\partial \eta} \tag{4.5}$$

(Второе уравнение получается аналогичным путем.) Эти уравнения показывают, что при переходе

$$R = K_1F_2{}^{c/2} \tag{4.6}$$

где K_1 — постоянная интегрирования.

Аналогично, при $f' \to 0$, что соответствует бесконечному сжатию, получаем для переходного значения R выражение

$$R = K_2 \, [F_2^{1/2} \, \varphi'^2]^{-c/(1-c)} \tag{4.7}$$

Комбинируя эти значения с (4.1) и (4.2), получим переходные значения $\tau_{\xi\xi}$ и $\tau_{\eta\eta}$.

Как было сказано в пункте 3, величины ξ и η суть полярные координаты, так что $z = \exp\zeta$ и $F_2 = |\, d\zeta \,/\, dz \,|^2 = 1 \,/\, r^2$. Значит, из (4.6) и (4.7) получаем

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= \frac{\mu(2-c)}{c}\left[1-\left(\frac{b}{r}\right)^c\right] && \text{в области растяжения} \\ \tau_{rr} &= \frac{\mu(2-c)}{c}\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^{c/(1-c)}\right] && \text{в области сжатия} \end{aligned} \tag{4.8}$$

где a и b — внутренний и наружный радиусы деформированной полосы.

Из результатов для простого сдвига при конечной деформации [2] вытекает, что при переходе $\mu \to k$ — пределу текучести при сдвиге. Устремляя $c \to 0$ (т. е. $\sigma \to 1/2$), получим из (4.8) для пластического радиального напряжения

$$\tau_{rr} = -\, 2k \ln \frac{b}{r} \quad (d < r < b), \qquad \tau_{rr} = -\, 2k \ln \frac{r}{a} \quad (a < r < d) \tag{4.9}$$

причем граница между областями сжатия и растяжения определяется равенством

$$d^2 = ab \tag{4.10}$$

Из (4.1) находим

$$\tau_{\theta\theta} = 2k\left(1 - \ln\frac{b}{r}\right) \quad (d < r < b), \qquad \tau_{\theta\theta} = -\, 2k\left(1 + \ln\frac{r}{a}\right) \quad (a < r < d) \tag{4.11}$$

Это дает условие текучести, упомянутое в п. 1.

5. Природа деформации. Как только началось течение, вместо компонент деформации надо использовать скорости деформации, а переходное состояние принять за начальное. Определение скорости деформации содержит только мгновенную и бесконечно близкую конфигурации. Поэтому можно взять

$$2\dot{e}_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \tag{5.1}$$

вместо компонент конечной деформации, использованных в п.2; получим

$$\dot{e}_{ij} = \lambda_1\left(\frac{3}{2}\,\tau_{ij} - \frac{1}{2}\,\tau_{ii}\right) \qquad (\theta_{ii} = 0) \tag{5.2}$$

Здесь точка означает дифференцирование по удобно выбранному параметру процесса деформации. Это соотношение можно получить из использованного в п. 2 равенства

$$e_{ij} = E^{-1}\,[(1+\sigma)\,\tau_{ij} - \sigma\tau_{ii}] \tag{5.3}$$

принимая $\sigma = 1/2$ и заменяя E^{-1} на λ и e_{ij} на $\dot{e}_{ij}$. Предполагается при этом, что упругая деформация пренебрежимо мала.

Для пластического состояния ($\sigma \to 1/2$, $c \to 0$) из (4.2) получаем

$$f'^2 = 2 - \frac{A^2}{r^2}, \qquad A^2 = d^2 = ab \tag{5.4}$$

Пусть α угол изгиба на единицу длины, $\ln\alpha$ параметр текучести. Тогда

$$\frac{\partial e_{rr}}{\partial \ln\alpha} = \frac{1}{2}(1 - f'^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{r^2} - 1\right), \qquad \frac{\partial e_{\theta\theta}}{\partial \ln\alpha} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{d^2}{r^2}\right) \tag{5.5}$$

Следовательно,

$$\delta u = -\,\frac{1}{2}\left(r + \frac{d^2}{r}\right)\frac{\delta\alpha}{\alpha}, \qquad \delta v = r\theta\,\frac{\delta\alpha}{\alpha} \tag{5.6}$$

Компоненты радиальной и трансверсальной деформации (5.6) совпадают с теми, которые получил Хилл [1]. В остальном анализ проводится так же, как у Хилла.

Поступила 2 VIII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford, 1950, pp. 287—292.
2. Seth B. R. Non — linear continium mechanics, Presidential address, Section of Mathematics Proc. 42 nd Ind. Sci. Congress, 1955, II, p. 9.