МОМЕНТ ГРАВИТАЦИОННЫХ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА СПУТНИК

А. И. Лурье (Ленинград)

Вычисление момента сил, действующих на спутник в поле сил притяжения геоида, проведено в работе [1]; автор исходил в ней из выражения потенциальной энергии малого тела, погруженного в это силовое поле, полученного в работе [2]. В настоящей заметке предлагается прямой вывод, приводящий к сравнительно кратким формулам.

1. Начнем с рассмотрения поля центральных сил — сил притяжения сферической Землей. Пусть $\mathbf{r} = OC$ — вектор-радиус центра инерции спутника C с началом в центре Земли O, вектор $\rho = CM$ определяет положение элементарной массы dm в спутнике; сила притяжения, действующая на эту массу, равна $\mathbf{F}dm$ (ограничиваемся линейными относительно ρ слагаемыми)

$$\mathbf{F}dm = -\frac{\mu dm}{|\mathbf{r}+\rho|^3}(\mathbf{r}+\rho) = -\frac{\mu dm}{r^3}\mathbf{r} + \frac{\mu}{r^3}\left(3\frac{\mathbf{r}\cdot\rho}{r^2}\mathbf{r} - \rho\right) \tag{1.1}$$

Здесь μ — произведение массы Земли и постоянной тяготения. Главный момент сил $\mathbf{F}dm$ относительно центра инерции C поэтому может быть представлен в виде[1]

$$\mathbf{m}^{(c)} = \int \varrho \times \mathbf{F}dm = \frac{3\mu}{r^5}\mathbf{r}\cdot\int \varrho\varrho dm \times \mathbf{r} \tag{1.2}$$

где интегрирование проводится по всем массам. Здесь учтено, что C — центр инерции, так что

$$\int \rho dm = 0 \tag{1.3}$$

Вспоминая теперь определение тензора инерции тела в точке C

$$\Theta^c = \int (E\varrho\cdot\rho - \varrho\varrho)\,dm = E\vartheta - \int \varrho\varrho\,dm \tag{1.4}$$

где E — единичный тензор, ϑ — половина первого инварианта (суммы диагональных элементов) тензора Θ^c, легко получаем

$$\mathbf{m}^c = -\frac{3\mu}{r^5}\mathbf{r}\cdot\Theta^c\times\mathbf{r} = -\frac{3\mu}{r^3}\mathbf{e}_r\cdot\Theta^c\times\mathbf{e}_r \tag{1.5}$$

причем $\mathbf{e}_r$ — единичный вектор направления $\mathbf{r}$ (восходящей вертикали). Теперь, называя через $\mathbf{i}_s$ — единичные векторы главных осей тензора Θ^c, находим выражения моментов сил относительно этих осей

$$\mathbf{m}^c\cdot\mathbf{i}_s = -\frac{3\mu}{r^3}\mathbf{e}_r\cdot\Theta^c\cdot(\mathbf{e}_r\times\mathbf{i}_s) \tag{1.6}$$

и в результативные формулы войдут косинусы углов осей $\mathbf{i}_s$ с вертикалью.

2. Этот же ход вычисления можно повторить, когда учитывается несферичность Земли. Если в разложении потенциальной энергии сил тяготения сохранить только вторую сферическую гармонику, то, как известно [3], выражение (1.1) силы притяжения надо дополнить слагаемым

$$-dm\frac{\mu R_0^2\varepsilon}{r'^5}\left[\mathbf{r}' - \frac{5}{r'^2}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}')^2\mathbf{r}' + 2\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'\mathbf{r}'\right],\ \mathbf{r}' = \mathbf{r}+\varrho \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{k}$ — единичный вектор перпендикуляра к плоскости экватора, R_0 — ее экваториальный радиус, ε — постоянная фигуры Земли ($\varepsilon \approx 0.00164$). Ограничиваясь в разложении (2.1) линейными относительно ρ слагаемыми, приведем выражение (2.1) к виду

$$dm\frac{5\mu R_0^2\varepsilon}{r^5}\left[\mathbf{e}_r\cdot\rho\mathbf{e}_r(1-7\cos^2\theta) + 2\cos\theta(\mathbf{k}\cdot\rho\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_r\cdot\rho\mathbf{k}) - \frac{2}{5}\mathbf{k}\cdot\rho\mathbf{k}\right] + * \tag{2.2}$$

---

[1] В дальнейшем $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $\mathbf{ab}$ — соответственно обозначают скалярное, векторное и диадное произведения векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

в котором звездочкой обозначены параллельные ρ и не зависящие от ρ слагаемые; они отпадут при вычислении момента; $\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}_r = \cos\theta$, где θ — широта, отсчитываемая от полюса экваториальной плоскости. По формулам (1.2), (1.4) теперь легко получим

$$\mathbf{m}^c = -\frac{3\mu}{r^3}\mathbf{e}_r\cdot\boldsymbol{\Theta}^c\times\mathbf{e}_r - \frac{5\mu R_0^2\varepsilon}{r^5}[(1-7\cos^2\theta)\mathbf{e}_r\cdot\boldsymbol{\Theta}^c\times\mathbf{e}_r +$$

$$+2\cos\theta(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\Theta}^c\times\mathbf{e}_r+\mathbf{e}_r\cdot\boldsymbol{\Theta}^c\times\mathbf{k}) + 4\vartheta\mathbf{e}_r\times\mathbf{k}\cos\theta - \frac{2}{5}\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\Theta}^c\times\mathbf{k}] \qquad (2.3)$$

Для вычисления моментов сил относительно главных осей инерции спутника требуется знание также и расположения этих осей относительно вектора $\mathbf{k}$

$$\mathbf{m}^c\cdot\mathbf{i}_s = -\frac{3\mu}{r^3}\mathbf{e}_r\cdot\boldsymbol{\Theta}^c\cdot(\mathbf{e}_r\times\mathbf{i}_s) - \frac{5\mu R_0^2\varepsilon}{r^5}\{(1-7\cos^2\theta)\mathbf{e}_r\cdot\boldsymbol{\Theta}^c\cdot(\mathbf{e}_r\times\mathbf{i}_s)+$$

$$+2\cos\theta\,[\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\Theta}^c\cdot(\mathbf{e}_r\times\mathbf{i}_s)+\mathbf{e}_r\cdot\boldsymbol{\Theta}^c\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{i}_s)] - 2\vartheta\sin 2\theta\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{i}_s - \frac{2}{5}\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\Theta}^c\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{i}_s)\} \quad (2.4)$$

Здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор направления $\mathbf{e}_r\times\mathbf{k}$.

Поступила 29 XI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Roberson R. E. Gravitational Torque on a Satellite Vehicle, Journ. Franklin Inst., 1958, **265**, 13—22.
2. Roberson R. E. and Tatistcheff D. The Potential Energy of a Small Rigid Body in the Gravitational Field of on Oblate Spheroid, Journ. Franklin Inst., 1956, **262**, 209—214.
3. Лурье А. И. Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961, стр. 600.

О ВЗАИМОСВЯЗИ ДВУХ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ В ТЕОРИИ ТЕЧЕНИЯ, УЧИТЫВАЮЩЕЙ ОСТАТОЧНЫЕ МИКРОНАПРЯЖЕНИЯ

Ю. И. Кадашевич

(Ленинград)

Две основные задачи теории течения суть определение пути нагружения по заданному пути деформирования и, наоборот, пути деформации по заданному пути нагружения.

Ниже показывается, что в теории течения, учитывающей остаточные микронапряжения [1], в случае линейного упрочнения и линейного эффекта Баушингера, существует тесная математическая взаимосвязь этих двух задач. Возможность решения одной из них (например, при задании конкретного пути нагружения) означает возможность решения и другой (для аналогичного пути деформирования).

1. Пусть при одноосном нагружении материал обладает линейным упрочнением и линейным эффектом Баушингера [1]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{*p} &= A(\sigma_x' - \sigma_T') \qquad (\varepsilon_x^{*p} = 2G\varepsilon_x^p, \quad A = \text{const}) \\ S_x &= \alpha(\sigma_x' - \sigma_T') \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \alpha = \text{const}) \end{aligned} \qquad (1)$$

Тогда уравнения теории [1] можно привести к такому виду:

$$d\sigma_{ij}' = d\overset{\circ}{\sigma}{}_{ij}' + \frac{\alpha}{1-\alpha}\overset{\circ}{\sigma}{}_{ij}'\frac{dT^\circ}{T^\circ} \qquad (2)$$

$$\varepsilon_{ij}^{*p} = \frac{A}{\alpha}(\overset{\circ}{\sigma}{}_{ij}' - \sigma_{ij}')\quad(\varepsilon_{ij}^{*p} = 2G\varepsilon_{ij}^p) \qquad (3)$$

---

[1] Ниже использованы обозначения статьи [1].