К ТЕОРИИ ГИРОГОРИЗОНТКОМПАСА

В. Ф. Ляшенко (Москва)

Обобщаются результаты работы [1]. Дается вывод уравнений движения гирогоризонткомпаса с учетом инерционных членов и вертикальных ускорений, возникающих при движении основания. Выводятся условия апериодичности для гирокомпаса с учетом инерционных членов.

1. Введем в рассмотрение правую систему координат $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$, начало которой помещено в центре земного шара, а оси ориентированы по неподвижным звездам.

Введем также следующие правые системы координат, начала которых O помещены в точке подвеса гиросферы: систему $O\xi\eta\zeta$, оси которой параллельны соответствующим осям системы координат $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$; систему координат $Ox_1y_1z_1$, в которой ось Ox_1 направлена по касательной к параллели земного шара на восток, ось Oy_1 направлена по касательной к меридиану земного шара на север; систему $Ox^\circ y^\circ z^\circ$, в которой ось Ox° направлена по проекции вектора скорости точки подвеса гиросферы относительно системы $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ на плоскость, касательную к земному шару в точке O, ось Oz° направлена вертикально вверх; систему $Oxyz$, связанную с гиросферой, в которой ось Oy направлена вдоль вектора собственного кинетического момента гирокомпаса, ось Oz направлена параллельно осям кожухов гироскопов.

Положение системы осей $Oxyz$ относительно системы осей $Ox^\circ y^\circ z^\circ$ определим посредством трех углов α, β, γ, где α — угол отклонения оси гиросферы в азимуте, β — угол подъема северного конца оси гиросферы над плоскостью, касательной в точке O к земному шару, γ — угол поворота гиросферы вокруг линии север — юг [1]. Таблица направляющих косинусов между системами осей $Oxyz$ и $Ox^\circ y^\circ z^\circ$ представлена справа.

	x°	y°	z°
x	$\cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$	$\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$	$-\cos\beta\sin\gamma$
y	$-\sin\alpha\cos\beta$	$\cos\alpha\cos\beta$	$\sin\beta$
z	$\cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$	$\sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma$	$\cos\beta\cos\gamma$

Уравнения движения гирокомпаса относительно системы координат $O\xi\eta\zeta$ запишем в виде

$$\frac{dK_x}{dt} + \Omega_y K_z - \Omega_z K_y = M_x + L_x, \quad \frac{dK_y}{dt} + \Omega_z K_x - \Omega_x K_z = M_y + L_y$$

$$\frac{dK_z}{dt} + \Omega_x K_y - \Omega_y K_x = M_z + L_z \tag{1.1}$$

Здесь через K_x, K_y, K_z обозначены проекции суммарного кинетического момента гирокомпаса на оси Ox, Oy, Oz; через $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ — проекции угловой скорости системы осей $Oxyz$ относительно системы осей $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ на оси Ox, Oy, Oz; через M_x, M_y, M_z — моменты внешних сил, действующих на гиросферу, относительно осей Ox, Oy, Oz; через L_x, L_y, L_z — моменты силы инерции переносного движения гиросферы вместе с поступательно перемещающейся системой координат $O\xi\eta\zeta$ относительно тех же осей.

К уравнениям (1.1) следует добавить еще одно уравнение, описывающее движение гироскопов внутри гиросферы. Составляя для каждого гироскопа уравнение моментов, имеем:

$$-\frac{d}{dt}(A_1\dot{\varepsilon}) + \Omega_x B_{1y} - \Omega_y B_{1x} + M_{1z} = 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{d}{dt}(A_2\dot{\varepsilon}) + \Omega_x B_{2y} - \Omega_y B_{2x} + M_{2z} = 0 \tag{1.3}$$

Здесь A_1, A_2 — моменты инерции каждого гироскопа (вместе с кожухом) относительно осей их кожухов; ε — угол разведения гироскопов; величины M_{1z}, M_{2z} —

моменты вокруг осей кожухов гироскопов;

$$B_{1x} = -B_{2x} = B \sin \varepsilon, \qquad B_{1y} = B_{2y} = B \cos \varepsilon$$

представляют собой проекции собственных кинетических моментов гироскопов соответственно на оси Ox, Oy. Вычитая (1.3) из (1.2), получаем

$$-\frac{d}{dt}(A_1 + A_2)\dot{\varepsilon} - \Omega_y 2B \sin \varepsilon = N(\varepsilon) \qquad (N(\varepsilon) = M_{2z} - M_{1z}) \tag{1.4}$$

Момент $N(\varepsilon)$ может быть создан специальным датчиком.

Уравнение (1.4) и есть искомое четвертое уравнение. Полагая, что оси Ox, Oy, Oz являются главными осями инерции гиросферы в точке подвеса, имеем:

$$K_x = J_{xx}\Omega_x, \qquad K_y = J_{yy}\Omega_y + 2B\cos\varepsilon, \qquad K_z = J_{zz}\Omega_z + (A_2 - A_1)\dot{\varepsilon} \tag{1.5}$$

Здесь $2B \cos \varepsilon$ — собственный кинетический момент гирокомпаса; J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} — главные моменты инерции гиросферы относительно осей Ox, Oy, Oz, из которых первые два являются в общем случае функциями угла ε.

Будем считать далее, что $A_1 = A_2 = A = \mathrm{const}$, $J_{zz} = \mathrm{const}$.

При учете (1.5) и сделанных замечаний уравнения (1.1), (1.4) принимают вид

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}(J_{xx}\Omega_x) + (J_{zz} - J_{yy})\Omega_y\Omega_z - 2B\cos\varepsilon\,\Omega_z = M_x + L \\
\frac{d}{dt}(J_{yy}\Omega_y) + (J_{xx} - J_{zz})\Omega_x\Omega_z + \frac{d}{dt}2B\cos\varepsilon = M_y + L_y \\
J_{zz}\frac{d\Omega_z}{dt} + (J_{yy} - J_{xx})\Omega_x\Omega_y + 2B\cos\varepsilon\,\Omega_x = M_z + L_z \\
-2A\ddot{\varepsilon} - \Omega_y 2B\sin\varepsilon = N(\varepsilon)
\end{gathered} \tag{1.6}$$

Выражения для Ω_x, Ω_y, Ω_z имеют вид [1]

$$\begin{gathered}
\Omega_x = \frac{v}{R}(\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma) + (\Omega + \dot{\alpha})(-\cos\beta\sin\gamma) + \dot{\beta}\cos\gamma \\
\Omega_y = \frac{v}{R}\cos\alpha\cos\beta + (\Omega + \dot{\alpha})\sin\beta + \dot{\gamma} \\
\Omega_z = \frac{v}{R}(\sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma) + (\Omega + \dot{\alpha})\cos\beta\cos\gamma + \dot{\beta}\sin\gamma \\
\left(v = \sqrt{(RU\cos\varphi + v_E)^2 + v_N^2}\right)
\end{gathered} \tag{1.7}$$

Здесь v — проекция вектора скорости точки подвеса гиросферы относительно системы координат $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ на плоскость, касательную в точке O к земному шару; R — радиус земного шара; U — угловая скорость вращения земного шара; φ — геоцентрическая широта местонахождения корабля; v_E, v_N — соответственно восточная и северная составляющие скорости точки подвеса гиросферы относительно поверхности земного шара в проекциях на оси Ox_1, Oy_1. Заметим также, что

$$\Omega = U\sin\varphi + \frac{v_E}{R}\operatorname{tg}\varphi - \dot{\alpha}^* \qquad \left(\operatorname{tg}\alpha^* = -\frac{v_N}{RU\cos\varphi + v_E}\right) \tag{1.8}$$

В числе внешних сил, действующих на гиросферу, учтем только силу тяготения к земному шару $P = mg$ (m — масса гиросферы, g — ускорение свободного падения), которая будет приложена в центре тяжести гиросферы c.

Будем полагать, что сила тяготения направлена параллельно оси $Oz°$, а центр тяжести гиросферы имеет в системе осей $Oxyz$ координаты $x_c = 0$, $y_c = 0$ и $z_c = -l$. В этом случае

$$M_x = -mgl\sin\beta, \qquad M_y = -mgl\cos\beta\sin\gamma, \qquad M_z = 0 \tag{1.9}$$

Далее

$$\begin{gathered}
L_x = -m(a_z y_c - a_y z_c) = -mla_y, \quad L_y = -m(a_x z_c - a_z x_c) = mla_x \\
L_z = -m(a_y x_c - a_x y_c) = 0
\end{gathered} \tag{1.10}$$

Здесь a_x, a_y, a_z — проекции на оси Ox, Oy, Oz ускорения точки подвеса гиросферы относительно системы координат $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$.

Обозначим через v_{x°, v_{y°, v_{z° проекции на оси Ox°, Oy°, Oz° скорости точки подвеса гиросферы относительно системы координат $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$. В соответствии с выбором системы осей $Ox^\circ y^\circ z^\circ$ имеем:

$$v_{x^\circ} = v = \sqrt{(RU\cos\varphi + v_E)^2 + v_N{}^2}, \qquad v_{y^\circ} = 0, \qquad v_{z^\circ} = \dot{R} \tag{1.11}$$

Обозначая через Ω_{x°, Ω_{y°, Ω_{z° проекции угловой скорости системы осей $Ox^\circ y^\circ z^\circ$ относительно системы осей $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ на ее собственные оси, имеем [1]:

$$\Omega_{x^\circ} = 0, \qquad \Omega_{y^\circ} = v / R, \qquad \Omega_{z^\circ} = \Omega \tag{1.12}$$

Тогда проекции на оси $Ox^\circ y^\circ z^\circ$ ускорения точки подвеса гиросферы относительно системы координат $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
a_{x^\circ} &= \frac{dv_{x^\circ}}{dt} + \Omega_{y^\circ}v_{z^\circ} - \Omega_{z^\circ}v_{y^\circ} = \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R}\dot{R} \\
a_{y^\circ} &= \frac{dv_{y^\circ}}{dt} + \Omega_{z^\circ}v_{x^\circ} - \Omega_{x^\circ}v_{z^\circ} = \Omega v \\
a_{z^\circ} &= \frac{dv_{z^\circ}}{dt} + \Omega_{x^\circ}v_{y^\circ} - \Omega_{y^\circ}v_{x^\circ} = \ddot{R} - \frac{v^2}{R}
\end{aligned} \tag{1.13}$$

При учете таблицы направляющих косинусов и (1.13) выражения (1.10) принимают вид

$$L_x = -ml\left[\left(\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R}\dot{R}\right)(-\sin\alpha\cos\beta) + v\Omega\cos\alpha\cos\beta + \left(\ddot{R} - \frac{v^2}{R}\right)\sin\beta\right] \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned}
L_y = ml \Big[&\left(\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R}\dot{R}\right)(\cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma) + \\
&+ v\Omega(\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma) + \left(\ddot{R} - \frac{v^2}{R}\right)(-\cos\beta\sin\gamma)\Big]
\end{aligned}$$

$$L_z = 0$$

Определяя возмущенное положение осей роторов гироскопов относительно гиросферы углом δ поворота гироскопов вокруг осей их кожухов, следует положить в уравнениях (1.6)

$$\varepsilon = \varepsilon^\circ + \delta \tag{1.15}$$

где ε° — некоторое равновесное значение угла ε.

Для дальнейшего понадобятся условия апериодичности, полученные А. Ю. Ишлинским [1] в рамках прецессионной теории гироскопических явлений. Последние имеют вид:

$$2B\cos\varepsilon^\circ = mlv, \qquad N(\varepsilon^\circ) = -\frac{4B^2}{mlR}\cos\varepsilon^\circ\sin\varepsilon^\circ \tag{1.16}$$

2. Условия апериодичности (1.16) оказываются недостаточными при рассмотрении движения гирогоризонткомпаса с учетом инерционных членов. Поэтому представляет интерес получить условия компенсации баллистических девиаций для гирокомпаса с учетом инерционных членов. Заметим здесь же, что это связано с внесением надлежащей внешней информации.

Рассмотрим, каким условиям нужно удовлетворить, чтобы оси $Oxyz$ все время совпадали с осями $Ox^\circ y^\circ z^\circ$, а угол ε был бы равен ε°, каким бы образом ни перемещалась точка подвеса гиросферы по поверхности земного шара. Положим $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ в уравнениях (1.6). Тогда они принимают вид (моменты инерции гироскопов A_1 и A_2 не учитываем и, кроме того, полагаем, что $\dot{R} = 0$):

$$\begin{aligned}
&(J_{zz} - J_{yy})\frac{v}{R}\Omega - 2B\cos\varepsilon^\circ\Omega = -mlv\Omega + M_x{}^* \\
&\frac{d}{dt}\left(J_{yy}\frac{v}{R}\right) + \frac{d}{dt}2B\cos\varepsilon^\circ = ml\frac{dv}{dt} + M_y{}^* \\
&J_{zz}\frac{d\Omega}{dt} = M_z{}^*, \qquad -\frac{v}{R}2B\sin\varepsilon^\circ = N(\varepsilon^\circ)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь M_x^*, M_y^*, M_z^* — компенсационные моменты относительно осей Ox, Oy, Oz с учетом внешней информации.

Уравнения (2.1) тождественно удовлетворяются в двух случаях. При этом получаем следующие условия:

в первом случае

$$2B\cos\varepsilon^\circ = mlv, \qquad N(\varepsilon^\circ) = -\frac{4B^2}{mlR}\cos\varepsilon^\circ\sin\varepsilon^\circ$$

$$M_x^* = \chi mlv\Omega, \qquad M_y^* = \frac{d}{dt}\left(J_{yy}\frac{v}{R}\right), \qquad M_z^* = J_{zz}\frac{d\Omega}{dt} \tag{2.2}$$

во втором случае

$$2B\cos\varepsilon^\circ = mlv(1+\chi), \qquad N(\varepsilon^\circ) = -\frac{4B^2}{mlR(1+\chi)}\cos\varepsilon^\circ\sin\varepsilon^\circ$$

$$M_x^* = 0, \qquad M_y^* = J_{zz}\frac{d}{dt}\frac{v}{R}, \qquad M_z^* = J_{zz}\frac{d\Omega}{dt} \tag{2.3}$$

Здесь

$$\chi = (J_{zz} - J_{yy})\frac{\nu^2}{Pl}, \qquad \nu^2 = \frac{g}{R}$$

Пусть в начальный момент $t = 0$ оси $Oxyz$ и $Ox^\circ y^\circ z^\circ$ совпадают, а начальное значение угла $\varepsilon = \varepsilon(0)$ определяется формулой

$$\cos\varepsilon(0) = \frac{mlv(0)}{2B} \qquad \left(\text{или } \cos\varepsilon(0) = \frac{mlv(0)(1+\chi)}{2B}\right) \tag{2.4}$$

Здесь $v(0)$ — начальное значение v.

Пусть во все время движения датчик момента вырабатывает зависимость

$$N(\varepsilon) = -\frac{4B^2}{mlR}\cos\varepsilon\sin\varepsilon \qquad \left(\text{или } N(\varepsilon) = -\frac{4B^2}{mlR(1+\chi)}\cos\varepsilon\sin\varepsilon\right) \tag{2.5}$$

и, сверх того, накладываются компенсационные моменты

$$M_x^* = \chi mlv\Omega, \quad M_y^* = \frac{d}{dt}\left(J_{yy}\frac{v}{R}\right), M_z^* = J_{zz}\frac{d\Omega}{dt}$$

или (2.6)

$$M_x^* = 0, \qquad M_y^* = J_{zz}\frac{d}{dt}\frac{v}{R}, \qquad M_z^* = J_{zz}\frac{d\Omega}{dt}$$

Тогда

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 0 \quad \text{при } t \geqslant 0$$

Условия (2.5) в сочетании с наличием компенсационных моментов влекут за собой автоматическое соблюдение условий

$$2B\cos\varepsilon = mlv \qquad (\text{или } 2B\cos\varepsilon = mlv(1+\chi)) \tag{2.7}$$

т. е. гироскопы сами будут «выбирать» угол ε равным ε°. Баллистических девиаций компас не имеет.

Таким образом, условия (2.2) или (2.3) являются условиями апериодичности для гирокомпаса с учетом инерционных членов. Если же начальные условия удовлетворены с малой погрешностью, то, полагая углы α, β, γ, δ малыми, получим из уравнений (1.6) при условиях (2.2) или (2.3) линеаризованную систему, которая может быть исследована методами теории малых колебаний.

Автор приносит благодарность В. Н. Кошлякову за ценные указания при выполнении данной работы.

Поступила 2 X 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. К теории гирогоризонткомпаса. ПММ, 1956, т. XX, вып. 4.
2. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов. ГИТТЛ, 1955.
3. Суслов Г. К. Теоретическая механика. Гостехиздат, 1944.