Фундаментальное уравнение имеет корни $\pm i$ и $\pm {}^1/_2 i$. Ищется субгармоническое решение системы. Имеем $p_1 = 1$, $p_2 = {}^1/_4$. Порождающее решение зависит от двух произвольных постоянных

$$x_0 = A_0 \cos t + B_0 \sin t, \qquad y_0 = A_0 \cos t + B_0 \sin t + \cos 2t$$

Уравнения основных амплитуд

$$A_0\left[3 + \frac{1}{4}(A_0^2 + B_0^2)\right] = 0, \qquad B_0\left[3 + \frac{1}{4}(A_0^2 + B_0^2)\right] = 0$$

имеют очевидное решение $A_0 = B_0 = 0$. Используя описанный выше прием построения периодических решений, получаем первое приближение

$$x(t) = \left[\frac{16}{9}\left(\frac{\pi}{3} - 1\right)\sin t + \frac{8}{5}\sin 2t\right]\mu$$

$$y(t) = \cos 2t + \left[\frac{16}{9}\left(\frac{\pi}{3} - 1\right)\sin t + \frac{16}{15}\sin 2t\right]\mu$$

Поступила 14 VI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1956.
2. Плотникова Г. В. О построении периодических решений неавтономной квазилинейной системы с двумя степенями свободы. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
3. Проскуряков А. П. Колебания квазилинейных неавтономных систем с одной степенью свободы вблизи резонанса. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
4. Плотникова Г. В. О построении периодических решений неавтономной квазилинейной системы с одной степенью свободы вблизи резонанса в случае двукратных корней уравнений основных амплитуд. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ, ОБЛАДАЮЩИХ ПЕРВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Ю. А. Архангельский

(Москва)

1. Рассмотрим квазилинейную автономную систему с n степенями свободы

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\ddot{x}_k + c_{ik}x_k) = \mu f_i(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, \mu) \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (1.1)$$

где функции f_i являются аналитическими функциями своих аргументов в некоторой области их изменения, величина μ — малым параметром, а все корни уравнения частот

$$\Delta(\omega^2) = |c_{ik} - \omega^2 a_{ik}| = 0$$

различными и соизмеримыми. Тогда решение порождающей системы

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\ddot{x}_k + c_{ik}x_k) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \qquad a_{ik} = a_{ki}, \qquad c_{ik} = c_{ki}$$

будет содержать все n частот $\omega_1, \ldots, \omega_n$ и будет периодическим с некоторым периодом T_0. Будем предполагать, что указанному решению порождающей системы отвечает периодическое с периодом $T_0 + \alpha$ (α исчезает при $\mu = 0$) решение (1.1); соответствующие этому периодическому решению начальные условия представим в виде [1, 2].

$$x_k(0) = \sum_{r=1}^{n} p_k^{(r)}(A_r + \beta_r), \qquad \dot{x}_k(0) = \sum_{r=2}^{n} p_k^{(r)}(B_r + \gamma_r)$$

Здесь A_r, B_r — постоянные; β_r, γ_r — некоторые функции μ, обращающиеся в ноль при $\mu = 0$, а

$$p_k^{(r)} = \frac{\Delta_{ik}(\omega_r^2)}{\Delta_{i1}(\omega_r^2)} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

где $\Delta_{ik}(\omega_r^2)$ — алгебраическое дополнение элемента $c_{ik} - \omega_r^2 a_{jk}$ в определителе $\Delta(\omega_r^2)$. В этом случае разложение рассматриваемого периодического решения системы (1.1) по степеням параметров β, γ, μ можно взять в следующем виде [1,2]:

$$x_k(t) = (A_1 + \beta_1)\cos\omega_1 t + \sum_{r=2}^{n} p_k^{(r)}\left[(A_r + \beta_r)\cos\omega_r t + \frac{B_r + \gamma_r}{\omega_r}\sin\omega_r t\right] +$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\left[C_{km}(t) + \frac{\partial C_{km}}{\partial A_1}\beta_1 + \ldots + \frac{\partial C_{km}}{\partial B_n}\gamma_n + \ldots\right]\mu^m$$

где выражения для $C_{km}(t)$ приведены в указанных работах. Обозначая

$$x_k(T_0 + \alpha) - x_k(0) = \psi_k, \qquad \dot{x}_k(T_0 + \alpha) - \dot{x}_k(0) = \psi_{n+k} \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

получим $2m$ условий периодичности для величин $x_k(t)$, $\dot{x}_k(t)$

$$\psi_m = 0 \qquad (m = 1, \ldots, 2n) \tag{1.3}$$

Из этих условий нужно определить, кроме $2n - 1$ постоянных $A_1, \ldots, A_n$, $B_2, \ldots, B_n$, еще $2n$ функций от μ: $\beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \alpha$ (в силу автономности системы (1.1) $B_1 = \gamma_1 = 0$). Одно из этих условий, например $\psi_1 = 0$, используем для определения параметра α в виде ряда по целым степеням величин β, γ, μ

$$\overset{\circ}{\alpha} = \alpha(\beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \mu) \tag{1.4}$$

Это всегда можно сделать при условии

$$B_2 + \ldots + B_n \neq 0 \tag{1.5}$$

Разлагая по параметру α левые части остальных формул (1.2) и подставляя вместо α выражение (1.4), будем иметь в общем случае следующие соотношения:

$$\mu^{s_j}\left[M_j(A_1, \ldots, A_n, B_2, \ldots, B_n) + N_j(\beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \mu)\right] = \psi_j \qquad (j = 2, \ldots, 2n) \tag{1.6}$$

где s_j — целые положительные числа, большие или равные единице; M_j — некоторые функции постоянных A, B, а выражения N_j являются аналитическими функциями всех своих аргументов в окрестности их нулевых значений, причем $N_j(0, \ldots, 0) = 0$. Можно также показать (аналогично тому, как это сделано в работе [3] для $n = 2$), что

$$N_j = \frac{\partial M_j}{\partial A_1}\beta_1 + \ldots + \frac{\partial M_j}{\partial A_n}\beta_n + \frac{\partial M_j}{\partial B_2}\gamma_2 + \ldots + \frac{\partial M_j}{\partial B_n}\gamma_n + \ldots + \mu(\ldots) \tag{1.7}$$

В этой же работе [3] для $n = 2$ вычислены функции M_j и коэффициенты трех первых членов разложения функций N_j в ряды по степеням μ при $s_j = 1$.

Таким образом, условия периодичности (1.3) для системы (1.6) можно разбить на две группы условий

$$(1)\quad M_j = 0, \qquad (2)\quad N_j = 0 \qquad (j = 2, \ldots, 2n) \tag{1.8}$$

Из первой группы условий, называемых уравнениями основных амплитуд, определяются постоянные A, B, а из второй группы условий — функции $\beta(\mu)$, $\gamma(\mu)$. Подставляя затем найденные начальные значения A, B, $\beta(\mu)$, $\gamma(\mu)$ искомого периодического решения в формулу (1.4), находим поправку α на его период.

2. Предположим теперь, что система (1.1) обладает l ($l < 2n$) независимыми первыми интегралами

$$F_p(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, \mu) = \text{const} \qquad (p = 1, \ldots, l) \tag{2.1}$$

аналитическими в области начальных значений искомых периодических решений и нулевого значения μ и независящими от времени. Тогда, следуя Пуанкаре [4], формулы (2.1) перепишем в виде разностей

$$F_p[x_1(T_0+\alpha), \ldots, x_n(T_0+\alpha), \dot{x}_1(T_0+\alpha), \ldots, \dot{x}_n(T_0+\alpha), \mu] -$$
$$- F_p[x_1(0), \ldots, x_n(0), \dot{x}_1(0), \ldots, \dot{x}_n(0), \mu] = 0$$

которые на основании (1.2) перепишем

$$F_p[x_1(0)+\psi_1, \ldots, x_n(0)+\psi_n, \dot{x}_1(0)+\psi_{n+1}, \ldots, \dot{x}_n(0)+\psi_{2n}, \mu] -$$
$$- F_p[x_1(0), \ldots, x_n(0), \dot{x}_1(0), \ldots, \dot{x}_n(0), \mu] = 0 \qquad (p = 1, \ldots, l) \tag{2.2}$$

Разлагая выражения (2.2) в ряды по степеням ψ, получим уравнения

$$F_p^*(\psi_1, \ldots, \psi_{2n}, \mu) = 0 \tag{2.3}$$

левые части которых представляют аналитические функции своих аргументов и уничтожаются при условии (1.3). Разрешая уравнения (2.3) относительно каких-либо l переменных ψ, например $\psi_{2n+1-l}, \ldots, \psi_{2n}$, что всегда возможно [5] при условии

$$\left.\frac{D(F_1^*, \ldots, F_l^*)}{D(\psi_{2n+1-l}, \ldots, \psi_{2n})}\right|_{\psi_1=\ldots=\psi_{2n}=0} \neq 0 .$$

будем иметь

$$\psi_{2n+1-p} = \Phi_p(\psi_1, \ldots, \psi_{2n-l}) \qquad (p = 1, \ldots, l)$$

где Φ_p являются рядами, расположенными по соответствующим степеням всех входящих в них параметров, исчезающими при условии

$$\psi_1 = \ldots = \psi_{2n-l} = 0 \tag{2.4}$$

Отсюда следует, что так как последние l уравнений системы (1.3) зависят от первых $2n - l$ уравнений, условия периодичности

$$\psi_{2n+1-l} = \ldots = \psi_{2n} = 0$$

будут выполняться автоматически при выполнении условий (2.4). Таким образом, для определения периодического решения системы (1.1) нужно только $2n - l$ условий периодичности (1.3) или $2(2n - 1 - l)$ условий для системы (1.8)

$$M_q(A_1, \ldots, A_n, B_2, \ldots, B_n) = 0, \qquad N_q(\beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \mu) = 0 \tag{2.5}$$
$$(q = 2, \ldots, 2n - l)$$

Первая группа условий (2.5) представляет $2n - 1 - l$ уравнений основных амплитуд с $2n - 1$ неизвестными A, B. Разрешая эти уравнения относительно каких-либо $2n - 1 - l$ неизвестных, что, например, возможно [5] при условии, что ранг якобиевой матрицы в некоторой области значений неизвестных A, B

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial M_2}{\partial A_1} & \cdots & \dfrac{\partial M_2}{\partial A_n} & \dfrac{\partial M_2}{\partial B_2} & \cdots & \dfrac{\partial M_2}{\partial B_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial M_{2n-l}}{\partial A_1} & \cdots & \dfrac{\partial M_{2n-l}}{\partial A_n} & \dfrac{\partial M_{2n-l}}{\partial B_2} & \cdots & \dfrac{\partial M_{2n-l}}{\partial B_n} \end{matrix} \right\| \tag{2.6}$$

равен $2n - 1 - l$, получим, что оставшиеся l неизвестных A, B можно считать произвольными параметрами в этой области.

Вторая группа условий представляет $2n - 1 - l$ уравнений, зависящих от $2n - 1$ неизвестных β, γ и параметра μ. Разрешая эти уравнения относительно каких-либо $2n - 1 - l$ неизвестных, получаем их выражение в виде рядов по степеням остальных l неизвестных и параметра μ. Из соотношений (1.7) вытекает, что это всегда можно сделать [5], если ранг якобиевой матрицы (2.6) в некоторой области значений неизвестных A, B равен $2n - 1 - l$.

Отсюда следует, что свободные l неизвестных β, γ можно взять произвольными аналитическими функциями μ, исчезающими при $\mu = 0$. Заметим, что случай, когда ранг матрицы (2.6) меньше $2n - 1 - l$, означает возможность существования кратных корней соответствующих систем уравнений.

Таким образом, периодические решения квазилинейной автономной системы обладающей l независимыми первыми интегралами, зависят при определенных условиях, от l произвольных постоянных и l произвольных функций от μ. Аналогичные рассуждения можно провести и для квазилинейных неавтономных систем с n степенями свободы, обладающих l $(l < 2n)$ независимыми первыми интегралами

$$F_p(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, \mu, t) = \mathrm{const} \qquad (p = 1, \ldots, l)$$

аналитическими в области начальных значений искомых периодических решений, нулевого значения μ и периодических по времени с периодом 2π.

3. В качестве примера рассмотрим периодическое решение известного [6] уравнения свободных колебаний консервативной системы с одной степенью свободы с нелинейной упругой восстанавливающей силой

$$\ddot{x} + x = \mu x^3 \tag{3.1}$$

которому удовлетворяет интеграл живых сил

$$\dot{x}^2 + x^2 - \mu \frac{x^4}{2} = \mathrm{const} \tag{3.2}$$

Выбирая начальные условия искомого периодического решения в виде

$$x(0) = A + \beta, \qquad \dot{x}(0) = 0 \tag{3.3}$$

и обозначая

$$x(2\pi + \alpha) - x(0) = \psi_1, \qquad \dot{x}(2\pi + \alpha) - \dot{x}(0) = \psi_2 \tag{3.4}$$

получим условия периодичности

$$\psi_1 = \psi_2 = 0$$

Согласно изложенному в п.2, переписывая интеграл (3.2) в виде

$$[\dot{x}(0) + \psi_2]^2 + [x(0) + \psi_1]^2 - \frac{\mu}{2}[x(0) + \psi_1]^4 - \dot{x}^2(0) - x^2(0) + \frac{\mu}{2}x^4(0) = 0$$

получим уравнение

$$2x(0)[1 - \mu x^2(0)]\psi_1 + 2\dot{x}(0)\psi_2 + \ldots = 0 \tag{3.5}$$

где ненаписанные члены содержат ψ_1 и ψ_2 более высокой степени. Подставляя в уравнение (3.5) начальные значения (3.3), видим, что, например, при $A \neq 0$ это уравнение можно разрешить относительно ψ_1

$$\psi_1 = \Phi(\psi_2) \qquad (\Phi(0) = 0)$$

Поэтому независимым условием периодичности является только условие $\psi_2 = 0$. Из этого условия находится величина $\alpha = \alpha(\beta, \mu)$, если $A \neq 0$ [7].

Таким образом, периодическое решение уравнения (3.1) зависит от одной отличной от нуля произвольной постоянной и одной произвольной функции μ. Это решение может быть найдено, например, по формуле (1.10) цитированной выше работы.

Поступила 1 XI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Проскуряков А. П. Об одном свойстве периодических решений квазилинейных автономных систем с несколькими степенями свободы. ПММ, 1960, т. 24, вып. 4.
2. Проскуряков А. П. К построению периодических решений квазилинейных автономных систем с несколькими степенями свободы. ПММ, 1962, т. 24, вып. 2.
3. Проскуряков А. П. Периодические колебания квазилинейной автономной системы с двумя степенями свободы. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
4. Poincaré H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Paris, 1892, t. I, ch. III.
5. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. I, ч. II, ГТТИ, 1933.
6. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1956.
7. Проскуряков А. П. Построение периодических решений автономных систем с одной степенью свободы в случае произвольных вещественных корней уравнения основных амплитуд. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4.