К ПОСТРОЕНИЮ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНОЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Г. В. Плотникова (Москва)

Рассматривается неавтономная квазилинейная система с двумя степенями свободы вида

$$\begin{aligned} \ddot{x} + ax + by &= f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}, \mu) \\ \ddot{y} + cx + dy &= \varphi(t) + \mu\Phi(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}, \mu) \end{aligned} \qquad (0.1)$$

Предполагается, что f и φ — непрерывные периодические периода 2π функции; F и Φ — аналитические функции по отношению к переменным x, $\dot{x}$, y, $\dot{y}$, μ и непрерывные периодические функции t с тем же периодом 2π. Величина μ — малый параметр. Коэффициенты a, b, c, d — постоянные. Рассмотрим случай резонанса [1] (стр. 107), когда фундаментальное уравнение

$$(D^2 + a)(D^2 + d) - bc = 0$$

имеет два корня, равные $\pm ik$, где k — целое число, и два другие корня, равные $\pm i\omega$, где ω — нецелое число.

Общее решение порождающей системы ($\mu = 0$) имеет вид

$$\begin{aligned} x_0^*(t) &= A_0 \cos kt + \frac{B_0}{k}\sin kt + E_0 \cos\omega t + \frac{D_0}{\omega}\sin\omega t + f^*(t) \\ y_0^*(t) &= p_1\left(A_0\cos kt + \frac{B_0}{k}\sin kt\right) + p_2\left(E_0\cos\omega t + \frac{D_0}{\omega}\sin\omega t\right) + \varphi^*(t) \end{aligned} \qquad (0.2)$$

где $f^*(t)$ и $\varphi^*(t)$ — частные решения порождающей системы, A_0, B_0, E_0, D_0 — произвольные постоянные

$$p_1 = \frac{c}{k^2 - d} = \frac{k^2 - a}{b}, \qquad p_2 = \frac{c}{\omega^2 - d} = \frac{\omega^2 - a}{b}$$

Выделим из (0.2) семейство периодических решений периода 2π

$$\begin{aligned} x_0(t) &= A_0\cos kt + \frac{B_0}{k}\sin kt + f^\circ(t) \\ y_0(t) &= p_1\left(A_0\cos kt + \frac{B_0}{k}\sin kt\right) + \varphi^\circ(t) \end{aligned} \qquad (0.3)$$

Здесь $f^\circ(t)$ и $\varphi^\circ(t)$ — частное периода 2π решение системы (0.1) при $\mu = 0$. Согласно работе [1] (стр. 109), для того чтобы система (0.1) при $\mu = 0$ допускала в резонансном случае периодические решения (0.3), необходимо и достаточно, чтобы функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ удовлетворяли двум условиям

$$\int_0^{2\pi} \left[f(\tau) + \frac{b}{k^2 - d}\varphi(\tau)\right]\cos k\tau\, d\tau = 0, \qquad \int_0^{2\pi}\left[f(\tau) + \frac{b}{k^2 - d}\varphi(\tau)\right]\sin k\tau\, d\tau = 0$$

Задача заключается в отыскании периодических решений периода 2π системы (0.1), обращающихся в порождающее решение (0.3) при $\mu = 0$. В работе [2] ошибочно указывалось на то, что решение (0.1) имеет вид, аналогичный виду решения (0.3) порождающей системы. На самом деле это не так. Установим условия существования таких периодических решений (0.1) и укажем способ их вычисления.

1. Согласно методу Пуанкаре начальные условия для системы (0.1) берутся в виде

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0(0) + b_1, \qquad & \dot{x}(0) &= \dot{x}_0(0) + b_2 \\ y(0) &= y_0(0) + b_3, \qquad & \dot{y}(0) &= \dot{y}_0(0) + b_4 \end{aligned} \qquad (1.1)$$

где b_i — некоторые величины, уничтожающиеся при $\mu = 0$. Тогда решение системы (0.1) зависит от параметров b_1, b_2, b_3, b_4 и может быть разложено в ряды по целым степеням этих параметров

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_0(t) + \sum_{i=1}^{4} P_{1i}(t)\, b_i + \mu\, [\ldots] = 0 \\
y(t) &= y_0(t) + \sum_{i=1}^{4} P_{2i}(t)\, b_i + \mu\, [\ldots] = 0
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Функции $P_{1i}(t)$, $P_{2i}(t)$ находятся путем подстановки рядов (1.2) в уравнение (0.1) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях величин b_i, μ. Введем обозначения

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{p_1 - p_2}(b_3 - p_2 b_1) &= \beta_1, \qquad & \frac{1}{p_1 - p_2}(p_1 b_1 - b_3) &= \beta_3 \\
\frac{1}{p_1 - p_2}(b_4 - p_2 b_2) &= \beta_2, \qquad & \frac{1}{p_1 - p_2}(p_1 b_2 - b_4) &= \beta_4
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

В результате получим решение (1.2) в виде

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_0(t) + \beta_1 \cos kt + \frac{\beta_2}{k} \sin kt + \beta_3 \cos \omega t + \frac{\beta_4}{\omega} \sin \omega t + \mu\, [\ldots] \\
y(t) &= y_0(t) + p_1 \left(\beta_1 \cos kt + \frac{\beta_2}{k} \sin kt\right) + p_2 \left(\beta_3 \cos \omega t + \frac{\beta_4}{\omega} \sin \omega t\right) + \mu\, [\ldots]
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Начальные условия (1.1) примут вид

$$
\begin{aligned}
x(0) &= x_0(0) + \beta_1 + \beta_3, \qquad & y(0) &= y_0(0) + p_1\beta_1 + p_2\beta_3 \\
\dot{x}(0) &= \dot{x}_0(0) + \beta_2 + \beta_4, \qquad & \dot{y}(0) &= \dot{y}_0(0) + p_1\beta_2 + p_2\beta_4
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

Как показано в работе [1] (стр. 119), две из величин β_i (их число равно числу произвольных постоянных, входящих в порождающее решение) являются аналитическими функциями двух других и параметра μ, обращающимися в нуль при $\mu = 0$. Здесь β_1 и β_2 являются независимыми величинами, а β_3 и β_4 — аналитическими функциями β_1, β_2 и μ. Действительно, запишем условия периодичности функций $x(t, \beta_i, \mu)$ и $\dot{x}(t, \beta_i, \mu)$ согласно (1.4) и (1.5)

$$
\begin{aligned}
\beta_3 (\cos 2\pi\omega - 1) + \frac{\beta_4}{\omega} \sin 2\pi\omega + \Theta_1 (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \mu) &= 0 \\
- \beta_3 \omega \sin 2\pi\omega + \beta_4 (\cos 2\pi\omega - 1) + \Theta_2 (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \mu) &= 0
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Функции Θ_1 и Θ_2 — некоторые аналитические функции β_1, β_2, β_3, β_4 и μ. Условия периодичности функций $y(t, \beta_i, \mu)$ и $\dot{y}(t, \beta_i, \mu)$ отличаются от условий (1.6) только множителем p_2. Уравнения (1.6) в силу $2(1 - \cos 2\pi\omega) \neq 0$ могут быть разрешены относительно β_3 и β_4 и дадут аналитические функции

$$
\beta_3 = \psi_1 (\beta_1, \beta_2, \mu), \qquad \beta_4 = \psi_2 (\beta_1, \beta_2, \mu)
$$

обращающиеся в нуль при $\mu = 0$.

Таким образом, решение (1.4) представляется рядами [3]

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_0(t) + \beta_1 \cos kt + \frac{\beta_2}{k} \sin kt + \psi_1 \cos \omega t + \frac{\psi_2}{\omega} \sin \omega t + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n(t) + \frac{\partial C_n(t)}{\partial A_0} \beta_1 + \frac{\partial C_n(t)}{\partial B_0} \beta_2 + \ldots \right] \mu^n \\
y(t) &= y_0(t) + p_1 \left(\beta_1 \cos kt + \frac{\beta_2}{k} \sin kt\right) + p_2 \left(\psi_1 \cos \omega t + \frac{\psi_2}{\omega} \sin \omega t\right) + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[H_n(t) + \frac{\partial H_n(t)}{\partial A_0} \beta_1 + \frac{\partial H_n(t)}{\partial B_0} \beta_2 + \ldots \right] \mu^n
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Функции $C_n(t)$ и $H_n(t)$ вычисляются так же, как в работе [2]

$$C_n(t) = C_n^{(1)}(t) + C_n^{(2)}(t), \qquad H_n(t) = p_1 C_n^{(1)}(t) + p_2 C_n^{(2)}(t)$$

где

$$C_n^{(1)}(1) = \frac{1}{\omega^2 - k^2}\int_0^t \left[\frac{d-k^2}{k} F_n(\tau) - \frac{b}{k}\Phi_n(\tau)\right]\sin k(t-\tau)\,d\tau$$

$$C_n^{(2)}(t) = -\frac{1}{\omega^2 - k^2}\int_0^t \left[\frac{d-\omega^2}{\omega} F_n(\tau) - \frac{b}{\omega}\Phi_n(\tau)\right]\sin \omega(t-\tau)\,d\tau \tag{1.8}$$

Здесь

$$F_n(t) = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d^{n-1}F}{d\mu^{n-1}}\right)_{\beta_i=\mu=0}, \qquad \Phi_n(t) = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d^{n-1}\Phi}{d\mu^{n-1}}\right)_{\beta_i=\mu=0}$$

Раскладывая $F_n(t)$ и $\Phi_n(t)$ в ряды Фурье и вычисляя интегралы в (1.8), легко показать, что $C_n^{(2)}(t)$ содержит слагаемыми периодическую функцию периода 2π и гармоники $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$ с некоторыми коэффициентами. Иными словами, $C_n^{(2)}(t)$ не является периодической функцией периода 2π, так как ω — нецелое число.

Решение (1.7) представляется в виде

$$x(t) = x_0(t) + x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t), \quad y(t) = y_0(t) + p_1 x^{(1)}(t) + p_2 x^{(2)}(t) \tag{1.9}$$

где

$$x^{(1)}(t) = \beta_1 \cos kt + \frac{\beta_2}{k}\sin kt + \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n^{(1)}(t) + \frac{\partial C_n^{(1)}(t)}{\partial A_0}\beta_1 + \frac{\partial C_n^{(1)}(t)}{\partial B_0}\beta_2 + \ldots\right]\mu^n$$

$$x^{(2)}(t) = \psi_1 \cos \omega t + \frac{\psi_2}{\omega}\sin \omega t + \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n^{(2)}(t) + \frac{\partial C_n^{(2)}(t)}{\partial A_0}\beta_1 + \frac{\partial C_n^{(2)}(t)}{\partial B_0}\beta_2 + \ldots\right]\mu^n \tag{1.10}$$

Чтобы решение (1.9) было периодическим периода 2π, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись условия периодичности функций $x^{(1)}(t)$ и $x^{(2)}(t)$:

$$x^{(1)}(2\pi) = \beta_1, \qquad \dot{x}^{(1)}(2\pi) = \beta_2 \tag{1.11}$$

$$x^{(2)}(2\pi) = \psi_1(\beta_1, \beta_2, \mu), \qquad \dot{x}^{(2)}(2\pi) = \psi_2(\beta_1, \beta_2, \mu) \tag{1.12}$$

Задача, таким образом, свелась к построению периодических функций $x^{(1)}(t)$ и $x^{(2)}(t)$ с периодом 2π.

2. Построение функции $x^{(1)}(t)$ аналогично построению периодического решения квазилинейной неавтономной системы с одной степенью свободы [3, 4]. При этом из условий периодичности (1.11) определяются амплитуды A_0 и B_0 порождающего решения и величины β_1 и β_2 в виде рядов по целым или дробным степеням μ в зависимости от кратности корней уравнений основных амплитуд $C_1^{(1)}(2\pi) = 0$, $\dot{C}_1^{(1)}(2\pi) = 0$.

3. Построение функции $x^{(2)}(t)$ осуществляется согласно (1.10), если определены величины ψ_1 и ψ_2. При этом в силу аналитичности ψ_1 и ψ_2 по β_1, β_2 и μ, а также в силу того, что дифференцирование по β_1 и β_2 можно заменить дифференцированием по A_0 и B_0, имеем

$$\psi_j(\beta_1, \beta_2, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\Psi_{jn} + \frac{\partial \Psi_{jn}}{\partial A_0}\beta_1 + \frac{\partial \Psi_{jn}}{\partial B_0}\beta_2 + \ldots\right]\mu^n \qquad (j = 1, 2) \tag{3.1}$$

Условия (1.12) периодичности функций $x^{(2)}(t)$ и $\dot{x}^{(2)}(t)$ служат для определения Ψ_{jn}

$$\Psi_{1n}(\cos 2\pi\omega - 1) + \frac{\Psi_{2n}}{\omega}\sin 2\pi\omega + C_n^{(2)}(2\pi) = 0$$

$$-\omega\Psi_{1n}\sin 2\pi\omega + \Psi_{2n}(\cos 2\pi\omega - 1) + \dot{C}_n^{(2)}(2\pi) = 0 \qquad (3.2)$$

Отсюда

$$\Psi_{1n} = \frac{1}{2}\left[C_n^{(2)}(2\pi) + \frac{\dot{C}_n^{(2)}(2\pi)}{\omega}\operatorname{ctg}\pi\omega\right], \qquad \Psi_{2n} = \frac{1}{2}\left[\dot{C}_n^{(2)}(2\pi) - \omega C_n^{(2)}(2\pi)\operatorname{ctg}\pi\omega\right]$$

Таким образом, Ψ_{1n} и Ψ_{2n} вычисляются при помощи формул (3.2) после того, как известны функции $C_n^{(2)}(t)$ и $\dot{C}_n^{(2)}(t)$. Зная Ψ_{1n} и Ψ_{2n}, определяем на основании (3.1) величины $\psi_j(\beta_1, \beta_2, \mu)$, а тем самым и функцию $x^{(2)}(t)$ при помощи второй формулы (1.10).

Для вычисления функций $C_n^{(1)}(t)$ и $C_n^{(2)}(t)$ необходимо знать $F_n(t)$ и $\Phi_n(t)$. Обозначим

$$C_n^{*(2)}(t) = C_n^{(2)}(t) + \Psi_{1n}\cos\omega t + \frac{\Psi_{2n}}{\omega}\sin\omega t$$

$$C_n^*(t) = C_n^{(1)}(t) + \dot{C}_n^{*(2)}(t), \quad H_n^*(t) = p_1 C_n^{(1)}(t) + p_2 \overset{*}{C}_n^{(2)}(t)$$

Проверкой устанавливаем, что функции $C_n^{*(2)}(t)$ — периодические периода 2π. Формулы для функций $F_n(t)$ и $\Phi_n(t)$ получаются из соответствующих формул работы [2] заменой $C_n(t)$, $\dot{C}_n(t)$, $H_n(t)$, $\dot{H}_n(t)$ на $C_n^*(t)$, $\dot{C}_n^*(t)$, $H_n^*(t)$, $\dot{H}_n^*(t)$.

4. Если величины β_1 и β_2 определяются рядами [3] по целым степеням параметра μ

$$\beta_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\mu^n, \qquad \beta_2 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\mu^n$$

то функции $x^{(1)}(t)$ и $x^{(2)}(t)$, а следовательно, и решение $x(t)$, $y(t)$ представляются рядами по целым степеням параметра μ

$$x^{(1)}(t) = \mu x_1^{(1)}(t) + \mu^2 x_2^{(1)}(t) + \ldots, \qquad x^{(2)}(t) = \mu x_1^{(2)}(t) + \mu^2 x_2^{(2)}(t) + \ldots$$

Приведем формулы для первых двух функций

$$x_1^{(1)}(t) = A_1\cos kt + \frac{B_1}{k}\sin kt + C_1^{(1)}(t)$$

$$x_2^{(1)}(t) = A_2\cos kt + \frac{B_2}{k}\sin kt + C_2^{(1)}(t) + \frac{\partial C_1^{(1)}(t)}{\partial A_0}A_1 + \frac{\partial C_1^{(1)}(t)}{\partial B_0}B_1 \text{ и т. п.}$$

$$x_1^{(2)}(t) = C_1^{*(2)}(t), \; x_2^{(2)}(t) = C_2^{*(2)}(t) + \frac{\partial C_1^{*(2)}(t)}{\partial A_0}A_1 + \frac{\partial C_1^{*(2)}(t)}{\partial B_0}B_1 \text{ и т. д.}$$

Если уравнения основных амплитуд имеют двукратные корни, то величины β_1 и β_2 ищутся в виде рядов по степеням μ и $\mu^{1/2}$. Функция $x^{(1)}(t)$ находится аналогично тому, как это сделано в работе [4], а $x^{(2)}(t)$ так, как указано в п.3.

Указанный способ построения периодических решений можно распространить на системы с n степенями свободы. Например, в случае одночастотных колебаний построение периодических решений периода 2π распадается на n отдельных задач последовательного определения периодических функций $x^{(1)}(t), \ldots, x^{(n)}(t)$. При этом задача построения $x^{(1)}(t)$ аналогична отысканию периодического решения для системы с одной степенью свободы, а остальные находятся способом п. 3.

Пример. Рассматривается система уравнений

$$\ddot{x} + y = \cos 2t + \mu(1 - x^2)\dot{x}, \qquad \ddot{y} - \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}y = -\frac{11}{4}\cos 2t + \mu\dot{y}$$

Фундаментальное уравнение имеет корни $\pm i$ и $\pm {}^1/_2 i$. Ищется субгармоническое решение системы. Имеем $p_1 = 1$, $p_2 = {}^1/_4$. Порождающее решение зависит от двух произвольных постоянных

$$x_0 = A_0 \cos t + B_0 \sin t, \qquad y_0 = A_0 \cos t + B_0 \sin t + \cos 2t$$

Уравнения основных амплитуд

$$A_0\left[3 + \frac{1}{4}(A_0^2 + B_0^2)\right] = 0, \qquad B_0\left[3 + \frac{1}{4}(A_0^2 + B_0^2)\right] = 0$$

имеют очевидное решение $A_0 = B_0 = 0$. Используя описанный выше прием построения периодических решений, получаем первое приближение

$$x(t) = \left[\frac{16}{9}\left(\frac{\pi}{3} - 1\right)\sin t + \frac{8}{5}\sin 2t\right]\mu$$

$$y(t) = \cos 2t + \left[\frac{16}{9}\left(\frac{\pi}{3} - 1\right)\sin t + \frac{16}{15}\sin 2t\right]\mu$$

Поступила 14 VI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1956.
2. Плотникова Г. В. О построении периодических решений неавтономной квазилинейной системы с двумя степенями свободы. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
3. Проскуряков А. П. Колебания квазилинейных неавтономных систем с одной степенью свободы вблизи резонанса. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
4. Плотникова Г. В. О построении периодических решений неавтономной квазилинейной системы с одной степенью свободы вблизи резонанса в случае двукратных корней уравнений основных амплитуд. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ, ОБЛАДАЮЩИХ ПЕРВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Ю. А. Архангельский

(Москва)

1. Рассмотрим квазилинейную автономную систему с n степенями свободы

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\ddot{x}_k + c_{ik}x_k) = \mu f_i(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, \mu) \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (1.1)$$

где функции f_i являются аналитическими функциями своих аргументов в некоторой области их изменения, величина μ — малым параметром, а все корни уравнения частот

$$\Delta(\omega^2) = | c_{ik} - \omega^2 a_{ik} | = 0$$

различными и соизмеримыми. Тогда решение порождающей системы

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\ddot{x}_k + c_{ik}x_k) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \qquad a_{ik} = a_{ki}, \qquad c_{ik} = c_{ki}$$

будет содержать все n частот $\omega_1, \ldots, \omega_n$ и будет периодическим с некоторым периодом T_0. Будем предполагать, что указанному решению порождающей системы отвечает периодическое с периодом $T_0 + \alpha$ (α исчезает при $\mu = 0$) решение (1.1); соответствующие этому периодическому решению начальные условия представим в виде [1, 2].

$$x_k(0) = \sum_{r=1}^{n} p_k^{(r)} (A_r + \beta_r), \qquad \dot{x}_k(0) = \sum_{r=2}^{n} p_k^{(r)} (B_r + \gamma_r)$$