

О ПЛОТНОСТИ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

В. В. Болотин (Москва)

В связи с изучением вибраций элементов конструкций в поле случайных сил, обладающих широким спектром [1], возникает следующая задача: найти число собственных частот конструкции, заключенных в заданном интервале. Такая задача для мембран и пластин рассматривалась Курантом [2]. Ниже эта задача решается для тонких упругих оболочек, колебания которых могут быть описаны при помощи уравнений для состояний с большим показателем изменчивости [3].

1. Рассмотрим тонкую упругую оболочку постоянной толщины h , отнесенную к ортогональным криволинейным координатам x_1, x_2 , совпадающим с линиями главной кривизны. Пусть R_1 и R_2 — радиусы кривизны срединной поверхности, E — модуль упругости, ρ — плотность материала, D — цилиндрическая жесткость, w — нормальный прогиб, φ — функция усилий в срединной поверхности, ω — частота колебаний. Уравнения для форм колебаний, обладающих достаточно высокими показателями изменчивости, имеют вид [3]

$$D\Delta\Delta w - \left(\frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right) - \rho h \omega^2 w = 0, \quad \frac{1}{Eh} \Delta\Delta \varphi + \left(\frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) = 0 \quad (1.1)$$

В уравнениях (1.1) не учитываются тангенциальные силы инерции, поэтому из этих уравнений можно найти лишь частоты преимущественно изгибных колебаний.

Асимптотическое решение уравнений (1.1) для прямоугольной (в обобщенном смысле) области со сторонами a_1 и a_2 , в пределах которой метрика срединной поверхности остается неизменной, получено в работах [3,4]; собственные частоты определяются по формуле

$$\omega^2 = \frac{D}{\rho h} \left[(k_1^2 + k_2^2)^2 + \frac{Eh}{DR_1^2} \frac{(k_1^2 \chi + k_2^2)^2}{(k_1^2 + k_2^2)^2} \right] \quad \left(\chi = \frac{R_1}{R_2} \right) \quad (1.2)$$

где волновые числа k_1 и k_2 определяются из решения системы уравнений

$$\begin{aligned} k_1 a_1 &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} u_{11}(k_1, k_2) + \operatorname{arc} \operatorname{tg} u_{12}(k_1, k_2) + m_1 \pi \\ k_2 a_2 &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} u_{21}(k_1, k_2) + \operatorname{arc} \operatorname{tg} u_{22}(k_1, k_2) + m_2 \pi \quad (m_1, m_2 = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $u_{\alpha\beta}$ — некоторые функции волновых чисел, зависящие от краевых условий; функции $\operatorname{arc} \operatorname{tg} u_{\alpha\beta}$ понимаются в смысле главных значений. Решение (1.2), (1.3) пригодно всюду, кроме области вырождения динамического краевого эффекта. Укажем [3,4], что для пластин и сферических оболочек динамический краевой эффект никогда не вырождается, а для круговой цилиндрической оболочки вырождается лишь при достаточно малых волновых числах

$$k_1^2 + k_2^2 \leq \left(\frac{Eh}{DR_1^2} \right)^{1/2}$$

При очень больших волновых числах ($k_1^2 + k_2^2 \sim h^{-2}$) исходные уравнения (1.1) становятся непригодными ввиду необходимости учета эффектов типа деформации сдвига и инерции вращения. Из формул (1.3) следуют более грубые оценки

$$k_1 a_1 = m_1 \pi + O(1), \quad k_2 a_2 = m_2 \pi + O(1) \quad (m_1, m_2 = 1, 2, \dots) \quad (1.4)$$

аналогичные известным оценкам Куранта [2] для частот собственных колебаний мембран и пластин. Существенно, что для оболочек оценки (1.4) справедливы лишь вне области вырождения краевого эффекта. Это становится понятным, если учесть, что с физической точки зрения вырождение означает сильное влияние условий на контуре на поведение форм колебаний во внутренней области.

Построим семейства кривых (1.3), соответствующих различным целым значениям m_1 и m_2 . Волновые числа определяются как координаты точек пересечения этих линий. Если оболочка по контуру оперта, то все $u_{\alpha\beta} = 0$. Получается сетка

прямых, параллельных осям координат и состоящей из ячеек размером $\Delta k_1 = \pi / a_1$ и $\Delta k_2 = \pi / a_2$ (в этом случае асимптотическое решение совпадает с точным). Вообще, из соотношений (1.3) следует, что изменение краевых условий не может сместить кривые более, чем на один размер ячейки. Это отражено в формулах (1.4).

2. Применим зависимости (1.2) и (1.4) для получения оценок плотности собственных частот. Используя идею Куранта [2], будем приближенно определять число частот $N(\Omega)$, больших заданного значения Ω , как отношение площади на плоскости k_1, k_2 , внутри которой имеет место неравенство $\omega(k_1, k_2) < \Omega$, к площади одной ячейки. Очевидно, что такой способ подсчета тем более надежен, чем большее число волновых чисел лежит в области S (фиг. 1), ограниченной кривой $\omega(k_1, k_2) = \Omega$. Итак, имеем формулу

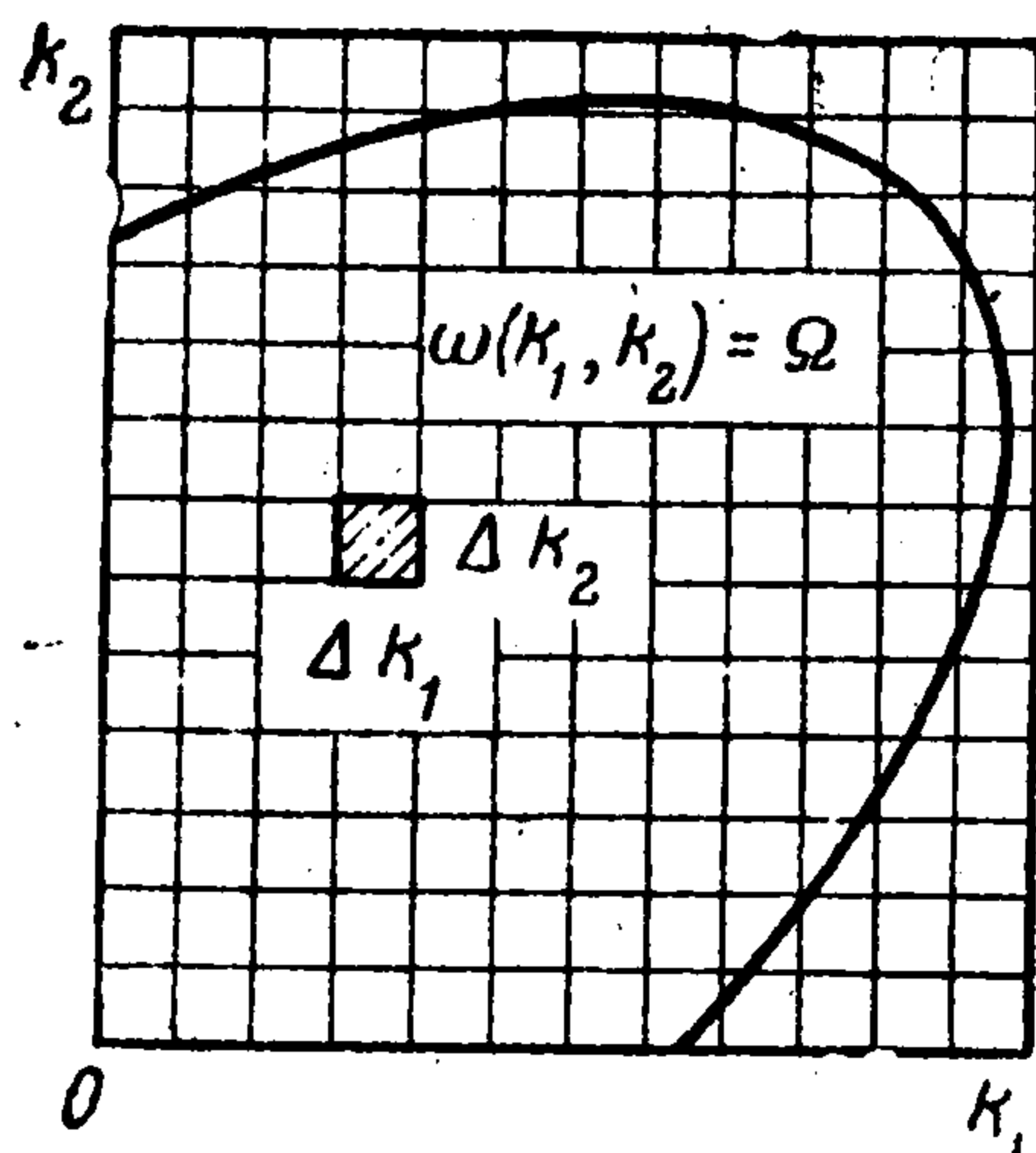
$$N(\Omega) \approx \frac{1}{\Delta k_1 \Delta k_2} \iint_S dk_1 dk_2 \quad (2.1)$$

Обозначая

$$k_1^2 + k_2^2 = r^2, \quad \frac{k_2}{k_1} = \operatorname{tg} \theta, \quad \frac{1}{R_1} \left(\frac{E}{\rho} \right)^{1/2} = \Omega_R \quad (2.2)$$

можем записать формулу (1.2) в виде

$$\omega^2 = \frac{D}{\rho h} r^4 + \Omega_R^2 (\chi \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2 \quad (2.3)$$



Фиг. 1

Отсюда после подстановки в формулу (2.1) и интегрирования по r получим

$$N(\Omega) \approx \frac{a_1 a_2}{2\pi^2} \left(\frac{\rho h}{D} \right)^{1/2} \int_{\theta_1(\Omega)}^{\theta_2(\Omega)} [\Omega^2 - \Omega_R^2 (\chi \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2]^{1/2} d\theta \quad (2.4)$$

Интегрирование по θ ведется по той части квадранта $0 \leq \theta \leq \pi/2$, внутри которой выражение под радикалом положительно. Дифференцируя выражение (2.4) по Ω , получим асимптотическую формулу для плотности частот

$$\frac{dN(\Omega)}{d\Omega} \approx \frac{a_1 a_2}{2\pi^2} \left(\frac{\rho h}{D} \right)^{1/2} \Omega \int_{\theta_1(\Omega)}^{\theta_2(\Omega)} \frac{d\theta}{[\Omega^2 - \Omega_R^2 (\chi \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2]^{1/2}} \quad (2.5)$$

Введем обозначения

$$H(\alpha, \chi) = \frac{2}{\pi} \int_{\theta_1(\alpha)}^{\theta_2(\alpha)} [1 - \alpha^2 (\chi \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2]^{1/2} d\theta$$

$$H_1(\alpha, \chi) = \frac{2}{\pi} \int_{\theta_1(\alpha)}^{\theta_2(\alpha)} \frac{d\theta}{[1 - \alpha^2 (\chi \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2]^{1/2}} \quad \left(\alpha = \frac{\Omega_R}{\Omega} \right) \quad (2.6)$$

Формулы (2.4) и (2.5) принимают вид

$$N(\Omega) \approx \frac{a_1 a_2}{4\pi} \left(\frac{\rho h}{D} \right)^{1/2} \Omega H\left(\frac{\Omega_R}{\Omega}, \chi\right), \quad \frac{dN(\Omega)}{d\Omega} \approx \frac{a_1 a_2}{4\pi} \left(\frac{\rho h}{D} \right)^{1/2} H_1\left(\frac{\Omega_R}{\Omega}, \chi\right) \quad (2.7)$$

3. Введем обозначения

$$\eta_{1,2} = \frac{1 \pm \alpha\chi}{\alpha(1 - \chi)}, \quad \zeta_1 = \sqrt{\frac{2\alpha(1 - \chi)}{(1 + \alpha)(1 - \alpha\chi)}}, \quad \zeta_2 = \sqrt{\frac{2\alpha(\chi - 1)}{(1 - \alpha)(1 + \alpha\chi)}}$$

Подстановкой $\sin^2 \theta = \xi$ приведем второй из интегралов (2.6) к виду

$$H_1(\alpha, \chi) = \frac{1}{\alpha\pi |1 - \chi|} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\xi}{[\xi(1 - \xi)(\eta_1 + \xi)(\eta_2 - \xi)]^{1/2}} \quad (3.1)$$

Интегрирование ведется по той части интервала $0 \leq \xi \leq 1$, внутри которого выражение под радикалом положительно.

При $\chi < 1$ возможны следующие четыре случая.

а) $\eta_1 > 0, \eta_2 > 1$. В этом случае $\xi_1 = 0, \xi_2 = 1$, и формула (3.1) принимает вид

$$H_1(\alpha, \chi) = \frac{2}{\pi \sqrt{(1+\alpha)(1-\alpha\chi)}} K(\xi_1) \quad (3.2)$$

где $K(\xi_1)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

б) $\eta_1 > 0, \eta_2 < 1$. В этом случае $\xi_1 = 0, \xi_2 = \eta_2$, и, следовательно,

$$H_1(\alpha, \chi) = \frac{\sqrt{2}}{\pi \sqrt{\alpha(1-\chi)}} K(\xi_1^{-1}) \quad (3.3)$$

в) $\eta_1 < 0, \eta_2 > 1$. Здесь $\xi_1 = -\eta_1, \xi_2 = 1$; после преобразований приходим к формуле (3.3).

г) $\eta_1 < 0, \eta_2 < 1$. При этом $\xi_1 = -\eta_1, \xi_2 = \eta_2$, и получаем формулу (3.2).

Пусть теперь $\chi > 1$. Здесь возможны два случая:

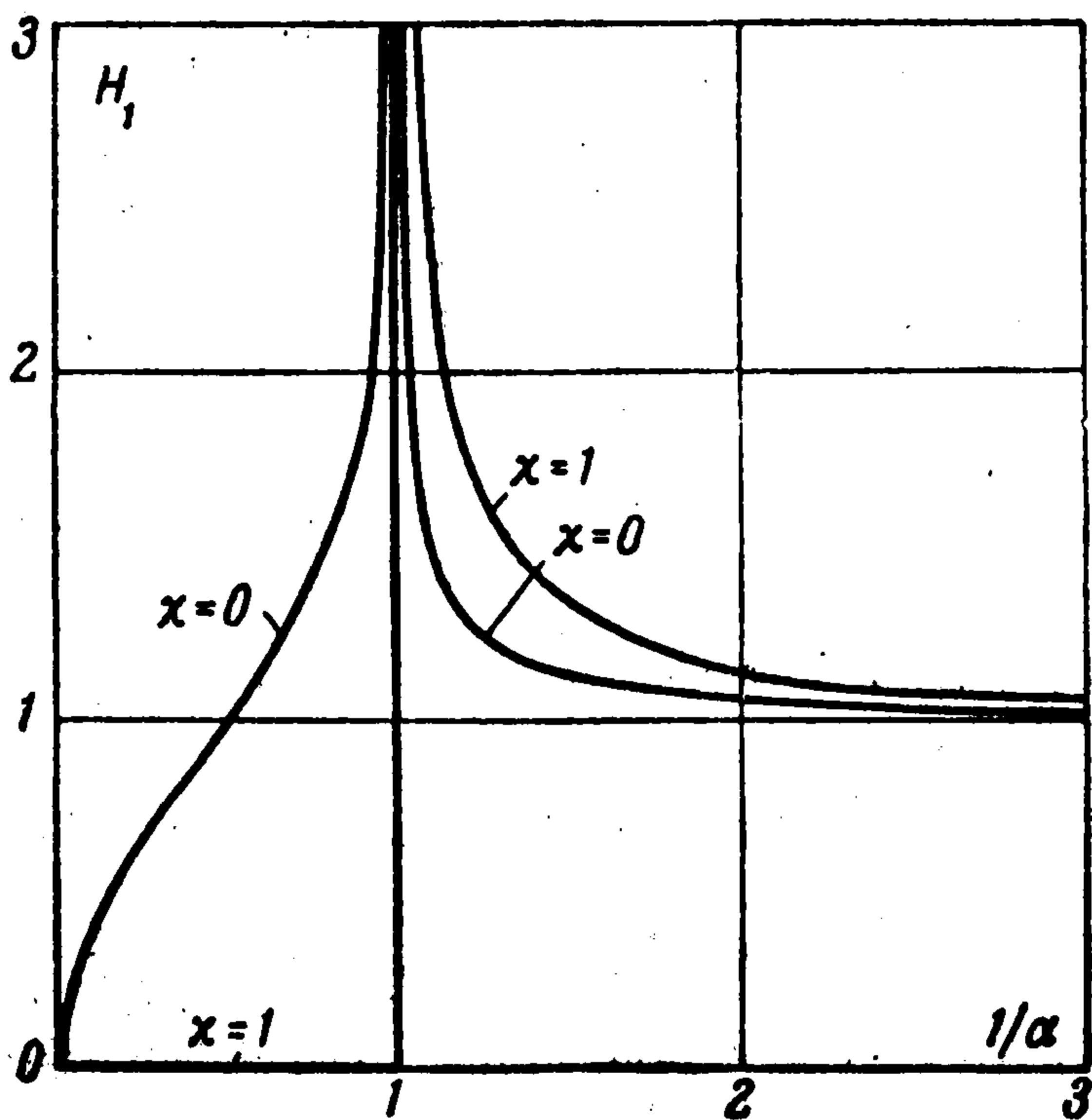
а) $\alpha\chi < 1$. Тогда $\xi_1 = 0, \xi_2 = 1$, и формула (3.1) дает

$$H_1(\alpha, \chi) = \frac{2}{\pi \sqrt{(1-\alpha)(1+\alpha\chi)}} K(\xi_2) \quad (3.4)$$

б) $\alpha\chi > 1$. Тогда $\xi_1 = \eta_1, \xi_2 = 1$, и, следовательно,

$$H_1(\alpha, \chi) = \frac{\sqrt{2}}{\pi \sqrt{\alpha(\chi-1)}} K(\xi_2^{-1}) \quad (3.5)$$

4. Заслуживают внимания два частных случая. Для сферической оболочки $\chi = 1$, и интегралы (2.6) непосредственно выражаются через элементарные функции



Фиг. 2

$$H_1(\alpha, 1) = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \quad (\alpha < 1), \quad H_1(\alpha, 1) = 0 \quad (\alpha > 1) \quad (4.1)$$

Плотность частот равна, таким образом, нулю при $\Omega < \Omega_R$, имеет особенность при $\Omega = \Omega_R$ (Ω_R в данном случае является минимальной частотой колебаний) и быстро приближается к плотности частот для соответствующей пластины при $\Omega \gg \Omega_R$.

В случае цилиндрической оболочки ($\chi = 0$) по формулам (3.2) и (3.3) найдем:

$$H_1(\alpha, 0) = \frac{2}{\pi \sqrt{1+\alpha}} K\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}\right) \quad (\alpha < 1) \quad (4.2)$$

$$H_1(\alpha, 0) = \frac{\sqrt{2}}{\pi \sqrt{\alpha}} K\left(\sqrt{\frac{1+\alpha}{2\alpha}}\right) \quad (\alpha > 1)$$

Результаты вычислений по формулам (4.1) и (4.2) приведены на фиг. 2.

Поступила 8 XII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Статистические методы в строительной механике. Стройиздат, 1961.
2. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1, Гостехиздат, 1951.
3. Болотин В. В. Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
4. Болотин В. В. Асимптотический метод исследования задач о собственных значениях для прямоугольных областей. АН СССР, Сб. Проблемы механики сплошной среды, 1961.