

Здесь ρ и ρ_0 — плотности, a — скорость звука, w — модуль скорости

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{w^2}{a_*^2}\right)^\beta \quad \left(\beta = \frac{1}{k-1}\right)$$

$$a^2 = \frac{1}{2} [(k+1) a_*^2 - (k-1) w^2]$$

$$w^2 = \varphi_x^2 + \varphi_r^2, \quad w^2 \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{w^2}{a_*^2}\right)^{2\beta} = \frac{\psi_x^2 + \psi_r^2}{r^2}$$

а связь функции тока с потенциалом скоростей дается соотношениями

$$\psi_r = \left(1 - \frac{\varphi_x^2 + \varphi_r^2}{\beta (k+1) a_*^2}\right)^\beta \varphi_x, \quad \psi_x = - \left(1 - \frac{\psi_x^2 + \psi_r^2}{\beta (k+1) a_*^2}\right)^\beta \varphi_r$$

Учитывая эти соотношения, уравнение для функции тока можно представить в виде

$$R(\psi) = [b + f_1(\psi_x, \psi_r)] \psi_{xx} + [b + f_2(\psi_x, \psi_r)] \psi_{rr} + \\ + \frac{2}{r^2} \psi_x \psi_r \psi_{xr} + [b + f_3(\psi_x, \psi_r)] \frac{\psi_r}{r} = 0 \quad (b > 0)$$

Здесь f_1, f_2, f_3 — известные функции, обращающиеся в нуль при $\psi_x = \psi_r = 0$.

Из этого выражения непосредственно вытекает применимость доказанной теоремы к функции тока.

Поступила 12 XII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. II, М.—Л., Гостехиздат, 1948.
2. Чаплыгин С. А. О газовых струях. Собр. соч., т. 2, М.—Л., Гостехиздат, 1948.

БОКОВЫЕ ВОЛНЫ В ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ СРЕДАХ

Л. Я. Косачевский (Донецк)

Вычисляются потенциалы боковых волн, возникающих при отражении сферической звуковой волны от плоской границы раздела жидкости и двухкомпонентной среды, состоящей из упругой и жидкой компонент (влажная почва, пористые звукопоглощающие материалы, пульпа и т. п.). Размеры пор и твердых частиц предполагаются малыми по сравнению с расстоянием, на котором существенно изменяются кинематические и динамические характеристики движения так, что обе компоненты среды можно считать сплошными. Динамика такой среды рассматривалась в ряде работ [1-4]. В статье [5] было показано, что в случае гармонических волн уравнения [2] являются наиболее общими. Эти уравнения и используются в настоящей заметке в качестве исходных. Двухкомпонентная среда предполагается однородной и изотропной.

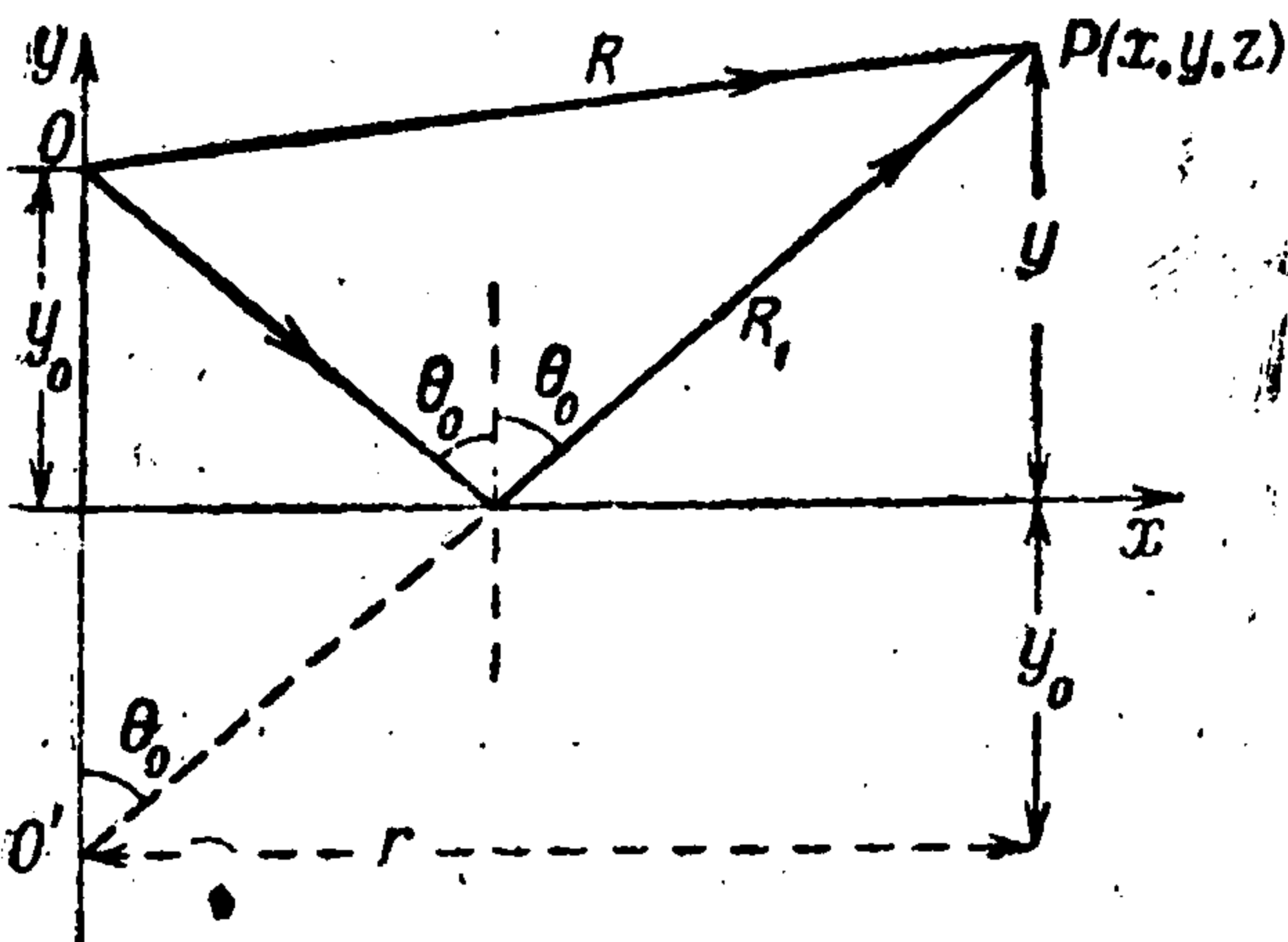
Пусть в жидкости на расстоянии y_0 от границы раздела находится точечный излучатель O звуковой волны (фиг. 1). Потенциал отраженной волны имеет вид [6]

$$\varphi = \frac{ik_0}{2} \int_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2-i\infty} H_0^{(1)}(u) \exp[ik_0(y+y_0)\cos\theta] W(\theta) \sin\theta d\theta \quad (u = k_0 r \sin\theta) \quad (1)$$

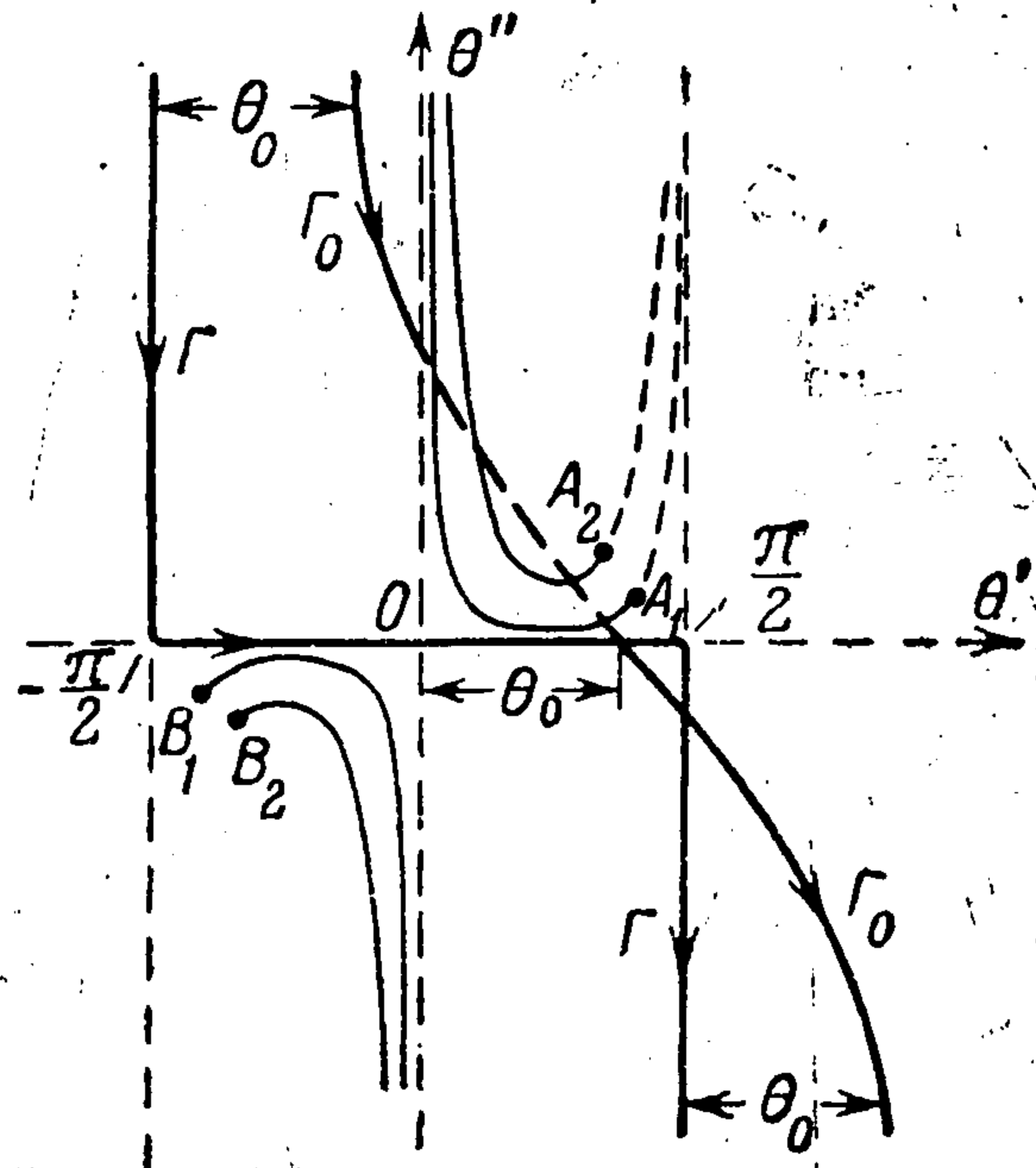
Здесь k_0 — модуль волнового вектора в жидкости, $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода нулевого индекса, $W(\theta)$ — коэффициент отражения плоской волны, падающей на границу под углом θ . При $\theta = 0$ этот коэффициент равен [7]

$$W = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}, \quad \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \quad (2)$$

Здесь $Z_0 = \rho_0 c_0$ — импеданс «верхней» жидкой среды (ρ_0 и c_0 — соответственно плотность и скорость звука в жидкости); $Z_1 = \rho_1 c_1$ и $Z_2 = \rho_2 c_2$ — «эффективные» импедансы упругой и жидкой компонент «нижней» среды; c_1 и c_2 — скорости продольных волн первого и второго типов, а коэффициенты ρ_1 и ρ_2 , зависящие от пористости, плотностей и упругих параметров обеих компонент «нижней» среды, можно трактовать как некоторые «эффективные» плотности этих компонент. Если пренебречь



Фиг. 1



Фиг. 2

сдвиговыми волнами, формулы (2) остаются в силе и при наклонном падении, только теперь

$$Z_0 = \rho_0 c_0 \sec \theta, \quad Z_1 = \rho_1 c_1 \sec \theta_1, \quad Z_2 = \rho_2 c_2 \sec \theta_2 \quad (3)$$

Учитывая соотношения

$$\frac{\sin \theta}{c_0} = \frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2}$$

представим выражение (2) для $W(\theta)$ в виде

$$W(\theta) = \frac{\cos \theta - m_1 \sqrt{n_1^2 - \sin^2 \theta} - m_2 \sqrt{n_2^2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + m_1 \sqrt{n_1^2 - \sin^2 \theta} + m_2 \sqrt{n_2^2 - \sin^2 \theta}} \quad (4)$$

Здесь

$$n_1 = c_0 / c_1, \quad n_2 = c_0 / c_2, \quad m_1 = \rho_0 / \rho_1, \quad m_2 = \rho_0 / \rho_2$$

Для получения потенциала отраженной сферической волны на больших по сравнению с длиной волны расстояниях пользуются асимптотическим представлением функции Ханкеля

$$H_0^{(1)}(u) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \exp \left[i \left(u - \frac{\pi}{4} \right) \right] \left(1 + \frac{1}{8iu} \right) \quad (5)$$

Подставляя (5) в (1) и учитывая, что

$$y + y_0 = R_1 \cos \theta_0, \quad r = R_1 \sin \theta_0$$

получим

$$\varphi = \left(\frac{k_0}{2\pi r} \right)^{1/2} \exp \frac{i\pi}{4} \int_{\Gamma} \exp [ik_0 R_1 \cos(\theta - \theta_0)] \left(1 + \frac{1}{8ik_0 r \sin \theta} \right) W(\theta) \sqrt{\sin \theta} d\theta \quad (6)$$

где через Γ обозначен путь интегрирования, идущий от точки $-\pi/2 + i\infty$ в точку $\pi/2 - i\infty$ (фиг. 2). Интеграл (6) легко оценивается методом перевала [6]. «Перевальный путь» Γ_0 проходит через точку перевала θ_0 и уходит от нее по линии

$$\operatorname{Im} i \cos(\theta - \theta_0) = \cos(\theta' - \theta_0) \operatorname{ch} \theta'' = 1, \quad \theta = \theta' + i\theta''$$

Этот путь пересекает вещественную ось в точке θ_0 под углом 45° и уходит, с одной стороны, в $-\pi/2 + \theta_0 + i\infty$, а с другой, — в $\pi/2 + \theta_0 - i\infty$. Функция $W(\theta)$ содержит корни $\sqrt{n_1^2 - \sin^2 \theta}$ и $\sqrt{n_2^2 - \sin^2 \theta}$, вследствие чего точки $\theta = \pm \arcsin n_1$ и $\theta = \pm \arcsin n_2$ будут точками ветвления.

Проведем разрезы комплексной плоскости по линиям

$$n_1^2 - \sin^2 \theta = x_1^2, \quad n_2^2 - \sin^2 \theta = x_2^2$$

Здесь x_1^2 и x_2^2 — вещественные положительные величины, изменяющиеся в пределах $(0, \infty)$. Значения $x_1 = 0$ соответствуют точкам ветвления. При $x_1^2 \rightarrow \infty$, $x_2^2 \rightarrow \infty$ имеем для обоих разрезов $\sin \theta \rightarrow \pm i\infty$; отсюда следует, что $\theta' \rightarrow 0$, $\theta'' \rightarrow \pm \infty$. На фиг. 2 показаны эти разрезы (A_1, B_1 и A_2, B_2 — соответственно точки ветвления первого и второго корней). Если точки A_1 и A_2 находятся между Γ и Γ_0 , интеграл по Γ будет равен интегралу по Γ_0 плюс интегралы по берегам указанных разрезов. В результате полное выражение для отраженной волны будет состоять из трех частей

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2$$

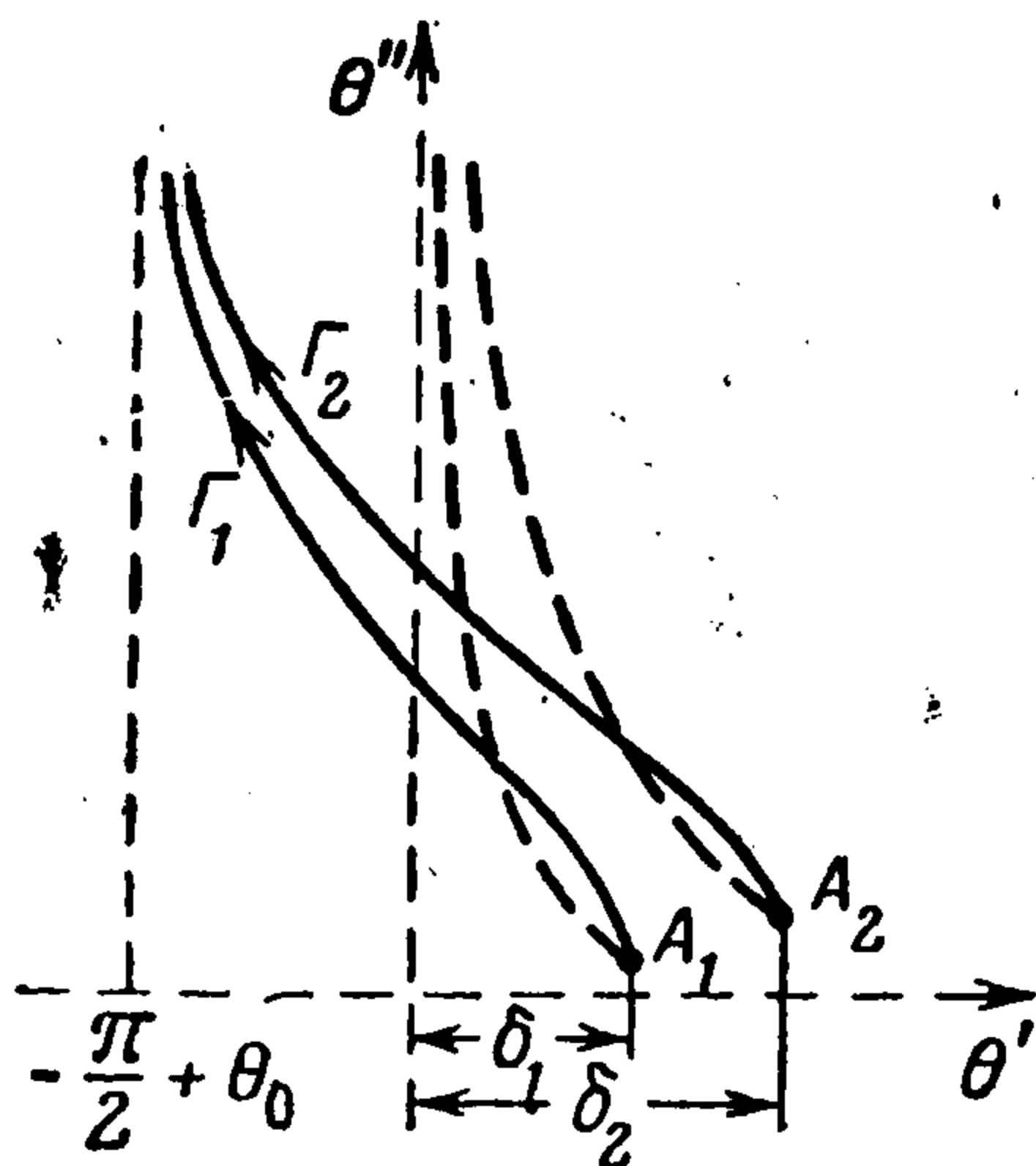
где φ_0 — собственно отраженная волна, φ_1 и φ_2 — первая и вторая боковые волны. Например, в случае, когда мнимые части n_1 и n_2 исчезающе малы, а вещественные меньше единицы, для такого расположения точек A_1 и A_2 будем иметь

$$\theta_0 > \delta_1 = \arcsin n_1, \quad \theta_0 > \delta_2 = \arcsin n_2$$

Таким образом, θ_0 должно быть больше углов полного внутреннего отражения продольных волн первого и второго типов.

Функция $W(\theta)$ имеет также в качестве особых точек полюсы, которые находятся из уравнения

$$\cos \theta + m_1 \sqrt{n_1^2 - \sin^2 \theta} + m_2 \sqrt{n_2^2 - \sin^2 \theta} = 0$$



Фиг. 3

Если эти точки лежат между Γ и Γ_0 , выражение для потенциала отраженной волны будет содержать, помимо вышеуказанных частей φ_0 , φ_1 и φ_2 , члены, соответствующие вычетам подынтегральной функции в полюсах. Этот вопрос здесь не рассматривается.

Вычисление интеграла по Γ_0 дает [6]

$$\varphi_0 = \frac{\exp(ik_0 R_1)}{R_1} \left[W(\theta_0) - \frac{iN}{k_0 R_1} \right], \quad N = \frac{1}{2} [W''(\theta_0) + W'(\theta_0) \operatorname{ctg} \theta_0]$$

Здесь $W'(\theta_0)$ и $W''(\theta_0)$ — производные коэффициента отражения по углу θ , взятые в точке $\theta = \theta_0$.

Пренебрегая в (6) величиной $1/8k_0 r \sin \theta$ по сравнению с единицей, получаем

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & \left(\frac{k_0}{2\pi r} \right)^{1/2} \exp \frac{i\pi}{4} \left(\int_{i\infty}^{A_1} \exp [ik_0 R_1 \cos(\theta - \theta_0)] W(\theta) \sqrt{\sin \theta} d\theta + \right. \\ & \left. + \int_{A_1}^{i\infty} \exp [ik_0 R_1 \cos(\theta - \theta_0)] W^+(\theta) \sqrt{\sin \theta} d\theta \right) \end{aligned}$$

Здесь $W(\theta)$ — значение коэффициента отражения на левом берегу разреза, $W^+(\theta)$ — на правом. Эти значения отличаются знаком корня $\sqrt{n_1^2 - \sin^2 \theta}$. Меняя местами пределы интегрирования в первом интеграле, сводим оба интеграла к одному

$$\varphi_1 = \left(\frac{k_0}{2\pi r} \right)^{1/2} \exp \frac{i\pi}{4} \int_{A_1}^{i\infty} \exp [ik_0 R_1 \cos(\theta - \theta_0)] \Phi_1(\theta) \sqrt{\sin \theta} d\theta \quad (7)$$

$$\Phi_1(\theta) = W^+(\theta) - W(\theta) = \frac{4m_1 \cos \theta \sqrt{n_1^2 - \sin^2 \theta}}{(\cos \theta + m_2 \sqrt{n_2^2 - \sin^2 \theta})^2 - m_1^2 (n_1^2 - \sin^2 \theta)}$$

Интеграл (7) вычисляется при помощи метода быстрейшего спуска [6]; путь интегрирования деформируем так, чтобы от точки A_1 он шел по линии, на которой экс-

попенента под интегралом быстрее всего спадает. Это будет линия, где

$$\operatorname{Re} \cos (\theta - \theta_0) = \operatorname{const} \quad (8)$$

При этом необходимо, чтобы

$$\operatorname{Im} \cos (\theta - \theta_0) > 0 \quad (9)$$

Будем предполагать, что n_1 — вещественная величина. Так как в точке A_1 угол $\theta = \delta_1 = \arcsin n_1$, уравнение (8) принимает вид

$$\operatorname{Re} \cos (\theta - \theta_0) = \cos (\delta_1 - \theta_0) \quad \text{или} \quad \cos (\theta_0 - \theta') \operatorname{ch} \theta'' = \cos (\delta_1 - \theta_0)$$

На этом пути интегрирования (обозначим его через Γ_1) выполняется также условие (9). Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \left(\frac{k_0}{2\pi r} \right)^{1/2} \exp \left[ik_0 R_1 \cos (\delta_1 - \theta_0) + \frac{i\pi}{4} \right] \times \\ &\times \int_{\Gamma_1} \Phi_1 (\theta) \exp [-k_0 R_1 \sin (\theta_0 - \theta') \operatorname{sh} \theta''] \sqrt{\sin \theta} d\theta \end{aligned}$$

Так как Γ_1 — это путь быстрого спада, значение интеграла в основном определяется начальным участком пути. Поэтому можно под интегралом положить $\theta' = \delta_1$, а θ'' — считать малым. Учитывая, что при этом

$$\Phi_1 (\theta) = - \frac{4m_1 \cos \delta_1 \sqrt{-2in_1 \cos \delta_1}}{(\cos \delta_1 + m_2 \sqrt{n_2^2 - n_1^2})^2} \sqrt{\theta''}$$

получаем

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= -4m_1 \left(\frac{k_0}{\pi r} \right)^{1/2} \exp [ik_0 R_1 \cos (\delta_1 - \theta_0)] \frac{n_1}{\sqrt{\cos \delta_1 [1 + m_2 \sqrt{(n_2^2 - n_1^2) / (1 - n_1^2)}]^2}} \times \\ &\times \int_0^\infty \exp [-\theta'' k_0 R_1 \sin (\theta_0 - \delta_1)] \sqrt{\theta''} i d\theta'' \end{aligned}$$

или окончательно

$$\Phi_1 = - \frac{2im_1 n_1 \exp [ik_0 R_1 \cos (\delta_1 - \theta_0)]}{k_0 \sqrt{r} \cos \delta_1 [1 + m_2 \sqrt{(n_2^2 - n_1^2) / (1 - n_1^2)}]^2 [R_1 \sin (\theta_0 - \delta_1)]^{3/2}} \quad (10)$$

Аналогично находится выражение для потенциала второй боковой волны

$$\Phi_2 = - \frac{2im_2 n_2 \exp [ik_0 R_1 \cos (\delta_2 - \theta_0)]}{k_0 \sqrt{r} \cos \delta_2 [1 + m_1 \sqrt{(n_1^2 - n_2^2) / (1 - n_2^2)}]^2 [R_1 \sin (\theta_0 - \delta_2)]^{3/2}} \quad (11)$$

В предельных случаях исчезающей пористости и пористости, стремящейся к единице, будем иметь [7] соответственно

$$m_1 = \rho_0 / \rho_s, \quad m_2 = 0, \quad m_1 = 0, \quad m_2 = \rho_0 / \rho_f$$

где ρ_s и ρ_f — истинные плотности упругой и жидкой компонент среды. При этом формулы (10) и (11) совпадут с известным выражением для потенциала боковой волны, возникающей на границе раздела двух сплошных сред.

Автор благодарит В. Л. Германа за предложение темы и внимание к работе.

Поступила 5 IX 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Френкель Я. И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве. Изв. АН СССР, серия географ. и геофиз., 1944, т. 8, № 4.
2. Viot M. A. Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid — Saturated Porous Solid. J. Acoust. Soc. Am., 1956, vol. 28, № 2.
3. Цвиккер К. и Костен К. Звукопоглощающие материалы. ИЛ, 1952.
4. Рахматулин Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред. ПММ, 1956, т. 20, вып. 2.
5. Косачевский Л. Я. О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах. ПММ, 1959, т. 23, вып. 6.
6. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. АН СССР, 1957.
7. Косачевский Л. Я. Об отражении звуковых волн от слоистых двухкомпонентных сред. ПММ, 1961, 25, вып. 6.