ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕЧЕНИЯМ ГАЗА

Д. Б. Кикин

(Москва)

При изучении и расчете течений сжимаемой и несжимаемой жидкости большое значение может иметь предварительное рассмотрение экстремальных свойств решений дифференциальных уравнений поставленной задачи с присоединенными или неприсоединенными краевыми условиями. При этом могут быть получены многие важные факты, как, например, теоремы о достижении экстремальных значений для возмущений установившихся потенциальных потоков непосредственно на контурах обтекаемых тел. С другой стороны, зная экстремальные свойства решений, в ряде случаев можно развить простые быстро сходящиеся расчетные методы.

Во многих случаях исследование экстремальных свойств решений может быть проведено исходя непосредственно из свойств дифференциальных уравнений.

Ниже приводится теорема об экстремальных свойствах определенного класса уравнений второго порядка и указывается ее приложение к газовой динамике.

Теорема. Если дифференциальный оператор

$$L(u) = \Phi(x, y, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$$

таков, что применение его к любой дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x, y)$ в точке ее максимума N_0 и некоторой окрестности этой точки дает величину неположительную и $\Phi_{u_{xx}}(N_0) > 0$, или $\Phi_{u_{yy}}(N_0) > 0$, что решение $u(x, y)$ уравнения $L(u) = 0$ не может принимать максимальное значение в этой точке и некоторой ее окрестности.

От функции Φ потребуем, чтобы она была непрерывной и непрерывно дифференцируемой по u, u_x, u_{xx} или u, u_y, u_{yy} в некоторой области изменения своих аргументов.

В том случае, если применение оператора к дважды непрерывно дифференцируемой функции в точке ее минимума дает неотрицательную величину и предыдущие требования выполняются, то заключение теоремы переходит в утверждение невозможности достижения минимума решением уравнения $L(u) = 0$.

Доказательство. Предположим, что решение $u(x, y)$ уравнения $L(u) = 0$ достигает максимума в некоторой точке $N_0(x_0, y_0)$, в которой условия теоремы выполняются. Выберем окрестность G точки N_0 такую, что в ней также будут выполняться указанные требования, и введем функцию

$$u^*(x, y) = u(x, y) + k(x - x_0)^2 \qquad (k > 0)$$

которая при достаточно малом k также будет достигать максимума в некоторой точке $N_1(x_1, y_1)$ выбранной окрестности. Достаточно взять

$$k < \frac{|M| - |m|}{\delta^2}$$

где $M = u(N_0)$, $m = \sup u(N)$ на границе Γ окрестности G точки N_0, при этом δ — диаметр окрестности G.

Применение к функции u^* оператора L в точке N_1 по условию должно дать величину неположительную

$$L[u^*(N_1)] \leqslant 0$$

с другой стороны

$$L[u^*(N_1)] = \Phi(x_1, y_1, u_1 + k(x_1 - x_0)^2, u_{x_1} + 2k(x_1 - x_0), u_{y_1}, u_{xy_1}, u_{yy_1}, u_{xx} + 2k)$$

В силу условий теоремы к правой части можно применить теорему Лагранжа о среднем (считая $\Phi_{u_{xx}}(N_0) > 0$ и Φ непрерывно дифференцируемой по u, u_x, u_{xx}).

В результате получим

$$L\,[u^*(N_1)] = \Phi\,(x_1, y_1, u_1, u_{x_1}, u_{y_1}, u_{xy_1}, u_{yy_1}, u_{xx_1}) +$$
$$+ \Phi_u\,(x_1, y_1, u_1 + \theta k\,(x_1 - x_0)^2,\quad u_{x_1} + 2\theta k\,(x_1 - x_0),\ u_{y_1}, u_{xy_1}, u_{yy_1}, u_{xx_1} + 2\theta k) \times$$
$$\times\, k\,(x_1 - x_0)^2 +$$
$$+ \Phi_{u_x}(x_1, y_1, u_1 + \theta k\,(x_1 - x_0)^2,\ u_{x_1} + 2\theta k\,(x_1 - x_0),\ u_{y_1}, u_{xy_1}, u_{yy_1}, u_{xx_1} + 2\theta k) \times$$
$$\times\, 2K\,(x_1 - x_0) +$$
$$+ \Phi_{u_{xx}}(x_1, y_1, u_1 + \theta k\,(x_1 - x_0)^2,\ u_{x_1} + 2\theta k\,(x_1 - x_0),\ u_{y_1}, u_{xy_1}, u_{yy_1}, u_{xx_1} + 2\theta k)\,2k$$
$$(0 < \theta < 1)$$

Первый член правой части равен нулю, так как $u\,(x, y)$ — решение уравнения $L\,(u) = \Phi\,(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{yy}, u_{xx}) = 0$. Следующие два члена имеют более высокий порядок малости, чем последний. При стягивании окрестности G к точке N_0 $x_1 \to x_0$, $y_1 \to y_0$. В силу теоремы $\Phi u_{xx} > 0$ в точке N_0 и все выражение становится положительным. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Вместо функции $u^*(x, y) = u\,(x, y) + k\,(x - x_0)^2$ можно взять функцию $u^{**}(x, y) = u\,(x, y) + k\,(y - y_0)^2$, что может привести к решению вопроса, если определить знак $\Phi u_{xx}(N_0)$ затруднительно или невозможно. При этом необходимо будет потребовать непрерывной дифференцируемости Φ по u, u_y, u_{yy}.

Для доказательства второй части теоремы о минимуме достаточно ввести к рассмотрению функцию

$$u^{***} = u\,(x, y) - k\,(x - x_0)^2$$

Применим полученные результаты к уравнениям движения газа (см., например, [1]). Требованиям теоремы удовлетворяют, например, уравнения для потенциала скорости φ плоских, осесимметричных и пространственных течений газа, которые соответственно имеют вид

$$p\,(\varphi) = [(k + 1)\,(a_*^2 - \varphi_x^2) - (k - 1)\,\varphi_y^2]\,\varphi_{xx} +$$
$$+ [(k + 1)\,(a_*^2 - \varphi_y^2) - (k - 1)\,\varphi_x^2]\,\varphi_{yy} - 4\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} = 0 \qquad (1)$$

(x, y — декартовы координаты)

$$Q\,(\varphi) = [(k + 1)\,(a_*^2 - \varphi_x^2) - (k - 1)\,\varphi_r^2]\,\varphi_{xx} +$$
$$+ [(k + 1)\,(a_*^2 - \varphi_r^2) - (k - 1)\,\varphi_x^2]\,\varphi_{rr} - 4\varphi_x\varphi_r\varphi_{xr} +$$
$$+ [(k + 1)\,a_*^2 - (k - 1)\,(\varphi_x^2 + \varphi_r^2)]\,\frac{\varphi_r}{r} = 0 \qquad (2)$$

(x, z — цилиндрические координаты)

$$R\,(\varphi) = [(k + 1)\,(a_*^2 - \varphi_x^2) - (k - 1)\,(\varphi_y^2 + \varphi_z^2)]\,\varphi_{xx} +$$
$$+ [(k + 1)\,(a_*^2 - \varphi_y^2) - (k - 1)\,(\varphi_z^2 + \varphi_x^2)]\,\varphi_{yy} +$$
$$+ [(k + 1)\,(a_*^2 - \varphi_z^2) - (k - 1)\,(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)]\,\varphi_{zz} -$$
$$- 4\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} - 4\varphi_y\varphi_z\varphi_{yz} - 4\varphi_z\varphi_x\varphi_{zx} = 0 \qquad (3)$$

(x, y, z — декартовы координаты)

Здесь a_* — критическая скорость, k — показатель адиабаты.

Для перечисленных случаев роль одной из дважды непрерывно дифференцируемых функций $f\,(x, y)$ играет само решение уравнений — потенциал скорости. Отсюда следует, что их решения не достигают максимумов и минимумов в области течения.

Для плоских течений газа этот результат другим методом был получен Чаплыгиным [2]. Это же заключение оказывается справедливым и для функции тока плоского и осесимметричного течений. Например, функция тока ψ осесимметричного сечения удовлетворяет уравнению

$$R\,(\psi) = \left[\left(\frac{\rho a}{\rho_0}\right)^2 - \frac{\psi_r^2}{r^2}\right]\psi_{xx} + \left[\left(\frac{\rho a}{\rho_0}\right)^2 - \frac{\psi_x}{r^2}\right]\psi_{rr} + \frac{2}{r^2}\,\psi_x\psi_r\psi_{xr} - \left(\frac{\rho a}{\rho_0}\right)^2\frac{\psi_r}{r} = 0$$

Здесь ρ и ρ_0 — плотности, a — скорость звука, w — модуль скорости

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\left(1-\frac{k-1}{k+1}\frac{w^2}{a_*^2}\right)^\beta \qquad \left(\beta=\frac{1}{k-1}\right)$$

$$a^2=\frac{1}{2}\left[(k+1)a_*^2-(k-1)w^2\right.$$

$$w^2=\varphi_x^2+\varphi_r^2, \qquad w^2\left(1-\frac{k-1}{k+1}\frac{w^2}{a_*^2}\right)^{2\beta}=\frac{\psi_x^2+\psi_r^2}{r^2}$$

а связь функции тока с потенциалом скоростей дается соотношениями

$$\psi_r=\left(1-\frac{\varphi_x^2+\varphi_r^2}{\beta(k+1)a_*^2}\right)^\beta\varphi_x, \qquad \psi_x=-\left(1-\frac{\psi_x^2+\varphi_r^2}{\beta(k+1)a_*^2}\right)^\beta\varphi_r$$

Учитывая эти соотношения, уравнение для функции тока можно представить в виде

$$R(\psi)=[b+f_1(\psi_x,\psi_r)]\,\psi_{xx}+[b+f_2(\psi_x,\psi_r)]\,\psi_{rr}+$$
$$+\frac{2}{r^2}\psi_x\psi_r\psi_{xr}+[b+f_3(\psi_x,\psi_r)]\,\frac{\psi_r}{r}=0 \qquad (b>0)$$

Здесь f_1, f_2, f_3 — известные функции, обращающиеся в нуль при $\psi_x=\psi_r=0$. Из этого выражения непосредственно вытекает применимость доказанной теоремы к функции тока.

Поступила 12 XII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. II, М.— Л., Гостехиздат, 1948.
2. Чаплыгин С. А. О газовых струях. Собр. соч., т. 2, М.—Л., Гостехиздат, 1948.

БОКОВЫЕ ВОЛНЫ В ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ СРЕДАХ

Л. Я. Косачевский (Донецк)

Вычисляются потенциалы боковых волн, возникающих при отражении сферической звуковой волны от плоской границы раздела жидкости и двухкомпонентной среды, состоящей из упругой и жидкой компонент (влажная почва, пористые звукопоглощающие материалы, пульпа и т. п.). Размеры пор и твердых частиц предполагаются малыми по сравнению с расстоянием, на котором существенно изменяются кинематические и динамические характеристики движения так, что обе компоненты среды можно считать сплошными. Динамика такой среды рассматривалась в ряде работ [1-4]. В статье [5] было показано, что в случае гармонических волн уравнения [2] являются наиболее общими. Эти уравнения и используются в настоящей заметке в качестве исходных. Двухкомпонентная среда предполагается однородной и изотропной.

Пусть в жидкости на расстоянии y_0 от границы раздела находится точечный излучатель O звуковой волны (фиг. 1). Потенциал отраженной волны имеет вид [6]

$$\varphi=\frac{ik_0}{2}\int\limits_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2-i\infty} H_0^{(1)}(u)\exp\left[ik_0(y+y_0)\cos\theta\right]W(\theta)\sin\theta\,d\theta \quad (u=k_0 r\sin\theta) \tag{1}$$

Здесь k_0 — модуль волнового вектора в жидкости, $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода нулевого индекса, $W(\theta)$ — коэффициент отражения плоской волны, падающей на границу под углом θ. При $\theta=0$ этот коэффициент равен [7]

$$W=\frac{Z-Z_0}{Z+Z_0}, \qquad \frac{1}{Z}=\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2} \tag{2}$$