РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ СОПРЯЖЕНИЯ СВЕДЕНИЕМ К ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА

Э. В. Скворцов, Б. Х. Фарзан, А. Я. Чилап (Казань)

Под задачей сопряжения в данной статье понимается задача нахождения в некоторой двумерной области D решения уравнения $\operatorname{div}(k \operatorname{grad} p) = 0$ при условии, что коэффициент k есть кусочно-непрерывная функция координат x, y. На границах γ разрыва коэффициента k должны выполняться условия сопряжения

$$p_+ = p_-, \qquad k_+ \left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_+ = k_- \left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_- \tag{I}$$

Здесь индексами минус и плюс обозначены предельные значения функций при подходе к границам γ разрыва, n — нормаль к γ. Искомая функция $p(x, y)$ имеет в области D особенности логарифмического типа и, если D имеет границу Γ, должна удовлетворять на Γ краевым условиям первого, второго или третьего рода.

Такого рода задача имеет многочисленные приложения. Например, в подземной гидромеханике функция p, удовлетворяющая поставленным выше условиям, определяет поле давлений в кусочно-неоднородном нефтяном пласте при водонапорном режиме его работы и линейном законе фильтрации; в теории электромагнетизма функция $\varphi = kp$ определяет поле электрического потенциала, образованного точечными зарядами в кусочно-неоднородном диэлектрике; в теории теплопроводности функция p дает статическое распределение температуры в кусочно-неоднородной теплопроводящей среде. Поставленная задача методом, изложенным в [1,2], сводится к сингулярному интегральному уравнению (системе уравнений) для нахождения искомой функции $p(x, y)$ на γ. В свою очередь, полученное уравнение на основании свойств интеграла типа Коши — Адамара [3] сводится к обобщенной задаче Римана [4], решение которой в ряде случаев легко провести. К числу конкретных задач сопряжения, рассмотренных в данной работе, относятся следующие.

1. Область D представляет собой всю плоскость. Граница γ — действительная ось. Она делит D на две подобласти: верхнюю полуплоскость D_+, в которой k принимает значение $k_1 = \text{const}$, и нижнюю полуплоскость D_-, в которой k принимает значение $k_2 = \text{const}$. Функция p в точке $A(x_0, y_0) \in D_+$ имеет логарифмическую особенность.

2. Область D — вся плоскость; граница γ — окружность единичного радиуса; D_+ — ее внутренность, где $k = k_1 = \text{const}$ и p имеет логарифмическую особенность в точке $A(r_0, \theta_0)$; D_- — ее внешность, где $k = k_2 = \text{const}$.

3. Область D — внутренность круга единичного радиуса; γ — диаметр этого круга, совпадающий с действительной осью. В области D_+ ($|z| \leqslant 1$, $\operatorname{Im} z > 0$, $z = x + iy$) коэффициент $k = k_1 = (b_1 y + c_1)^2$ и функция p имеют особенность в точке $A(x_0, y_0)$. В области D_- ($|z| \leqslant 1$, $\operatorname{Im} z < 0$) коэффициент $k = k_2 = (b_2 y + c_2)^2$. При $|z| = 1$ функция $p = 0$.

4. Область D — прямоугольник: $-a \leqslant x \leqslant \delta$, $-\beta \leqslant y \leqslant \beta$. Уравнение границы γ: $x = \alpha$. В области D_+ $(-a \leqslant x < \alpha, -\beta \leqslant y \leqslant \beta)$ коэффициент $k = k_1 = (a_1 + b_1 x + c_1 y)^2$ и $p(x, y)$ имеет особенность в точке $A(x_0, y_0)$. В области D_- $(\alpha < x \leqslant \delta, -\beta \leqslant y \leqslant \beta)$ коэффициент $k = k_2 = (a_2 + b_2 x + c_2 y)^2$. На границе D функция $p = 0$.

Хотя первые две из этих задач решены ранее другим методом, их включение в данную статью позволяет на этих простых примерах наиболее очевидно показать предлагаемый подход к решению задач сопряжения, а также убедиться в его правильности путем сравнения с ранее известным результатом.

Наконец, укажем, что задачи сопряжения часто встречаются во многих областях физики и механики, как то: в теории электромагнетизма, теплопроводности, подземной гидромеханике и других.

Остановимся сначала на первой из перечисленных четырех задач.

Будем искать функцию $p(x, y)$ в областях D_+, D_- соответственно в виде

$$p_+(x, y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(t)\frac{y\,dt}{(t-x)^2+y^2} + G \tag{2}$$

$$p_-(x, y) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(t)\frac{y\,dt}{(t-x)^2+y^2} \tag{3}$$

где $p(t)$ — значение искомой функции на действительной оси, которое пока неизвестно, G — функция Грина для верхней полуплоскости

$$G = \frac{Q}{4\pi k_1}\ln\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2} \tag{4}$$

Здесь Q — интенсивность источника в точке $A(x_0, y_0)$. При принятой форме решения первое из условий (1) удовлетворяется тождественно, а второе для нахождения $p(t)$ дает интегральное уравнение

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(t)\frac{dt}{(t-x)^2} = \frac{Q}{k_1+k_2}\,\frac{y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2} \tag{5}$$

Для его решения введем кусочно-аналитическую функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(t)\frac{dt}{t-z}$$

Предельные значения этой функции и ее производной имеют вид

$$\Phi^{\pm}(x) = \pm\frac{p(x)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{p(t)\,dt}{t-x}, \qquad \Phi'^{\pm}(x) = \pm\frac{p'(x)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{p(t)\,dt}{(t-x)^2} \tag{6}$$

Здесь интеграл в первой формуле понимается в смысле главного значения Коши, а во второй формуле в смысле Коши — Адамара. При помощи формул (6) уравнение (5) приводится к следующей задаче Римана:

$$\Phi'^{+}(x) + \Phi'^{-}(x) = \frac{Qy_0}{\pi i(k_1+k_2)}\,\frac{1}{(x-x_0)^2+y_0^2} \tag{7}$$

ли, вводя новую функцию $\Phi_1(z)$

$$\Phi_1^{+} - \Phi_1^{-} = \frac{Qy_0}{\pi i(k_1+k_2)}\,\frac{1}{(x-x_0)^2+y_0^2}$$

Это есть простейшая задача определения функции по скачку. Ее решение дается интегралом типа Коши

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{Qy_0\,dt}{\pi i(k_1+k_2)\,[(t-x_0)^2+y_0^2]\,(t-z)}$$

Обозначим плотность этого интеграла через $\varphi(t)$.

Пусть $\varphi(t) = \varphi^+(t) + \varphi^-(t)$, где $\varphi^+(t)$, $\varphi^-(t)$ — краевые значения функций, аналитических в D_+, D_-. Тогда на основании формулы Коши

$$\Phi_1^+(z) = \varphi^+(z) + \varphi^-(\infty), \qquad \Phi_1^-(z) = -\varphi^-(z) + \varphi^-(\infty)$$

Так как

$$\varphi(t) = \frac{Qy_0}{\pi i(k_1+k_2)}\,\frac{1}{(t-x_0)^2+y_0^2} = -\frac{Q}{2\pi i(k_1+k_2)}\left[\frac{i}{t-x_0-iy_0} - \frac{i}{t-x_0+iy_0}\right]$$

то

$$\Phi_1^+(z) = \frac{Q}{2\pi(k_1+k_2)}\,\frac{1}{z-\bar z_0}, \qquad \Phi_1^-(z) = \frac{Q}{2\pi(k_1+k_2)}\,\frac{1}{z-z_0}$$

и, так как $\Phi'^+ = \Phi_1^+$, $\Phi'^- = -\Phi_1^-$, то на основании формулы (6)

$$p(x) = \int\frac{Q}{\pi(k_1+k_2)}\,\frac{(x-x_0)\,dx}{(x-x_0)^2+y_0^2} = \frac{Q}{2\pi(k_1+k_2)}\{\ln[(x-x_0)^2+y_0^2] + c_1\}$$

Таким образом, на основании формул (2), (3)

$$p_*^{\pm}(x, y) = \pm \frac{Q}{2\pi(k_1 + k_2)} \operatorname{Im} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2i\{\ln[(t - x_0)^2 + y_0^2] + c_1\}}{t - z} dt .$$

Согласно формуле Коши имеем

$$p_*^{\pm}(x, y) = \frac{Q}{2\pi(k_1 + k_2)} \ln[(x - x_0)^2 + (y \pm y_0)^2] + c \tag{8}$$

$$p^+(x, y) = p_*^+(x, y) + G, \qquad p^-(x, y) = p_*^-(x, y) \tag{9}$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что функции, даваемые формулами (8), (9), удовлетворяют поставленным условиям.

Во второй задаче удобно ввести обозначения

$$z = re^{i\theta}, \qquad z_0 = r_0 e^{i\theta_0}, \qquad \zeta = e^{i\sigma}, \qquad \omega = e^{i\psi}$$

Решение ищется в форме

$$p^+(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\sigma) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\sigma - \theta) + r^2} d\sigma + G \tag{10}$$

$$p^-(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\sigma) \frac{r^2 - 1}{1 - 2r\cos(\sigma - \theta) + r^2} d\sigma - \frac{Q}{2\pi k_2} \ln r \tag{11}$$

где

$$G = \frac{Q}{4\pi k_1} \ln \frac{r^2 r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0) + 1}{r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0) + r^2}$$

Второе из условий сопряжения приводит к следующему интегральному уравнению для отыскания $p(\sigma)$

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{p(\sigma)\, d\sigma}{\sin^2(\sigma - \psi)/2} = \frac{Q}{2\pi(k_1 + k_2)} \left(\frac{r_0^2 - 1}{1 - 2r_0\cos(\psi - \theta_0) + r_0^2} + 1 \right) \tag{12}$$

Здесь интеграл в левой части следует понимать в смысле Коши — Адамара.

Для решения этого уравнения введем функцию $\Phi(z)$ и ее производную

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint p(\zeta) \left[\ln(\zeta - z) + \frac{\zeta}{\zeta - z} \right] d\zeta, \quad \Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint p(\zeta) \frac{z\, d\zeta}{(\zeta - z)^2}$$

Предельные значения $\Phi'(z)$ при подходе к окружности $|z| = 1$ равны

$$\Phi'^{\pm}(\omega) = \pm \frac{\omega p'(\omega)}{2} - \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} p(\sigma) \frac{d\sigma}{\sin^2(\sigma - \psi)/2}$$

Отсюда

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} p(\sigma) \frac{d\sigma}{\sin^2[(\sigma - \psi)/2]} = -(\Phi'^+(\omega) + \Phi'^-(\omega)) \tag{13}$$

$$p(\omega) = \int \frac{\Phi'^+(\omega) - \Phi'^-(\omega)}{\omega} d\omega \tag{14}$$

Таким образом, уравнение (12) сводится к задаче Римана

$$\Phi'^+ + \Phi'^- = \frac{Q}{2\pi(k_1 + k_2)} \left(\frac{1 - r_0^2}{1 - 2r_0\cos(\psi - \theta_0) + r_0^2} - 1 \right)$$

Решая ее, получим по формуле (14) выражение для $p(\omega)$

$$p(\omega) = -\frac{Q}{2\pi(k_1 + k_2)} \left[\ln\left(\omega - \frac{1}{z_0}\right) + \ln(\omega - z_0) - \ln\omega \right] + c_1$$

Наконец, по формулам (10), (11) найдем

$$p^+(r,\theta) = -\frac{Q}{\pi(k_1+k_2)}\ln\sqrt{r^2r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta-\theta_0)+1} + G + c$$

$$p^-(r,\theta) = -\frac{Q}{\pi(k_1+k_2)}\left(\ln\sqrt{r^2 - 2rr_0\cos(\theta-\theta_0)+r_0^2} - \ln r\right) - \frac{Q}{2\pi k_2}\ln r + c$$

В задачах (3—4) перейдем от функций $p^{\pm}(x,y)$ к гармоническим функциям $u^{\pm}(x,y)$ при помощи подстановок

$$p^+\sqrt{k_1} = u^+ + \frac{Q}{2\pi\sqrt{k_0}}G, \qquad p^-\sqrt{k_2} = u^- \tag{15}$$

где k_0 — значение коэффициента k_1 в точке $A(x_0, y_0)$.

Условия сопряжения на γ для функций $u^{\pm}$ получают вид

$$u^+ = \sqrt{\frac{k_+}{k_-}}\,u^- \qquad (u^{\pm} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma) \tag{16}$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial n}\sqrt{\frac{k_+}{k_-}} - \frac{\partial u^-}{\partial n} + \frac{Q}{2\pi\sqrt{k_0}}\frac{\partial G}{\partial n}\sqrt{\frac{k_+}{k_-}} = u^+\left(\frac{1}{\sqrt{k_-}}\frac{\partial\sqrt{k_+}}{\partial n} - \frac{1}{\sqrt{k_+}}\frac{\partial\sqrt{k_-}}{\partial n}\right) \tag{17}$$

В задаче (3) решение, удовлетворяющее условиям (16), ищется в виде

$$u^+(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} yu(\tau)\left\{\frac{1}{(\tau-x)^2+y^2} - \frac{1}{(1-\tau x)^2+\tau^2y^2}\right\}d\tau \tag{18}$$

$$u^-(x,y) = -\frac{c_2}{c_1\pi}\int_{-1}^{1} yu(\tau)\left\{\frac{1}{(\tau-x)^2+y^2} - \frac{1}{(1-\tau x)^2+\tau^2y^2}\right\}d\tau \tag{19}$$

Условие (17) приводит при этом к интегральному уравнению для $u(x)$:

$$u(x) - \frac{1}{\alpha\pi}\int_{-1}^{1} u(\tau)\left\{\frac{1}{(\tau-x)^2} - \frac{1}{(1-\tau x)^2}\right\}d\tau - \beta i\frac{\partial G(z,z_0)}{\partial z}\bigg|_{y=0} = 0 \tag{20}$$

Здесь

$$G(z,z_0) = \ln\frac{(z-z_0)(z-z_0^{-1})}{(z-\bar z_0)(z-\bar z_0^{-1})}$$

— функция Грина для полукруга

$$\alpha = \frac{b_1c_1 - b_2c_2}{c_1^2+c_2^2}, \qquad \beta = \frac{Qc_1^2}{2(b_1c_1-b_2c_2)\pi\sqrt{k_0}} \qquad (b_1c_1 - b_2c_2 \neq 0)$$

Введем кусочно-аналитическую функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1} u(\tau)\left(\frac{1}{\tau-z} + \frac{1}{\tau-z^{-1}} - \frac{1}{\tau}\right)d\tau$$

и ее производную $\Phi'(z)$.

При помощи этих функций уравнение (20) сводится к обобщенной задаче Римана нахождения кусочно-аналитической функции по условию на действительной оси

$$\Phi'^+(x) + i\alpha\Phi^+(x) = -\Phi'^-(x) + i\alpha\Phi^-(x) - \alpha\beta f(x) \qquad \text{при } |x| < 1$$

$$\Phi'^+(x) + \frac{i\alpha}{x^2}\Phi^+(x) = -\Phi'^-(x) + \frac{i\alpha}{x^2}\Phi^-(x) + \frac{\alpha\beta}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{при } |x| > 1$$

где

$$f(x) = \frac{2iy_0}{(x-x_0)^2+y_0^2} - \frac{2iy_0(x_0^2+y_0^2)}{[x(x_0^2+y_0^2)-x_0]^2+y_0^2}$$

Решая эту задачу и пользуясь формулами Сохоцкого для предельных значений функции $\Phi(z)$ при подходе к γ, найдем для $|x| < 1$

$$u(x) = F(x) - B_1 \cos \alpha x - B_2 \sin \alpha x$$

где

$$B_1 = \frac{F(1) + F(-1)}{2\cos\alpha}, \qquad B_2 = \frac{F(1) - F(-1)}{2\sin\alpha}$$

$$F(x) = 2\alpha\beta \Big\{ e^{\alpha y_0} \Big[\cos\alpha (x - x_0) \ln \alpha \sqrt{(x - x_0)^2 + y_0^2} - \sin\alpha (x - x_0) \operatorname{arc\,tg} \frac{x - x_0}{y_0} \Big] -$$
$$- \exp \frac{\alpha y_0}{x_0^2 + y_0^2} \Big[\cos\alpha (x - x_0) \ln \alpha \sqrt{(x - x_0)^2 + \frac{y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2}} -$$
$$- \sin\alpha (x - x_0) \operatorname{arc\,tg} \frac{(x - x_0)(x_0^2 + y_0^2)}{y_0} \Big] +$$
$$+ e^{\alpha y_0} \sum \frac{(-1)^n \alpha^n \left(\sqrt{(x - x_0)^2 + y_0^2}\right)^n}{n \cdot n!} \cos \Big[\alpha (x - x_0) + n \operatorname{arc\,tg} \frac{x - x_0}{y_0} \Big] -$$
$$- \exp \frac{\alpha y_0}{x_0^2 + y_0^2} \sum \frac{(-1)^n \alpha^n \left(\sqrt{(x - x_0)^2 + y_0^2 / (x_0^2 + y_0^2)^2}\right)^n}{n \cdot n!} \times$$
$$\times \cos \Big[\alpha (x - x_0) + n \operatorname{arc\,tg} \frac{(x - x_0)(x_0^2 + y_0^2)}{y_0} \Big] \Big\}$$

Здесь суммирование по n (и дальше по m) предполагается от 1 до ∞. Опуская выкладки, аналогичные предыдущим, выпишем результат четвертой задачи

$$u^+(x, y) = \frac{4Q(c + c_1 y)}{\alpha^2 \beta \pi (a_1 + b_1 x_0 + c_1 y_0)} \sum \Big\{ \frac{\operatorname{sh}[n\pi(\alpha + x)/2\beta]}{\operatorname{sh}(n\pi\alpha/\beta)} \times$$
$$\times \frac{\sin[n\pi(y + \beta)/2\beta] \sin[n\pi(y_0 + \beta)/2\beta]}{\Big[(c + c_1 y) \operatorname{cth} \frac{n\pi\alpha}{\beta} + \frac{(d + c_2 y)^2}{c + c_1 y} \operatorname{cth} \frac{n\pi(\delta - \alpha)}{2\beta}\Big] \frac{n}{2\beta} - \frac{e + fy}{(c + c_1 y)\pi}} \times$$
$$\times \sum \frac{(-1)^m m}{m^2/\alpha^2 + n^2/\beta^2} \sin \frac{m\pi(x_0 + \alpha)}{2\alpha} \Big\}$$

$$u^-(x, y) = \frac{4Q(d + c_2 y)}{\alpha^2 \beta \pi (a_1 + b_1 x_0 + c_1 y_0)} \sum \Big\{ \frac{\operatorname{sh}[n\pi(\delta - x)/2\beta]}{\operatorname{sh}[n\pi(\delta - \alpha)/2\beta]} \times$$
$$\times \frac{\sin[n\pi(y + \beta)/2\beta] \sin[n\pi(y_0 + \beta)/2\beta]}{\Big[(c + c_1 y) \operatorname{cth} \frac{n\pi\alpha}{\beta} + \frac{(d + c_2 y)^2}{c + c_1 y} \operatorname{cth} \frac{n\pi(\delta - \alpha)}{2\beta}\Big] \frac{n}{2\beta} - \frac{e + fy}{(c + c_1 y)\pi}} \times$$
$$\times \sum \frac{(-1)^m m}{m^2/\alpha^2 + n^2/\beta^2} \sin \frac{m\pi(x_0 + \alpha)}{2\alpha} \Big\}$$

где

$$c = a_1 + b_1\alpha, \qquad d = a_2 + b_2\alpha, \qquad e = cb_1 - db_2, \qquad f = b_1 c_1 - b_2 c_2$$

Поступила 5 VII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Чилап А. Я. К задаче об определении поля давлений в кусочно-неоднородных пластах. Изв. вузов, Нефть и газ, 1961, № 1.
2. Чилап А. Я. Поле давлений в кусочно-неоднородном секториальном пласте. Отчетная научная конференция Казан. ун-та за 1961 г. Казань, 1962.
3. Чикин Л. А. Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений. Уч. зап. Казан. ун-та, 1953, кн. 10, т. 113.
4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи, М.. ГИФМЛ, 1958.