О НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ТРЕЩИНОВАТЫХ ПОРОДАХ

Г. И. Баренблатт (Москва)

В работах [1,2] показано, что уравнения фильтрации однородной слабосжимаемой жидкости в трещиноватых породах имеют вид

$$\eta\Delta p_1 + p_2 - p_1 = 0, \qquad \eta\frac{\partial p_2}{\partial t} + \varkappa(p_2 - p_1) = 0 \tag{1}$$

так что давления жидкости в трещинах p_1 и порах p_2 удовлетворяют одинаковым уравнениям

$$Lp_1 = 0, \qquad Lp_2 = 0, \qquad L \equiv \frac{\partial}{\partial t} - \eta\frac{\partial\Delta}{\partial t} - \varkappa\Delta \tag{2}$$

где Δ — символ оператора Лапласа, η и $\varkappa$ — характеристики породы и жидкости, введенные в работах [1,2]. В работе [2] было показано, что если начальное распределение величины p, удовлетворяющей уравнению

$$Lp = 0 \tag{3}$$

имеет разрывы первого рода самой функции, или ее производной по некоторому направлению n, то эти разрывы не уничтожаются мгновенно, как в случае уравнения теплопроводности, а уменьшаются со временем по закону

$$[p] = [p]_{t=0}e^{-\varkappa t/\eta}, \qquad \left[\frac{\partial p}{\partial n}\right] = \left[\frac{\partial p}{\partial n}\right]_{t=0}e^{-\varkappa t/\eta} \tag{4}$$

знаком [ ] обозначается, как обычно, скачок некоторой величины). Примерно одновременно близкие результаты были в связи с другой физической задачей получены в работе И. В. Немчинова [3]. В работе [2] имеется неточность, отмеченная, как стало известно автору, П. П. Золотаревым; а именно, при решении краевых задач, проведенном в этой работе для уравнения (3), по недоразумению указано давление в трещинах p_1, тогда как это решение, а также исследование скачков должно относиться к давлению в порах p_2.

Так, одна из краевых задач предусматривает задание на границе объема породы потока жидкости. Так как проницаемостью блоков пренебрегается, то этот поток равен (формула (1.1) работы [2])— $(k_1/\mu)\,\partial p_1/\partial n$. Отсюда и из второго уравнения (1) получаем для случая задания на границе объема породы потока жидкости условие

$$-\left\{\frac{\eta}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{k_1}{\mu}\frac{\partial p_2}{\partial n}\right) + \frac{k_1}{\mu}\frac{\partial p_2}{\partial n}\right\} = f(S, t) \tag{5}$$

от которого соответствующее условие (4.4) работы [2] отличается тем, что в нем стоит p_1 вместо p_2. Другая краевая задача также предусматривает задание на внешней стороне границы объема породы давления p_2; граничное условие третьей задачи является линейной комбинацией граничных условий для первых двух.

Для окончательного выяснения вопроса обсудим более подробно постановку основных задач для системы уравнений фильтрации в трещиноватых породах (1). Система (1) представляет собой предельный случай системы уравнений движения жидкости в среде с двойной пористостью [1,2]

$$\eta\Delta p_1 = \varepsilon_1\frac{\partial p_1}{\partial t} - (p_2 - p_1), \qquad \varepsilon_2\Delta p_2 = \eta\frac{\partial p_2}{\partial t} + \varkappa(p_2 - p_1) \tag{6}$$

соответствующий ε_1 и ε_2 равным нулю. Для поставленных целей достаточно рассмотреть случай пренебрежимо малой проницаемости блоков, полагая $\varepsilon_2 = 0$ в (6); тогда эта система запишется в виде

$$\eta\Delta p_1 = \varepsilon_1\frac{\partial p_1}{\partial t} - (p_2 - p_1), \qquad \eta\frac{\partial p_2}{\partial t} + \varkappa(p_2 - p_1) = 0 \tag{7}$$

Задача Коши и краевые задачи для системы (1) должны представлять собой предельный случай соответствующих задач для системы (7) при $\varepsilon_1 \to 0$.

При $\varepsilon_1 \neq 0$ система (7) корректна по Петровскому [4] с показателем корректности, равным нулю. Это означает, в частности, что начальные распределения в задаче Коши для p_1 и p_2 задаются независимо, могут иметь разрывы первого рода и должны удовлетворять некоторым ограничениям на рост на бесконечности. При $\varepsilon_1 \to 0$ решение системы (7) стремится к соответствующему решению системы (1) равномерно в любом конечном интервале времени $0 < t_1 < t < T < \infty$. В интервале $0 < t < t_1$, где t_1 — фиксированное сколь угодно малое число, исследование поведения решения при $\varepsilon_1 \to 0$ можно провести, используя метод пограничного слоя для линейных уравнений, развитый в работах М. И. Вишика и Л. А. Люстерника [6]. Согласно этому методу в системе (7) вводится «быстрое» время $\theta = t / \varepsilon_1$, после чего эта система преобразуется к виду

$$\eta \Delta p_1 = \frac{\partial p_1}{\partial \theta} - (p_2 - p_1), \qquad \eta \frac{\partial p_2}{\partial \theta} + \varkappa\varepsilon_1 (p_2 - p_1) = 0 \tag{8}$$

Устремляя теперь ε_1 к нулю, получим, что $\theta_1 = t_1 / \varepsilon_1 \to \infty$, $\partial p_2 / \partial\theta \to 0$, следовательно, при $\theta = \theta_1$ и $\partial p_1 / \partial\theta \to 0$, так что при $t = t_1$ система (8) переходит в систему

$$\eta \Delta p_1 + p_2 - p_1 = 0, \qquad p_2 = p_2 (x, y, z, 0) \tag{9}$$

Имея в виду, что t_1 может быть выбрано сколь угодно малым, находим, что за начальное распределение p_1 для системы (1) должна быть принята функция, определяемая первым уравнением (9). Таким образом, в отличие от задачи Коши для системы (7) начальные распределения p_1 и p_2 в задаче Коши для системы (1) не могут задаваться независимо. Из первого уравнения (9) следует, что для того, чтобы функции p_1 и p_2 были регулярными [6], т. е. в данном случае не имели бы особенностей типа дельта-функции и ее производной, начальные распределения p_1 должны представлять собой один раз непрерывно дифференцируемую функцию, тогда как для p_2 они могут быть разрывными. Обратимся теперь к краевым задачам. Для существующих методов измерений интерес представляют граничные условия следующих типов,—на внешней стороне границы рассматриваемого объема породы задается: (1) давление жидкости, (2) поток жидкости, (3) линейная комбинация давления и потока.

Для решения краевой задачи необходимо перейти от данных на внешней стороне границы рассматриваемого объема породы к соответствующим данным на ее внутренней стороне. Будем снова рассматривать систему (1) как предельный случай системы (7). Для системы (7) при $t = 0$ давления p_1 и p_2 на внутренней стороне границы рассматриваемого объема породы, вообще говоря, не совпадают. На рассмотренном выше малом промежутке времени $0 < t < t_1$, по истечении которого можно пользоваться системой (1), давление p_2 при $\varepsilon_1 \to 0$, как было показано, в пределе не меняется и остается равным начальному во всех точках породы. Давление же p_1 удовлетворяет параболическому уравнению (первое уравнение (8)). Поэтому, если при $t = 0$ давление жидкости в трещинах p_1 на границе не равно заданному давлению жидкости на границе, то этот скачок мгновенно ликвидируется, так что к моменту $t = t_1$ распределение давления p_1 на границе непрерывно. По той же причине к моменту $t = t_1$ оно непрерывно и внутри объема. Так как в силу пренебрежимо малой проницаемости блоков поток жидкости полностью определяется распределением давления p_1, то для потока жидкости и его линейной комбинации с давлением справедливо то же самое. При $\varepsilon_1 \to 0$ величина t_1 может быть сделана сколь угодно малой, поэтому эти выводы относятся к начальному моменту для системы (1).

Итак, для системы (1) постановка краевых задач рассмотренных выше типов состоит в следующем. Задается начальное распределение p_2, которое может быть разрывным и иметь некоторый рост на бесконечности. По нему находится начальное распределение p_1 как интеграл первого уравнения (9) при граничных условиях задач (1), или (2), или (3), соответствующих начальному моменту. С этими начальными распределениями и граничными условиями система (1) решается в последующие моменты времени. Фактически решение задачи удобнее проводить для уравнения (3), исключая одну из неизвестных и выражая граничные и начальные условия в терминах искомой величины. Другая неизвестная величина элементарно находится по второму уравнению (1). Если начальное распределение p_2 или его производная по некоторому направлению $\partial p_2 / \partial n$ имели скачки, то они изменяются со временем согласно формулам (4). Распределение p_1 непрерывно и один раз непрерывно дифференцируемо.

Приведем формулировки основных краевых задач (1) и (2) в терминах p_1 и p_2:

$$p_1(S^+) = p_1(S^-) = p_2(S^+) = f(S, t) \tag{10}$$

$$\frac{\partial p_1(S^+)}{\partial n} = \frac{\partial p_1(S^-)}{\partial n} = \frac{1}{\varkappa}\left\{\eta \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial p_2(S^-)}{\partial n}\right] + \varkappa \frac{\partial p_2(S^-)}{\partial n}\right\} = g(S, t) \tag{11}$$

под S^+ и S^- понимаются соответственно внешняя и внутренняя стороны границы объема породы; f и g — заданные функции).

А. Бан [7,8] рассмотрел задачу об определении параметров пласта, распространив на трещиноватые породы метод, предложенный в [9] для пористых пород и основанный на применении преобразования Лапласа. Предложенный А. Баном способ основан на явном выражении величины ψ — отношения преобразования Лапласа давления на стенке скважины p к преобразованию Лапласа от величины $(r \ \partial p/\partial r)$, определяющей приток жидкости к скважине. Легко видеть, что эта величина ψ не зависит от того, какое давление берется за основу, — давление в порах или трещинах. В самом деле, в силу второго уравнения (I) имеем

$$p_1 = \frac{\eta}{\varkappa}\frac{\partial p_2}{\partial t} + p_2, \qquad \left(r\frac{\partial p_1}{\partial r}\right) = \frac{\eta}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial p_2}{\partial r}\right) + \left(r\frac{\partial p_2}{\partial r}\right) \tag{12}$$

Подвергая обе формулы (12) преобразованию Лапласа с параметром $s = 1/\vartheta$, получим, очевидно,

$$U_1 = \left(\frac{\eta}{\varkappa\vartheta} + 1\right)U_2, \qquad \left(r\frac{\partial U_1}{\partial r}\right) = \left(\frac{\eta}{\varkappa\vartheta} + 1\right)\left(r\frac{\partial U_2}{\partial r}\right)$$

где U_1, U_2 — соответственно преобразования Лапласа от p_2, откуда имеем

$$\psi = U_1\left(r\frac{\partial U_1}{\partial r}\right)^{-1} = U_2\left(r\frac{\partial U_2}{\partial r}\right)^{-1}$$

Поступила 11 I 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П. Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. ДАН СССР, 1960, т. 132, № 3.
2. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П. и Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
3. Немчинов И. В. Некоторые нестационарные задачи переноса тепла излучением, ПМТФ, 1960, № 1.
4. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М.— Л., Физматгиз, 1958.
5 Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции. I. Обобщенные функции и действия над ними. М.— Л., Физматгиз, 1959.
6. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Усп. матем. н., 1957, т. 12, вып. 5 (77).
7. Бан Акош. Определение времени запаздывания восстановления давления в трещиноватой породе. Изв. АН СССР, ОТН, сер. мех. и маш., № 4, 1961.
8. Бан Акош. К задаче об определении времени запаздывания при восстановлении давления в трещиноватом пласте. ПМТФ, № 2, 1962.
9. Баренблатт Г. И., Борисов Ю. П., Каменецкий С. Г., Крылов А. П. Об определении параметров нефтеносного пласта по данным о восстановлении давления в остановленных скважинах. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 11.