

ОБ ОТРЫВЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

А. Б. Ватажин

(Москва)

Приводится приближенное соотношение, связывающее параметры внешнего потока, толщину пограничного слоя и электромагнитные величины в сечении, где происходит отрыв ламинарного магнитогидродинамического пограничного слоя.

§ 1. Рассмотрим двухмерный пограничный слой на поверхности тела или на стенке канала. Направим ось x вдоль, а ось y — перпендикулярно к стенке. Предположим, что вектор внешнего магнитного поля лежит в плоскости x, y , характерный размер Δ изменения его компонент по порядку величины превосходит или равен характерному продольному размеру тела l , а магнитное число Рейнольдса, определенное по характерным величинам скорости, электропроводности и длине l , по порядку величины равно или меньше единицы. Тогда уравнения пограничного слоя при изотропных свойствах переноса записываются в виде

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -p' + \frac{\partial}{\partial y} \eta \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\sigma}{c} EB - \frac{u\sigma}{c^2} B^2 \quad (E = (0, 0, E), \quad E = \text{const}) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p v \frac{\partial T}{\partial y} = u p' + \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} k \frac{\partial T}{\partial y} + \sigma \left(\frac{u^2}{c^2} B^2 + E^2 + \frac{2u}{c} EB \right) \quad (1.3)$$

$$f(p, \rho, T) = 0 \quad (1.4)$$

В системе (1.1) — (1.4) величина E — постоянная z -компонента электрического поля, величина $B = B(x)$ равна y -компоненте вектора магнитной индукции на стенке, $p' = (dp_0/dx)$ — градиент давления во внешнем потоке, c — скорость света в пустоте, остальные обозначения общеприняты. В уравнениях движения и энергии опущены члены, отношение которых к оставленным членам имеет порядки (δ/l) , (δ/Δ) , где δ — толщина пограничного слоя, и выше. Продифференцированные по y уравнения движения и энергии с принятой в теории пограничного слоя точностью совпадают с продифференцированными по y уравнениями (1.1) и (1.3).

Момент нарушения идеальной схемы течения в пограничном слое (отрыв пограничного слоя) соответствует обращению в нуль на стенке рассчитанной по уравнениям пограничного слоя величины $\partial u / \partial y$. Определим точку отрыва как точку на стенке, в которой $u = 0$, $v = 0$, $(\partial u / \partial y) = 0$. При выводе соотношения между параметрами в сечении отрыва (соответствующем точке отрыва) будем придерживаться одного из известных в гидродинамике методов, согласно которому вначале определяется профиль скорости над точкой отрыва. Для этого путем последовательного дифференцирования по y уравнений (1.1) и (1.3) и использования полученных выражений для точки отрыва в последней находятся производные $\partial^2 u / \partial y^2$, $\partial^3 u / \partial y^3$, ..., дающие возможность представить профиль скорости рядом Тэйлора.

§ 2. Предположим, что поверхность тела теплоизолирована, а электрическое поле равно нулю. Указанным выше способом профиль скорости над точкой отрыва можно представить в виде

$$u(y) = \frac{p'y^2}{2\eta} \left[1 + \frac{\sigma B^2 y^2}{12\eta c^2} + \frac{1}{360} \left(\frac{\sigma B^2 y^2}{\eta c^2} \right)^2 + \frac{A y^4}{360} + \dots \right] \quad (2.1)$$

Здесь величины B , σ , A , p' , η соответствуют точке отрыва, величина A не зависит от магнитного поля и электропроводности. Оценим порядок величины членов, стоящих в квадратных скобках. Величина $(\sigma B^2 \delta^2 / \eta c^2) = H^2$, представляющая число Гартмана, определенное по толщине пограничного слоя, характеризует отношение силы магнитного торможения к силе трения. Так как в пограничном слое вязкие и инерционные силы имеют один и тот же порядок, величина H^2 может служить отношением магнитной силы к инерционным членам, т. е. по порядку величины совпадать с параметром магнитогидродинамического взаимодействия. Последний па-

раметр в практических приложениях имеет порядок единицы. Таким образом, второй член в квадратных скобках имеет порядок $1/12$, третий имеет порядок $1/360$, четвертый член, для которого производились оценки при исследовании отрыва гидродинамического пограничного слоя, оказывается порядка тысячных. Следовательно (если сохранить третий член для случая чисел Гартмана, несколько больших единицы), приближенно профиль скорости над точкой отрыва имеет вид

$$u(y) = \frac{p'y^2}{2\eta} \left[1 + \frac{\sigma B^2 y^2}{12\eta c^2} + \frac{1}{360} \left(\frac{\sigma B^2 y^2}{\eta c^2} \right)^2 \right] \quad (2.2)$$

Другими словами, отрыв пограничного слоя происходит в сечении, где скорость потока u_0 на границе пограничного слоя, градиент давления p' , толщина пограничного слоя δ и напряженность магнитного поля связаны соотношением

$$\xi^* = 2 \left[1 + \frac{\sigma B^2 \delta^2}{12\eta c^2} + \frac{1}{360} \left(\frac{\sigma B^2 \delta^2}{\eta c^2} \right)^2 \right]^{-1} \quad \left(\xi = \frac{p'\delta^2}{\eta u_0} \right) \quad (2.3)$$

Здесь ξ^* представляет собой значение ξ , соответствующее сечению отрыва. При $B=0$ из (2.3) получаем известное в гидродинамике соотношение $\xi^* = 2$. В диапазоне $0 \leq H \leq 4$ чисел Гартмана H с достаточной точностью (относительная ошибка монотонно растет с ростом H и при $H=4$ составляет 10%) величину ξ^* можно выразить

$$\xi^* = \frac{H^2}{\operatorname{ch} H - 1} = f(H) \quad \left(H^2 = \frac{\sigma B^2 \delta^2}{\eta c^2} \right) \quad (2.4)$$

Формула (2.4) представляет собой искомое соотношение. Она получена для произвольного распределения магнитного поля на поверхности и учитывает свойства реального газа при термодинамическом равновесии в случае теплоизолированной поверхности. Напомним, что число Гартмана в (2.4) определено по величинам B , σ , η , соответствующим точке отрыва. В случае несжимаемой жидкости с постоянными σ , η соотношение (2.4) справедливо для любого теплового режима поверхности. С ростом числа H функция $f(H)$ монотонно убывает. Таким образом, при $B \neq 0$ отрыв происходит при меньших значениях ξ^* , чем при $B=0$. Сравним, например, обтекание тела в случаях $B=0$ и $B \neq 0$ при условии, что внешний поток не взаимодействует с полем. Так как в присутствии поля $f(H) < f(0) = 2$ и толщина пограничного слоя растет быстрее, чем при $B=0$, сечение, в котором происходит отрыв, сдвигается вверх по обтекаемой поверхности.

Если известно распределение давления на границе пограничного слоя, то, подчитывая толщину пограничного слоя по той или иной эмпирической формуле, с помощью соотношения (2.4) можно определить место отрыва пограничного слоя не решая уравнений (1.1) — (1.4).

Отметим, что в соотношении (2.1) вторая производная давления впервые появляется в коэффициенте при шестой степени y , а производная магнитного поля dB/dx входит в коэффициенты при еще более высоких степенях y . Это позволяет заключить, что течение в сечении, где происходит отрыв, слабо зависит от характера внешнего потока и магнитного поля вдали от этого сечения. При отсутствии магнитного поля такой вывод обычно распространяется на произвольное сечение [1]. Вопрос о возможности распространения этого положения на весь магнитогидродинамический пограничный слой требует дополнительного обоснования.

В заключение параграфа сообщим об одном подтверждении приближенной формулы (2.2). Рассмотрим пограничный слой в случае расходящегося течения проводящей жидкости между двумя плоскими стенками, наклоненными одна к другой под углом (диффузоре), магнитное поле в котором создается током, протекающим в вершине угла перпендикулярно плоскости течения. Исследование магнитогидродинамического течения в диффузоре произведено, например, в работе [2]. В частности получено точное решение в случае обращения в нуль трения на стенке. Можно проверить, что распределение скорости, соответствующее этому точному решению, довольно хорошо совпадает с приближенным распределением скорости (2.2).

§ 3. При расчете магнитогидродинамического пограничного слоя и его отрыва, так же как в гидродинамическом пограничном слое, можно использовать интегральные соотношения Кармана. Приведем уравнение для определения толщины пограничного слоя, полученное при числе Прандтля, равном единице, $E = 0$ и теплоизолированной поверхности. Из уравнения энергии (1.3) находим, что энтальпия торможения i_{*0} в пограничном слое постоянна и равна энтальпии торможения i_{*0} внешнего потока. Пусть $(u/u_0) = \varphi(x, \delta, y/\delta) = \varphi(x, \delta, z)$. Считая плотность, электропроводность и коэффициент вязкости η функциями давления и энтальпии i , найдем

$$\frac{\rho}{\rho^0} = \frac{\rho(p, i)}{\rho^0} = \frac{1}{\rho^0} \rho(p, i_{*0} - 0.5u_0^2\varphi^2) = N_1(x, \delta, z), \quad \frac{\sigma}{\sigma^0} = N_2(x, \delta, z)$$

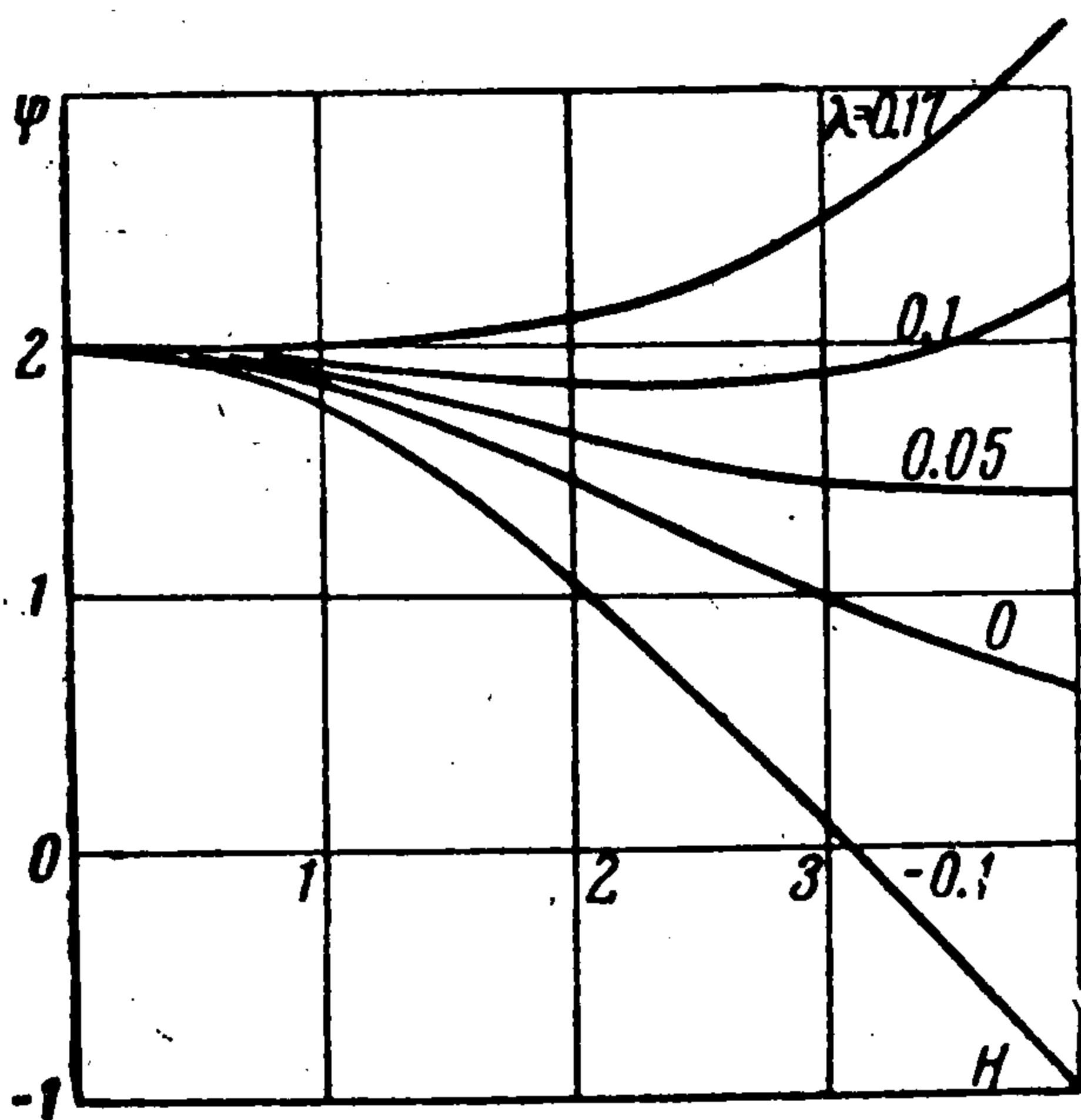
где ρ^0 и σ^0 — характерные постоянные. Интегрируя теперь от нуля до δ уравнение (1.1), получим

$$\frac{d}{dx} \frac{\delta^2}{2} = \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{2\alpha_1 \sigma^0 B^2}{c^2 \alpha_2 \rho^0 u_0} - \frac{2\alpha_3}{\alpha_2 u_0} \frac{du_0}{dx} - 2 \frac{d \ln \alpha_2}{dx} + \frac{2p'}{\rho^0 u_0^2 \alpha_2} \right) + \frac{\eta(p, i_{*0})}{\rho^0 u_0 \alpha_2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0} \quad (3.1)$$

$$\left(\alpha_1 = \int_0^1 \varphi N_2 dz, \alpha_2 = \int_0^1 (\varphi - \varphi^2) N_1 dz, \alpha_3 = \int_0^1 (\varphi - 2\varphi^2) N_1 dz \right)$$

Если в зависимость $\varphi(x, \delta, z)$ толщина пограничного слоя не входит, уравнение (3.1) превращается в линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Наиболее простой вид уравнение (3.1) приобретает для случая плоской пластины. С его помощью элементарно показывается увеличение скорости нарастания толщины пограничного слоя, возрастание полного сопротивления пластины и уменьшение ее сопротивления трения при наличии магнитного поля.



Для определения значения ξ^* , при котором происходит отрыв пограничного слоя, выражение (4.1) переписывается в виде

$$\xi^* = \lambda H^2 + \frac{H^2}{\operatorname{ch} H - 1} = \psi(\lambda, H) \quad \left(\lambda = -\frac{c}{u_0 B} \right) \quad (4.3)$$

Член λH^2 отражает воздействие электромагнитного поля, определяемого объемной силой $(-\sigma EB/c)$, член $H^2(\operatorname{ch} H - 1)^{-1}$ отражает магнитогидродинамическое воздействие, определяемое объемной силой $(-\sigma B^2 u/c^2)$. При $\lambda > 0$ сила $(-\sigma EB/c)$ действует в направлении потока, сила $(-\sigma B^2 u/c^2)$ — против потока, при $\lambda < 0$ обе силы действуют против потока. Зависимости $\psi(\lambda, H)$ приведены на фигуре. Воздействие электромагнитного поля на величину ξ^* оказывается более сильным, чем магнитогидродинамическое воздействие. Так, при малых $\lambda > 0$ и достаточно больших H имеем $\xi^* > 2$ (при $\lambda > 1/6$ всегда $\xi^* > 2$), в то время как $\xi^* < 2$ при $\lambda = 0$ и любых $H \neq 0$. При $\lambda < 0$ возможны $\xi^* < 0$. Объяснение определяющего воздей-

§ 4. Пусть среда несжимаемая, величины σ, η постоянны, электрическое поле, отличное от нуля. Нетрудно убедиться, что аналог соотношения (2.4) получается из (2.4) заменой p' на $p' + (\sigma EB/c)$. Таким образом, находим

$$\frac{p' + (\sigma EB/c)}{\eta u_0} = \frac{H^2}{\operatorname{ch} H - 1} \quad (4.1)$$

или, используя уравнение (1.1) для внешнего потока, получаем

$$-\frac{\delta^2}{\eta u_0} \left(\rho u_0 \frac{du_0}{dx} + \frac{\sigma B^2 u_0}{c^2} \right) = \frac{H^2}{\operatorname{ch} H - 1}$$

Так как $f(H) > 0$, для возникновения отрыва необходимо, чтобы внешний поток замедлялся и $|(du_0/dx)| > (\sigma B^2/c^2\rho)$.

ствия электромагнитного поля на ξ^* состоит в следующем. Влияние деформирующих профиль сил проявляется вначале на ближайшей к стенке части профиля. Сила ($-\sigma B^2 u / c^2$) в связи с малой величиной скорости у стенки оказывается меньше силы ($-\sigma EB / c$), не зависящей от скорости.

§ 5. Рассмотрим простейшее точное решение, подтверждающее выводы предыдущего параграфа. Пусть несжимаемая жидкость при $\eta = \text{const}$ движется в плоском канале $-\infty < x < +\infty$, $0 < y < \delta$, верхняя стенка которого имеет скорость $u_0 = \text{const}$, а нижняя покоится (течение Куэтта). Пусть постоянное электрическое поле приложено в направлении z , а постоянное магнитное поле в направлении y . Для общности предположим, что электропроводность является произвольной функцией скорости: $\sigma = \sigma^0 \chi(u / u_0)$. Течение среды описывается уравнением

$$\varphi'' - H^2 \varphi \chi + \lambda H^2 \chi - \xi = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1 \quad (5.1)$$

$$\left(\frac{u}{u_0} = \varphi(z), z = \frac{y}{\delta}, \frac{d\varphi}{dz} = \varphi', H^2 = \frac{\sigma^0 B^2 \delta^2}{c^2 \eta}, \lambda = -\frac{cE}{u_0 B}, \xi = \frac{p' \delta^2}{u_0 \eta} \right)$$

Его решение имеет вид

$$\frac{y}{\delta} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi'(0)^2 + 2q(\varphi)}}, \quad q(\varphi) = \int_0^{\varphi} (\xi + H^2 \varphi \chi - \lambda H^2 \chi) d\varphi \quad (5.2)$$

$$1 = \int_0^1 \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi'(0)^2 + 2q(\varphi)}} \quad (5.3)$$

Для определения ξ^* в (5.3) надо положить $\varphi'(0) = 0$. Предполагая, что электропроводность постоянна ($\chi \equiv 1$), из (5.3) находим условие, совпадающее с (4.3).

§ 6. Рассмотрим теперь пограничный слой, образующийся на стенке канала-электроду. Ось x направим вдоль, а ось y перпендикулярно к электроду. Известно, что уравнения такого пограничного слоя имеют вид [3]

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -p' + \frac{\partial}{\partial y} \eta \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{c} j B \quad (j_y = j(x), B = B(x)) \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (6.2)$$

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p v \frac{\partial T}{\partial y} = u p' + \frac{\partial}{\partial y} k \frac{\partial T}{\partial y} + \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{j^2}{\sigma} \quad (6.3)$$

$$f(p, \rho, T) = 0 \quad (6.4)$$

В уравнениях (6.1) и (6.3) j — компонента вектора плотности электрического тока в направлении y , B — компонента вектора магнитной индукции в направлении ($-z$). Величина j находится из решения задачи для невязкого течения в канале.

Для простоты предположим, что изменением величин ρ и η в пограничном слое можно пренебречь. Тогда при помощи изложенного в § 1 и 2 метода для сечения, в котором происходит отрыв, получим соотношение, даваемое любой из формул:

$$\frac{\delta^2}{\eta u_0} \left(\frac{1}{c} j B + p' \right) = 2, \quad \xi^* = 2 - \frac{j \delta^2 B}{c \eta u_0}, \quad -\frac{\rho \delta^2}{\eta} \frac{du_0}{dx} = 2 \quad (6.5)$$

Автор благодарит за замечания Г. М. Бам-Зеликовича.

Поступила 20 XII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Бам-Зеликович Г. М. Расчет отрыва пограничного слоя. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 12.
2. Ватажин А. Б. О течении в диффузоре в присутствии магнитного поля. ПММ, 1960, т. 24, в. 3.
3. Kerrebrock J. L. Electrode boundary layers in direct — current plasma accelerators. JASS, 1961, vol. 28, N 8.