

## ОБРАЗОВАНИЕ УДАРНЫХ ВОЛН В СОПЛАХ ЛАВАЛЯ

О. С. Рыжов

(Москва)

Расчет течений в соплах Лавалья связан с большими трудностями в построении поля потока в окрестности самого узкого поперечного сечения канала, где совершается переход от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым. Первые общие результаты о структуре плоскопараллельного движения газа в окрестности звуковой кривой были получены в работе С. А. Христиановича [1]. В частности, в этой работе выведено условие, выполнение которого необходимо для возможности аналитического продолжения течения в соплах из дозвуковой области в сверхзвуковую. Особенность потока в окрестности центра канала связана с тем, что касательные к линии перехода и характеристикам, проходящим через ось симметрии, совпадают между собой. Опираясь на преобразование годографа, Ф. И. Франкль подробно исследовал характер плоскопараллельного течения около звуковой линии [2]. В работе Ф. И. Франкля рассматривались не только аналитические течения, но и течения с разрывами первых производных вдоль линий Маха, проходящих через центр сопла. С. В. Фалькович показал, что полученные Ф. И. Франклем результаты можно значительно упростить, если все исследование выполнить в плоскости физических переменных [3]. Главный член решения С. В. Фальковичу удалось записать в виде полинома третьей степени. Теория плоского сопла развивалась также Лайтхиллом [4], Черри [5], Элерсом [6], Трикоми [7] и рядом других авторов.

Переход через скорость звука в окрестности горла сопла Лавалья, обладающего осевой симметрией, рассматривался в работе [8]. В ней было показано, что исследование осесимметрического случая можно провести с той же полнотой, какая была достигнута при изучении плоскопараллельных движений.

Во всех перечисленных работах рассматривались только такие течения, в которых отсутствуют ударные волны. В практическом отношении эти течения наиболее интересны. Для того чтобы гарантировать безударность потока в окрестности центра сопла, были выведены критерии, выполнение которых достаточно для потенциального характера как плоскопараллельных [2], так и осесимметрических [8] движений. Однако причины, приводящие к образованию ударных волн в окрестности горла сопла, установлены не были. Оставалось неясным, при каких условиях получают течения с проходящим через центр канала скачком уплотнения, который касается звуковой кривой, и какое влияние на движение газа во входной части оказывают вносимые им возмущения.

В данной работе вначале детально исследуются все типы непрерывных неаналитических течений. Оказывается, что при определенных условиях в таких течениях появляется предельная линия, несущая бесконечные значения ускорений. Так как движение газа с бесконечными ускорениями физически бессмысленно, то либо в нем до появления предельной линии образуется ударная волна, либо все течение в целом перестраивается. Устанавливается, что в разрывных движениях ударная волна образуется в центре сопла и простирается вниз по потоку. Течения с приходящей в эту точку ударной волной осуществить нельзя, они разрушаются в результате вносимых скачком уплотнения возмущений. Ударная волна образуется только тогда, когда предварительно в потоке появилась предельная линия; ввести ударную волну в течение, где нет бесконечных ускорений, невозможно. Скачок уплотнения не нарушает движения газа во входной части сопла; поток за ним продолжает расширяться, хотя и более медленно, чем в непрерывных течениях.

Если горло канала находится вверх по потоку от точки пересечения звуковой кривой с осью симметрии, то в движении газа ударных волн не возникает. Устанавливается, что течение остается безударным и в том случае, когда наиболее узкое сечение сопла расположено ниже по потоку, чем его центр, но расстояние между ними не превосходит некоторого предела. Увеличение расстояния между горлом и входной частью канала приводит к образованию ударных волн. Поэтому при конструировании сопел переходную часть не следует делать слишком длинной. Наименее вероятно возникновение скачка уплотнения в трансзвуковой части сопел, стенки которых имеют изломы. Образование ударных волн связано с таким уменьшением скорости в области за замыкающей входную часть характеристикой, которое происходит более резко, чем по линейному закону.

В работе исследуются также течения с местными сверхзвуковыми зонами, прилегающими к стенкам канала и смыкающимися на его оси. Впервые подобные течения рассматривались Томотика и Тамада [9] и Томотика и Хазимото [10].

**§ 1. Безударные плоскопараллельные течения.** Рассмотрим движение газа в окрестности самого узкого поперечного сечения сопла, где его характер меняется с дозвукового на сверхзвуковой. Будем считать, что в выделенной области потока скорость частиц близка по величине к критической, а углы между направлением скорости и осью канала малы. Во всем поле такого течения энтропию можно принять постоянной. Возникновение в сверхзвуковой части потока скачков уплотнения не нарушает сделанных предположений, так как их интенсивность не может быть большой.

Обозначим через  $U$  и  $V$  компоненты вектора скорости частиц вдоль осей  $x$  и  $r$ , первую из которых совместим с осью сопла, а вторую выберем в перпендикулярном к ней направлении. Направление основного движения газа с критической скоростью  $a_*$  будет тогда параллельно оси  $x$ . Пусть  $p$  означает давление,  $s$  — удельную энтропию,  $\rho$  — плотность,  $\tau$  — удельный объем; критические значения параметров газа будут отмечены звездочкой. Для исследования течений в околосзвуковом диапазоне скоростей удобно ввести безразмерные функции

$$u = 2m_* \frac{U - a_*}{a_*}, \quad v = 2m_* \frac{V}{a_*} \quad \left( m_* = \frac{1}{2\rho_*^3 a_*^2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial \tau_*^2} \right)_s, \quad \tau = \frac{1}{\rho} \right)$$

которые удовлетворяют системе дифференциальных уравнений [11]

$$-u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + (v - 1) \frac{v}{r} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.1)$$

Здесь  $v = 1$  для плоскопараллельных течений и  $v = 2$  для течений с осевой симметрией. Независимые переменные  $x$  и  $r$  будем также считать безразмерными.

Движение газа без скачков уплотнения может быть осуществлено не через всякое сопло. В практическом же отношении наибольший интерес представляют сопла, обеспечивающие безударность течения. Для выяснения причин, приводящих к образованию ударных волн в окрестности наиболее узкого сечения канала, поставим для уравнений (1.1) следующую задачу Коши. Пусть при  $r = 0$ , т. е. на оси симметрии потока

$$u = A_1 x \text{ для } x < 0, \quad u = A_2 x \text{ для } x > 0, \quad v = 0 \quad (A_1 \geq A_2 \geq 0) \quad (1.2)$$

Таким образом, в точке  $x = r = 0$  допускается разрыв производной  $\partial u / \partial x$ . В этой точке, называемой центром сопла, звуковая кривая пересекает его ось. Величина разрыва  $\partial u / \partial x$  определяет характер перехода от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым. Две симметричные относительно оси  $x$  линии тока в течении, построенном в результате решения задачи (1.2), можно принять за стенки канала.

Исследуем вначале плоскопараллельные движения, которые не содержат скачков уплотнения. Используя симметрию потока, в дальнейшем будем рассматривать только верхнюю полуплоскость физических переменных  $xr$ . Система уравнений (1.1) и начальные условия (1.2) инвариантны по отношению к непрерывной группе преобразований подобия

$$x \rightarrow \alpha x, \quad r \rightarrow \alpha^{1/2} r, \quad u \rightarrow \alpha u, \quad v \rightarrow \alpha^{3/2} v$$

где  $\alpha$  — произвольная не равная нулю постоянная. Отсюда заключаем, что искомое решение задачи Коши является автомодельным; для его определения положим [3, 8]

$$u = r^2 f(\xi), \quad v = r^3 g(\xi), \quad \xi = x / r^2 \quad (1.3)$$

При  $v = 1$  функции  $f$  и  $g$ , удовлетворяют следующей системе

$$f \frac{df}{d\xi} - 3g + 2\xi \frac{dg}{d\xi} = 0, \quad 2\xi \frac{df}{d\xi} + \frac{dg}{d\xi} - 2f = 0$$

Исключив отсюда функцию  $g$  для  $f$  получим уравнение

$$(f - 4\xi^2) \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \left(\frac{df}{d\xi}\right)^2 + 2\xi \frac{df}{d\xi} - 2f = 0 \quad (1.4)$$

После интегрирования (1.4) величина  $g$  определяется соотношением

$$g = \frac{1}{3} [(f - 4\xi^2) df/d\xi + 4\xi f] \quad (1.5)$$

Уравнение (1.4) обладает простым частным решением [3], которое будем называть «основным»

$$f = \frac{1}{2} A^2 + A\xi \quad (1.6)$$

Используя последнее равенство, напишем решение

$$u = A_1 x + \frac{1}{2} A_1^2 r^2, \quad v = A_1^2 x r + \frac{1}{6} A_1^3 r^3 \quad (1.7)$$

исходной системы (1.1) уравнений в частных производных, которое удовлетворяет начальным условиям (1.2) в области, расположенной слева от приходящей в центр сопла особой  $C_-^\circ$ -характеристики. В области справа от исходящей из этой же точки особой  $C_+^\circ$ -характеристики искомое решение имеет аналогичный вид

$$u = A_2 x + \frac{1}{2} A_2^2 r^2, \quad v = A_2^2 x r + \frac{1}{6} A_2^3 r^3 \quad (1.8)$$

При  $A_1 = A_2 = A$  формулы (1.7) и (1.8) совпадают и дают также решение уравнений (1.1) в области, заключенной между особыми  $C_\mp^\circ$ -характеристиками. Это единое решение соответствует течению в аналитическом сопле Лавала. При  $A_1 \neq A_2$ , за исключением одного особого случая [8], решение в находящейся между особыми характеристиками области в та-

ком простом виде представить нельзя. В дальнейшем удобно считать величину  $A_1$  и, следовательно, весь поток во входной части сопла неизменными, изменению будут подлежать значения постоянной  $A_2$ .

Линия перехода через скорость звука получается приравниванием нулю величины  $u$  в формулах (1.7)

$$x = -\frac{1}{2} A_1 r^2$$

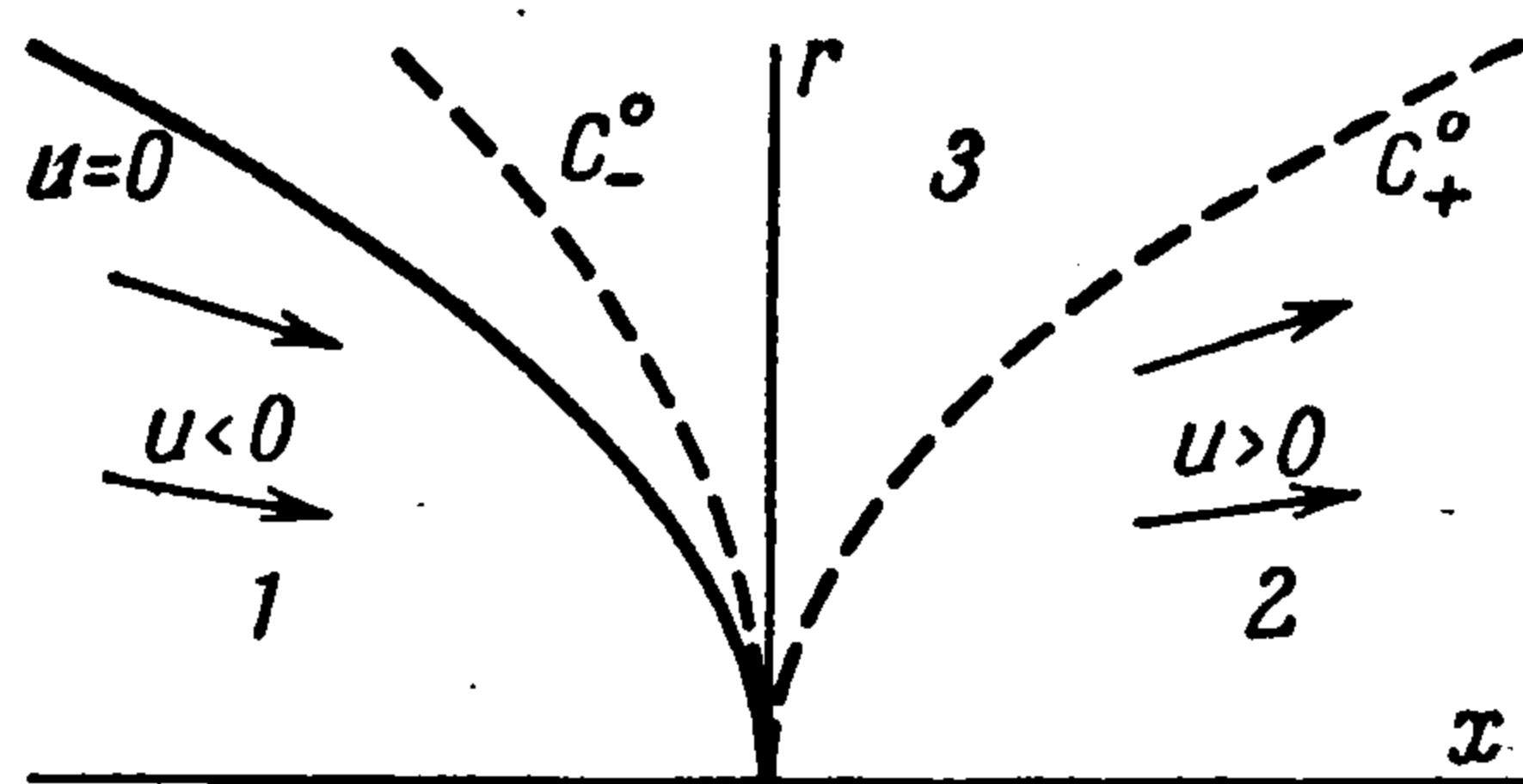
Характеристики (линии Маха) описываются решениями дифференциального уравнения

$$\left(\frac{dx}{dr}\right)^2 = u = A_{1,2} x + \frac{1}{2} A_{1,2}^2 r^2$$

В рассматриваемом случае особые  $C_{\mp}^{\circ}$ -характеристики, которые проходят через центр сопла и касаются в этой точке линии перехода, даются формулами

$$x = -\frac{1}{4} A_1 r^2 \quad (C_-^{\circ} \text{ — характеристика}), \quad x = \frac{1}{2} A_2 r^2 \quad (C_+^{\circ} \text{ — характеристика})$$

Окрестность центра течения изображена на фиг. 1. Границей областей 1 и 3 служит  $C_-^{\circ}$ -характеристика,  $C_+^{\circ}$ -характеристика отделяет область 3 от области 2. Решение уравнения (1.4) в области 1 дается равенством (1.6) с  $A = A_1$ , в области 2 — этим же равенством с  $A = A_2$ . При переходе через характеристики функции  $u$  и  $v$  должны оставаться непрерывными, в то время как их производные могут обладать разрывами первого рода. Из непрерывности функции  $u$  на особых  $C_{\mp}^{\circ}$ -характеристиках



Фиг. 1

выводим два граничных условия для интегрирования уравнения (1.4) в области 3

$$f = f_1 = \frac{1}{4} A_1^2 \quad \text{при } \xi = \xi_1 = -\frac{1}{4} A_1,$$

$$f = f_2 = A_2^2 \quad \text{при } \xi = \xi_2 = \frac{1}{2} A_2$$

Так как  $A_1 > 0$  и  $A_2 > 0$ , то  $\xi_1 < 0$ , а  $\xi_2 > 0$ .

Для упрощения качественного исследования неаналитических течений газа положим

$$f = \xi^2 F(\eta), \quad \frac{dF}{d\eta} = \Psi, \quad \eta = \ln |\xi| \quad (1.11)$$

В новых переменных уравнение (1.4) примет вид

$$\frac{d\Psi}{dF} = \frac{\Psi^2 + 7\Psi F + 6F^2 - 10\Psi - 6F}{\Psi(4-F)} \quad (1.12)$$

Исследование основных свойств этого уравнения было проведено в работе [8]. Общая картина поля его интегральных кривых представлена на фиг. 2, где виден характер особых точек, кривых  $\Psi_1^*$  и  $\Psi_2^*$ , на которых значения производной  $d\Psi/dF$  равны нулю, а также прямых  $F=4$  и  $\Psi=0$ , где производная  $d\Psi/dF$  обращается в бесконечность.

Установим при помощи «фазовой» плоскости  $F\Psi$  основные свойства изучаемых течений, отвлекаясь вначале от связи между значениями постоянных  $A_1$  и  $A_2$  и

характером перехода от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым. Для поставленной цели представляют интерес три особые точки  $A(0, 0)$ ,  $C(4, -6)$ ,  $D(4, -12)$ , расположенные в конечной части плоскости  $F\Psi$ , и две бесконечно удаленные особые точки  $E$  и  $G$ , которые достигаются при движении вниз соответственно вдоль прямых  $\Psi = -2F$  и  $\Psi = -\frac{3}{2}F$ .

Легко показать, что точка  $A$  соответствует оси  $x$ ; точка  $C$  соответствует  $C_+$ -характеристике, а точка  $D$  соответствует  $C_-$ -характеристике, определяемым равенствами (1.9); точки  $E$  и  $G$  соответствуют оси  $r$ . Из равенств (1.3) и (1.11) следует, что звуковой линии соответствует ось ординат, области сверхзвуковых скоростей — полуплоскость, лежащая справа от этой оси, дозвуковых — левая полуплоскость. Если двигаться вдоль некоторой интегральной кривой в плоскости  $F\Psi$ , то линии  $\xi = \text{const}$  будут описывать определенную область физического пространства. Значения  $\xi$  на рассматриваемой кривой не должны иметь экстремумов, так как в противном случае получим многозначную физическую плоскость  $xr$ , в которой течение накладывается само на себя. Линия, несущая экстремальное значение  $\xi$ , является предельной линией, вдоль нее значения производных составляющих скорости по координатам становятся бесконечными. Используя равенства (1.11) и (1.12), легко видеть, что переход через прямую  $F=4$  невозможен. Исключения составляют лишь интегральные кривые, проходящие через особые точки  $C$  и  $D$ .

Используя формулы (1.11), находим

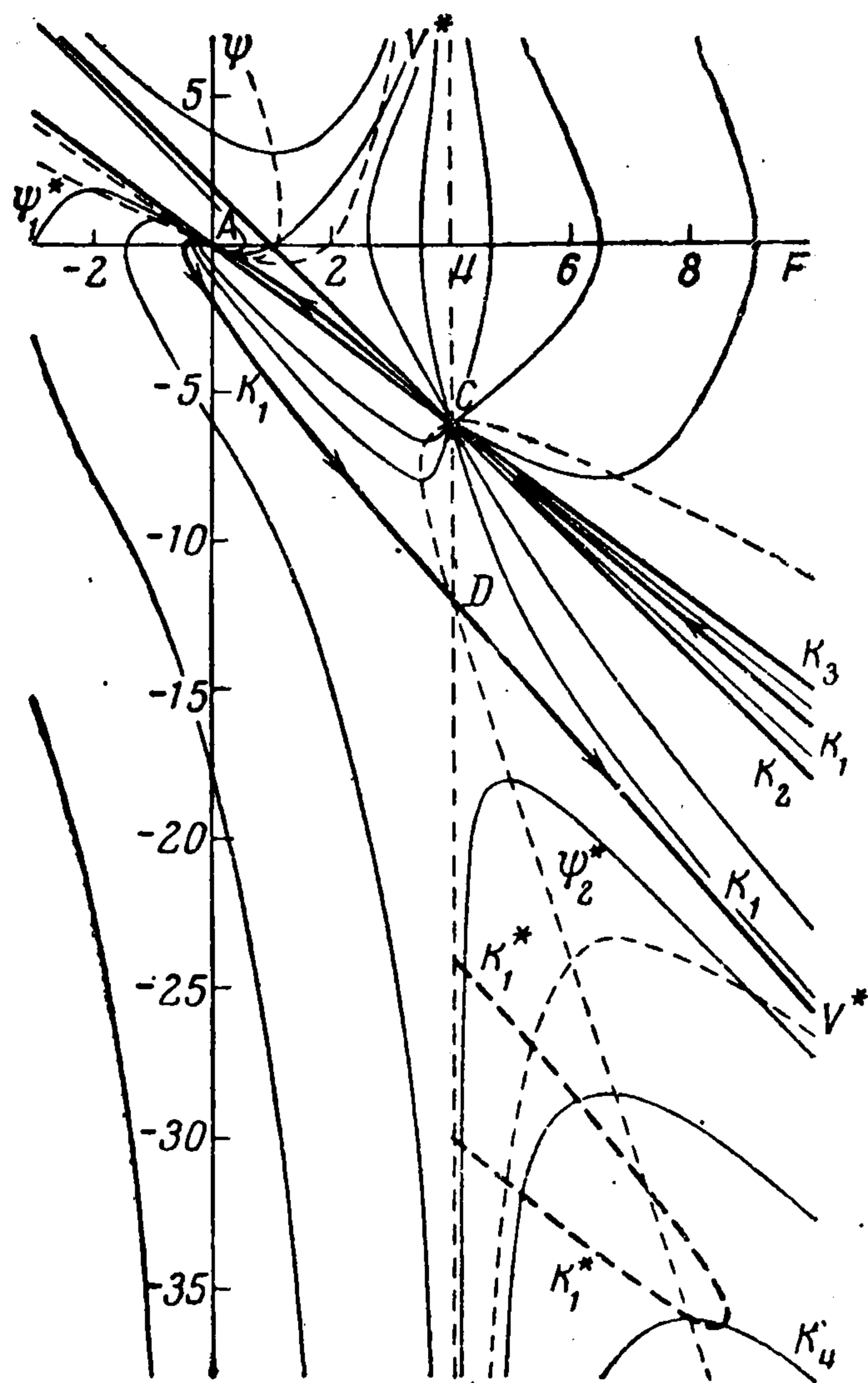
$$df / d\xi = (2F + \Psi) \xi$$

Отсюда можно получить уравнение интегральной кривой  $K_1$ , которая будет изображением в плоскости  $F\Psi$  основного решения (1.6)

$$\Psi = -(1 + 2F \mp \sqrt{1 + 2F})$$

Если двигаться в физическом пространстве из области дозвуковых скоростей в область сверхзвуковых скоростей, то по кривой (1.13) движение будет происходить в направлении, указанном на фиг. 2 стрелкой. Нижняя ветвь кривой  $K_1$  является единственной проходящей через точку  $D$  в направлении  $E$  интегральной кривой уравнения (1.12).

Область 1 в неаналитических течениях со слабыми разрывами вдоль особых  $C_{\mp}$ -характеристик будет по-прежнему изображаться отрезком  $K_1$ -кривой, расположенным между точками  $A$  и  $D$ , а движение газа в области 2 — отрезком  $K_1$ -кривой, лежащим между точками  $C$  и  $A$ , так как уравнение (1.13) не зависит ни от величины  $A_1$ , ни от величины  $A_2$ . На характеристиках значения  $f$  непрерывны, а значения  $df / d\xi$  имеют разрывы. Отсюда следует, что значения  $F$  должны быть также непрерыв-



Фиг. 2

ными и согласно формулам (1.10) равными 4, а значения  $\Psi$  должны претерпевать разрывы первого рода. Поэтому, двигаясь со стороны дозвуковых скоростей по отрезку  $K_1$ -кривой и достигая точки  $D$ , получаем единственную возможность осуществления течений со слабыми разрывами, переходя скачком из точки  $D$  в точку  $C$ . Из точки  $C$  можно затем двигаться вдоль любой интегральной кривой, заключенной между двумя ветвями  $K_1$ -кривой, до точки  $E$ , а затем возвратиться по продолжению этой кривой опять в точку  $C$ .

Линейная функция

$$\Psi = 2 - 2F \quad (1.14)$$

является интегралом уравнения (1.12), соответствующая ему прямая обозначена на фиг. 2 через  $K_2$ . Когда движение газа в области, которая заключена между проходящими через центр сопла линиями Маха, изображается прямой (1.14), то эта прямая проходит сначала в обычном направлении от точки  $C$  до точки  $E$ , а затем в обратном — от точки  $E$  до точки  $C$ . Одна из ветвей всех остальных интегральных кривых уравнения (1.12), изображающих непрерывные неаналитические течения, расположена между  $K_2$ -прямой и нижней ветвью кривой  $K_1$ , другая — между этой же прямой и верхней ветвью кривой  $K_1$ . Из точки  $C$  в точку  $E$  можно двигаться по любой ветви рассматриваемых интегральных кривых, причем в физической плоскости получим течение в области между  $C_-^\circ$ -характеристикой и осью  $r$ . Течение в области между осью  $r$  и  $C_+^\circ$ -характеристикой изобразится второй ветвью выбранной интегральной кривой. В предельном случае движение будет происходить по  $K_1$ -кривой, проходимой в обратном направлении, т. е. из точки  $D$  скачком в точку  $C$ , из этой точки по  $K_1$ -кривой в точку  $E$ , затем по ее продолжению в точку  $D$  и опять скачком в точку  $C$ .

Изучение поля интегральных кривых уравнения (1.12) позволяет установить основные свойства потоков, имеющих слабые разрывы, и выяснить причины, приводящие к образованию ударных волн в окрестности горла сопла.

Течение за  $C_+^\circ$ -характеристикой отображается на отрезок  $K_1$ -кривой между точками  $C$  и  $A$ , отсюда следует, что на  $C_+^\circ$ -характеристике не возникает разрывов первых производных от составляющих скорости частиц по координатам, даже если они имелись на  $C_-^\circ$ -характеристике. Разрывы первых производных компонент скорости, приносимые в центр плоского сопла по  $C_-^\circ$ -характеристике, отражаются от него по  $C_+^\circ$ -характеристике в виде разрывов вторых производных. Исключение в этом отношении представляет лишь предельный случай, когда течение между особыми характеристиками отображается на  $K_1$ -кривую, проходимую в обратном направлении. В предельном случае разрывы первых производных от составляющих скорости по координатам образуются как на  $C_-^\circ$ -характеристике, так и на  $C_+^\circ$ -характеристике.

Единственной интегральной кривой, упирающейся в бесконечно удаленную особую точку  $G$ , является  $K_3$ -прямая

$$\Psi = -\frac{3}{2}F \quad (1.15)$$

Выберем отрезок интегральной кривой уравнения (1.12), заключенный между прямой (1.15) и верхней ветвью кривой  $K_1$ , в качестве изображающего течение между  $C_-^\circ$ -характеристикой и осью  $r$ . Тогда течение между осью  $r$  и  $C_+^\circ$ -характеристикой отобразится на интегральную кривую, которая служит продолжением указанного отрезка и расположена

под нижней ветвью кривой  $K_1$ . При  $F \rightarrow 4$  значения  $\Psi$  вдоль рассматриваемой интегральной кривой убывают и по абсолютной величине стремятся к бесконечности. Отсюда следует, что в построенном таким образом течении направленная вниз по потоку  $C_+^\circ$ -характеристика является одновременно предельной линией, так как она несет бесконечные значения производных компонент скорости. В реальных условиях движение газа с бесконечно большими ускорениями realizоваться не может: либо в нем до появления предельной линии образуется ударная волна, либо все течение в целом перестраивается.

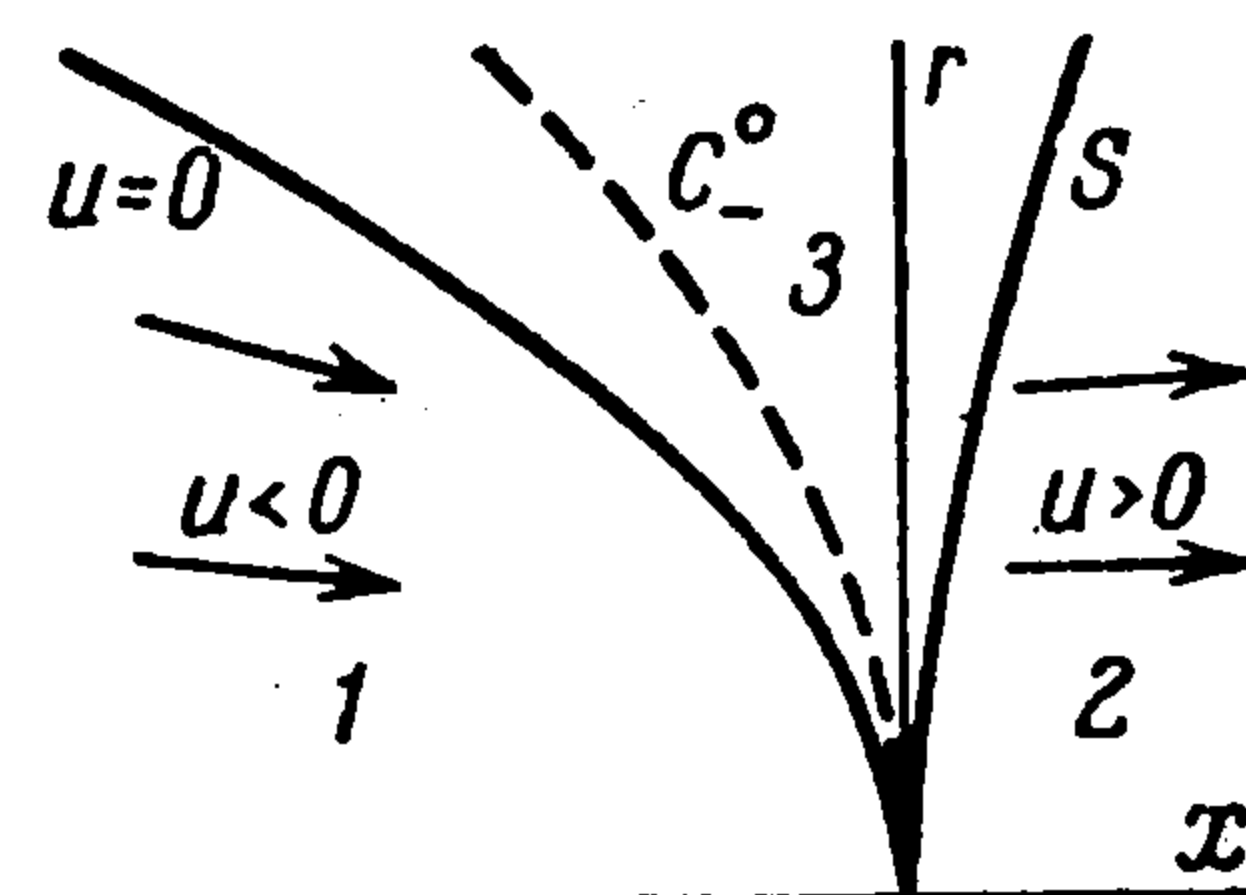
Когда течение вниз по потоку за  $C_-^\circ$ -характеристикой в плоскости  $F\Psi$  изображается  $K_3$ -прямой, то предельной линией служит ось  $r$ .

Возьмем в качестве кривой, изображающей течение за  $C_-^\circ$ -характеристикой, интегральную кривую уравнения (1.12), расположенную над прямой  $K_3$ . Рассматриваемая кривая пересекает ось абсцисс и при  $F \rightarrow 4$  уходит вверх на бесконечность. В соответствующем ей движении газа предельная линия находится слева от оси  $r$ , по ней бесконечные значения ускорений попадают в центр сопла.

§ 2. Плоскопараллельные течения с ударными волнами. Рассмотрим теперь образование ударных волн в построенных течениях, обладающих предельной линией. На фиг. 3 показана окрестность центра сопла, в котором появился скачок уплотнения (кривая  $S$ ); последний идет круче, чем  $C_+^\circ$ -характеристика, в соответствии с этим в разрывном движении газа через центр сопла проходит только одна  $C_-^\circ$ -характеристика.

Уравнение ударной поляры [для трансзвуковых течений можно приближенно представить в виде [12]

$$2(v_2 - v_3)^2 = (u_2 - u_3)^2 (u_2 + u_3) \quad (2.1)$$



Фиг. 3

Здесь значения индексов у функций  $u$  и  $v$  совпадают с номерами областей на фиг. 3, в которых они вычисляются. Уравнение (2.1) является дополнительным граничным условием, которому необходимо удовлетворить при построении разрывных решений задачи Коши (1.2). Вторым граничным условием, которое должно выполняться при переходе через ударный фронт, служит непрерывность проекции  $V_\tau$  вектора скорости на касательную к скачку  $S$ . Пусть  $\gamma$  означает угол между направлением скорости и нормалью к  $S$ . Тогда

$$V_\tau = U \sin \gamma + V \cos \gamma$$

В движении газа, где скорость частиц по величине лишь незначительно отклоняется от критической, угол  $\gamma$  мал. Поэтому можно положить  $\sin \gamma = dx_2 / dr$ ,  $\cos \gamma = 1$ , считая форму скачка уплотнения заданной уравнением  $x_2 = x_2(r)$ . Условие непрерывности тангенциальной составляющей  $V_\tau$  вектора скорости запишется как [12]

$$u_2 \frac{dx_2}{dr} + v_2 = u_3 \frac{dx_2}{dr} + v_3 \quad (2.2)$$

Уравнения (2.1) и (2.2) также инвариантны по отношению к отмеченной выше группе преобразований подобия. Поэтому искомое разрывное

решение системы уравнений (1.1) по-прежнему автономно и имеет вид (1.3), причем решение в области 1 дается формулами (1.7), а в области 2 — формулами (1.8). Парабола

$$x = \xi_2 r^2 \quad (2.3)$$

где значение постоянной  $\xi_2$  зависит от величины разрыва производной  $\partial u / \partial x$  в центре сопла и подлежит определению, является уравнением ударного фронта.

Условие (2.2) запишется как

$$g_2 - g_3 = -2\xi_2 (f_2 - f_3)$$

Используя последнее равенство, упростим уравнение поляры (2.1)

$$f_2 + f_3 = 8\xi_2^2 \quad (2.4)$$

после чего преобразуем само это равенство при помощи формулы (1.5) к виду

$$(f_2 - 4\xi_2^2) \frac{df_2}{d\xi} + 10\xi_2 f_2 = (f_3 - 4\xi_2^2) \frac{df_3}{d\xi} + 10\xi_2 f_3 \quad (2.5)$$

Полученные граничные условия (2.4) и (2.5) должны быть удовлетворены на правом конце интервала при интегрировании уравнения (1.4) в области 3. Граничное условие на левом конце по-прежнему задается первой из формул (1.10).

Для качественного исследования течений с ударными волнами воспользуемся снова плоскостью  $F\Psi$ , причем вначале по-прежнему будем отвлекаться от связи между характером перехода через скорость звука и значениями постоянных  $A_1$  и  $A_2$ . В плоскости  $F\Psi$  уравнение (2.4) приобретает вид

$$F_2 + F_3 = 8 \quad (2.6)$$

Из условия (2.5) находим связь между величинами  $\Psi_2$  и  $\Psi_3$

$$\Psi_2 + \Psi_3 = -36 \quad (2.7)$$

Так как течение в области 2 за ударной волной описывается формулами (1.8) и по предположению, сделанному при формулировке задачи Коши (1.2), его скорость возрастает, оно по-прежнему изображается отрезком  $K_1$ -кривой между точками  $C$  и  $A$ . Действительно, в силу равенств (1.6) и (1.11)

$$A_2 = (-1 \pm \sqrt{1 + 2F_2}) \xi_2 \quad (2.8)$$

Отсюда следует, что  $A_2 \geq 0$  при  $\xi_2 > 0$  только в том случае, когда  $F_2 \geq 0$  и перед корнем выбран верхний знак. Неравенство  $\xi_2 > 0$ , как будет показано ниже, всегда выполняется. Таким образом, величины  $F_2$  и  $\Psi_2$  связаны соотношением (1.13), где перед корнем также взят верхний знак. Используя формулы (2.6) и (2.7), легко получить связь между величинами  $F_3$  и  $\Psi_3$ , характеризующими состояние газа перед ударной волной

$$\Psi_3 = -(19 + 2F_3 + \sqrt{17 - 2F_3}) \quad (2.9)$$

К написанным условиям на ударном фронте необходимо присоединить неравенство, выражающее тот факт, что процесс ударного сжатия необратим. В рассматриваемом приближении энтропия во всем потоке постоянна, она не меняется и при переходе из области 3 в область 2. Условие, характеризующее необратимость ударного сжатия, удобно поэтому взять в виде

$$u_3 \geq u_2$$

так как в силу теоремы Цемплена скорость частиц за ударным фронтом не может превзойти скорости до него. Отсюда следует

$$F_3 \geq F_2$$

Учитывая формулу (2.6), получим, что значения  $F_3$  не могут быть меньшими 4.

На фиг. 2 равенство (2.9) определяет отрезок нижней ветви кривой  $K_1^*$ , расположенный в интервале  $4 < F \leq 8$ . При приближении к левому концу этого отрезка получаются течения с исчезающе слабыми ударными волнами; правый конец отвечает потоку, в котором за ударной волной скорость по величине равна критической, а по направлению параллельна оси  $x$ . Кривую  $K_1^*$  пересекает только часть интегральных кривых уравнения (1.12). Последние служат продолжением интегральных кривых, примыкающих к верхней ветви  $K_1$ -кривой и заключенных между ней и прямой  $K_3$ . Продолжения всех остальных интегральных кривых, выходящих из точки  $C$  и расположенных ниже прямой  $K_3$ , не пересекают  $K_1^*$ -кривой. Таким образом, лишь часть течений, в которых предельной линией служит простирающаяся вниз по потоку  $C_+^{\circ}$ -характеристика, может быть реализована, если ввести в них ударные волны. Класс разрывных течений можно расширить, но тогда скорость в области 2 за ударной волной будет уменьшаться по направлению к выхлопной части сопла. Эти течения будут рассмотрены в дальнейшем. Когда предельная линия в потоке расположена слева от оси  $r$  или совпадает с ней, то движение газа не удастся продолжить через скачок уплотнения. Такие течения невозможно реализовать на практике.

Следует отметить, что во всех разрывных течениях газа скачок уплотнения зарождается в центре сопла и простирается вниз по потоку. Это непосредственно следует из того факта, что при движении вдоль интегральных кривых в плоскости  $F\Psi$  можно пересечь кривую  $K_1^*$ , являющуюся изображением состояний газа перед ударным фронтом, только минуя бесконечно удаленную точку  $E$ . Последняя, как было указано в предыдущем параграфе, соответствует оси  $r$ . Неравенство  $\xi_2 > 0$  действительно всегда имеет место. Течений с приходящими в центр сопла ударными волнами построить нельзя. Если бы ударная волна зародилась в области слева от оси  $r$ , то движение газа перестроилось в результате вносимых ею возмущений.

Приходящая в центр сопла  $C_-^{\circ}$ -характеристика как в непрерывных неаналитических течениях, так и в течениях с ударными волнами является носителем разрывов первых производных компонент вектора скорости по координатам. Оба вида движений газа отображаются в плоскости  $F\Psi$  на кривые, которые выходят из точки  $C$ ; попасть же в эту точку можно только скачком из точки  $D$ . Таким образом, разрывы первых производных компонент скорости могут отражаться от центра сопла как в виде слабых разрывов, так в виде разрывов самих функций.

Отметим, что ударные волны возникают только в течениях, обладающих предельной линией. Сохранить такие течения безударными невозможно. В то же время нельзя ввести скачки уплотнения в движения, в которых предварительно не образовалось предельных линий. Аналогичные результаты получены Жерменом и Жиллоном [13,14] и Л. П. Горьковым и Л. П. Пятаевским [15] при исследовании задачи о падении слабого разрыва на линию перехода.

§ 3. Зависимость характера перехода через скорость звука от величины разрыва производной  $\partial u / \partial x$  в центре сопла. Перейдем к выяснению характера интегральных кривых уравнения (1.4), которые соответствуют рассмотренным выше кривым в плоскости  $F\Psi$ .

Интегральные кривые в плоскости  $\xi f$  определяют изменение величины  $u$  безразмерной скорости возмущений в зависимости от длины сопла при  $r = \text{const}$ . Линии  $r = \text{const}$  можно в первом приближении совместить с линиями тока, поэтому решения уравнения (1.4) представляют изменение скорости, а вместе с ней давления, плотности и температуры вдоль линий тока в окрестности горла сопла. Заметим, что величина разрыва производной  $\partial u / \partial x$  на  $C_-^\circ$ -характеристике не может быть произвольной. Действительно, вычисляя значение  $df / d\xi$  при приближении к  $C_-^\circ$ -характеристике справа, имеем

$$\frac{df}{d\xi} = -\frac{1}{2} A_1 \quad (3.1)$$

Отсюда, обозначая через  $[\partial u / \partial x]_1$  величину разрыва производной  $\partial u / \partial x$  на  $C_-^\circ$ -характеристике, получим

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right]_1 = -\frac{3}{2} A_1 < 0$$

Таким образом, задавая поток слева от  $C_-^\circ$ -характеристики, можно получить справа от нее разные потоки, как непрерывные, так и с ударными волнами, но во всех неаналитических течениях значение скачка  $[\partial u / \partial x]_1$  вдоль границы потоков будет одинаково.

Рассмотрим интегральную кривую уравнения (1.4), которой соответствует некоторая кривая в плоскости  $F\Psi$ , начинающаяся и кончающаяся в точке  $C$ , т. е. изображающая безударное движение газа. На  $C_+^\circ$ -характеристике при подходе к ней справа и слева имеем

$$\frac{df_2}{d\xi} = A_2 \quad (3.2)$$

и в соответствии с изложенным выше

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right]_2 = 0$$

Равенствам (1.10), (3.1) и (3.2), которые должны удовлетворяться на концах интервала при интегрировании уравнения (1.4) в области  $\mathcal{Z}$ , можно придать вид

$$f_1 = 4\xi_1^2, \quad \frac{df_1}{d\xi} = 2\xi_1 \quad \text{при } \xi = \xi_1, \quad f_2 = 4\xi_2^2, \quad \frac{df_2}{d\xi} = 2\xi_2 \quad \text{при } \xi = \xi_2$$

Одновременное выполнение последних четырех равенств делается возможным потому, что концы интервала  $P(\xi_1, f_1)$  и  $Q(\xi_2, f_2)$  являются осо-

быми точками уравнения (1.4), через которые проходит бесчисленное множество интегральных кривых с одинаковым наклоном. В самом деле, вычисляя корни  $df^* / d\xi$  выражения

$$\left(\frac{df}{d\xi}\right)^2 + 2\xi \frac{df}{d\xi} - 8\xi^2 = 0$$

имеем

$$\frac{df_{1,2}}{d\xi} = (-1 \pm 3)\xi$$

Это утверждение следует также из того, что точка  $C$  — особая для уравнения (1.12).

Используя неравенства  $\xi_1 < 0$ ,  $\xi_2 > 0$  и формулы (3.3), легко видеть, что  $df_1 / d\xi < 0$ , а  $df_2 / d\xi > 0$ , т. е. функция  $f$  не является монотонной в рассматриваемом интервале, когда течение безударно. В соответствии с этим в безударных течениях величина  $u$ , пропорциональная безразмерной скорости в мушкетерских течениях, сначала убывает, а затем возрастает в области между особыми  $C_{\mp}^{\circ}$ -характеристиками вдоль линий  $r = \text{const}$ .

Решению (1.14) в плоскости  $\xi f$  соответствует интеграл

$$f = 3B^2 + \xi^2 \quad (3.4)$$

уравнения (1.4), где буквой  $B$  обозначена произвольная постоянная. По формуле (1.5) вычислим функцию  $g$

$$g = 6B^2\xi - \frac{2}{3}\xi^3$$

Таким образом

$$u = 3B^2r^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2, \quad v = 6B^2xr - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{r}\right)^3 \quad (3.5)$$

Особые  $C_{\mp}^{\circ}$ -характеристики в построенном течении расположены симметрично относительно оси  $r$

$$x = -Br^2 \quad (C_-^{\circ}\text{-характеристика}), \quad x = Br^2 \quad (C_+^{\circ}\text{-характеристика}) \quad (3.6)$$

Удовлетворяя граничным условиям в форме (1.10), находим

$$B = \frac{1}{4}A_1, \quad A_2 = 2B$$

Отсюда следует, что в области, заключенной между особыми линиями Маха (3.6), рассматриваемое движение газа реализуется, когда значение производной  $du / dx$  во входной части сопла в два раза больше значения этой производной в области 2. Как показывают формулы (3.5), аналитическое продолжение течения во внешнюю по отношению к  $C_{\mp}^{\circ}$ -характеристикам область обладает в точке  $x = r = 0$  особенностью типа Прандтля — Мейера. Направление скорости частиц в решении (3.5) параллельно оси канала в точках оси  $r$  и вдоль парабол

$$x = \mp 3Br^2$$

расположенных симметрично относительно оси  $r$  за проходящими через центр сопла линиями Маха. Из указанных линий только ось  $r$  принадлежит потоку в окрестности критического сечения.

Поставим в формулах (3.4) и (3.5) перед постоянной  $B^2$  знак минус; тогда получим течение газа, изображенное на фиг. 4. Хотя оно и не имеет прямого отношения к задаче, но представляет интерес как пример смешанного потока, сверхзвуковая часть которого переходит в точке  $x = r = 0$  в центрированную простую волну.

Перейдем теперь к исследованию предельного случая безударных неаналитических течений, когда их изображением в плоскости  $F\Psi$  служит  $K_1$ -кривая, проходима в обратном направлении. В области  $\mathcal{Z}$  между особыми линиями Маха уравнение (1.4) имеет решение

$$f = \frac{1}{8} A_1^2 - \frac{1}{2} A_1 \xi \quad (3.7)$$

вида (1.6), в котором постоянной  $A$  придано значение  $-\frac{1}{2}A_1$ . Течение газа в этой области описывается простыми формулами (1.7) — (1.8), где также нужно произвести указанную замену постоянных. Величина  $A_2$  выражается через  $A_1$  равенством

$$A_2 = \frac{1}{4} A_1 \quad (3.8)$$

Из формулы (3.7) следует, что в этом предельном случае безударных течений со слабыми разрывами производная  $df/d\xi$  всюду меньше нуля, т. е. вдоль прямых  $r = \text{const}$  скорость в области потока, ограниченной  $C_{\mp}^{\circ}$ -характеристиками, монотонно убывает.

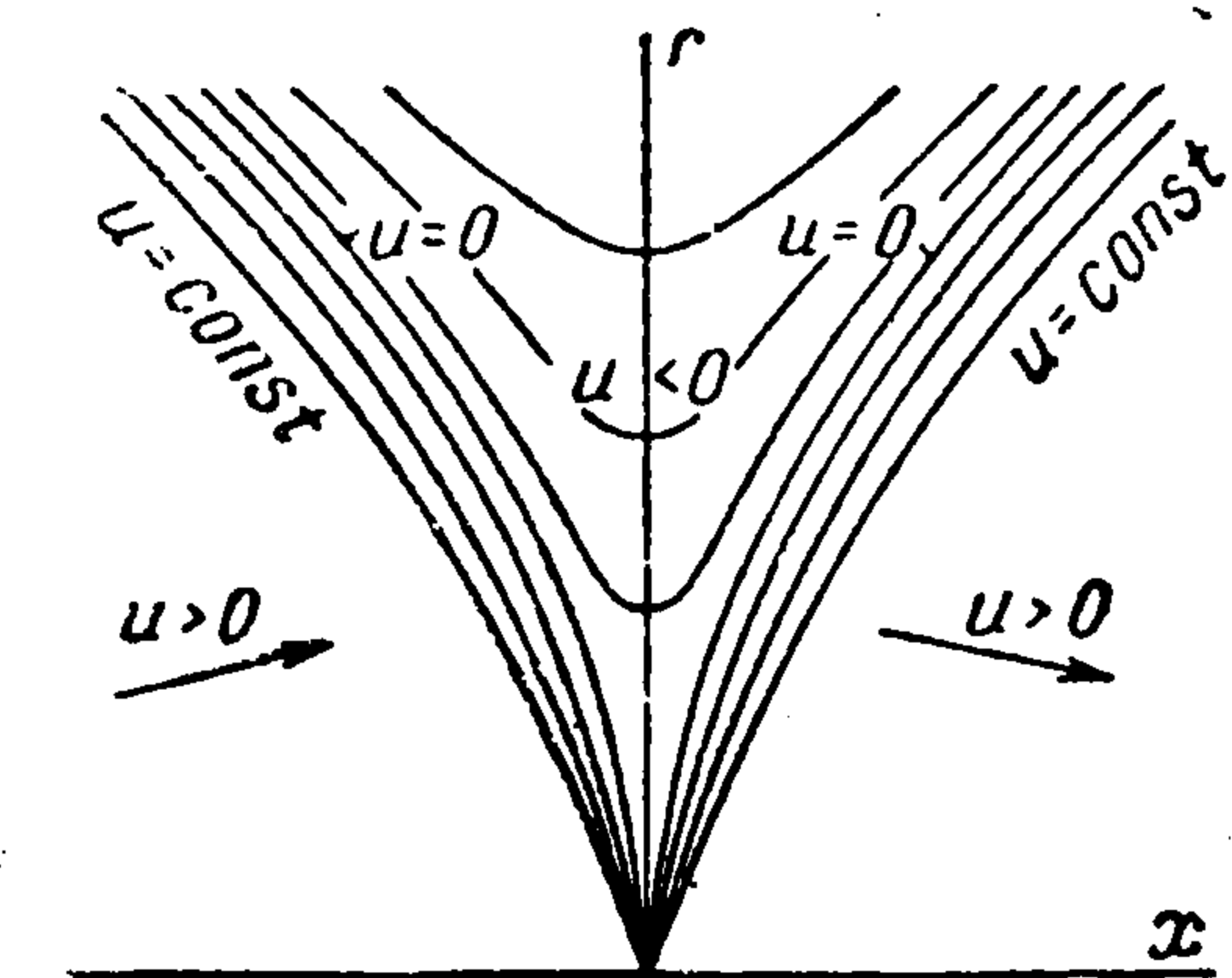
Течения, отображающиеся в плоскости  $F\Psi$  на  $K_1$ -кривую, проходиму в прямом и обратном направлениях, будут среди непрерывных предельными, поэтому отсюда легко получить неравенства Ф. И. Франкля [2]

$$\frac{1}{4} \leq A_2 / A_1 \leq 1 \quad (3.9)$$

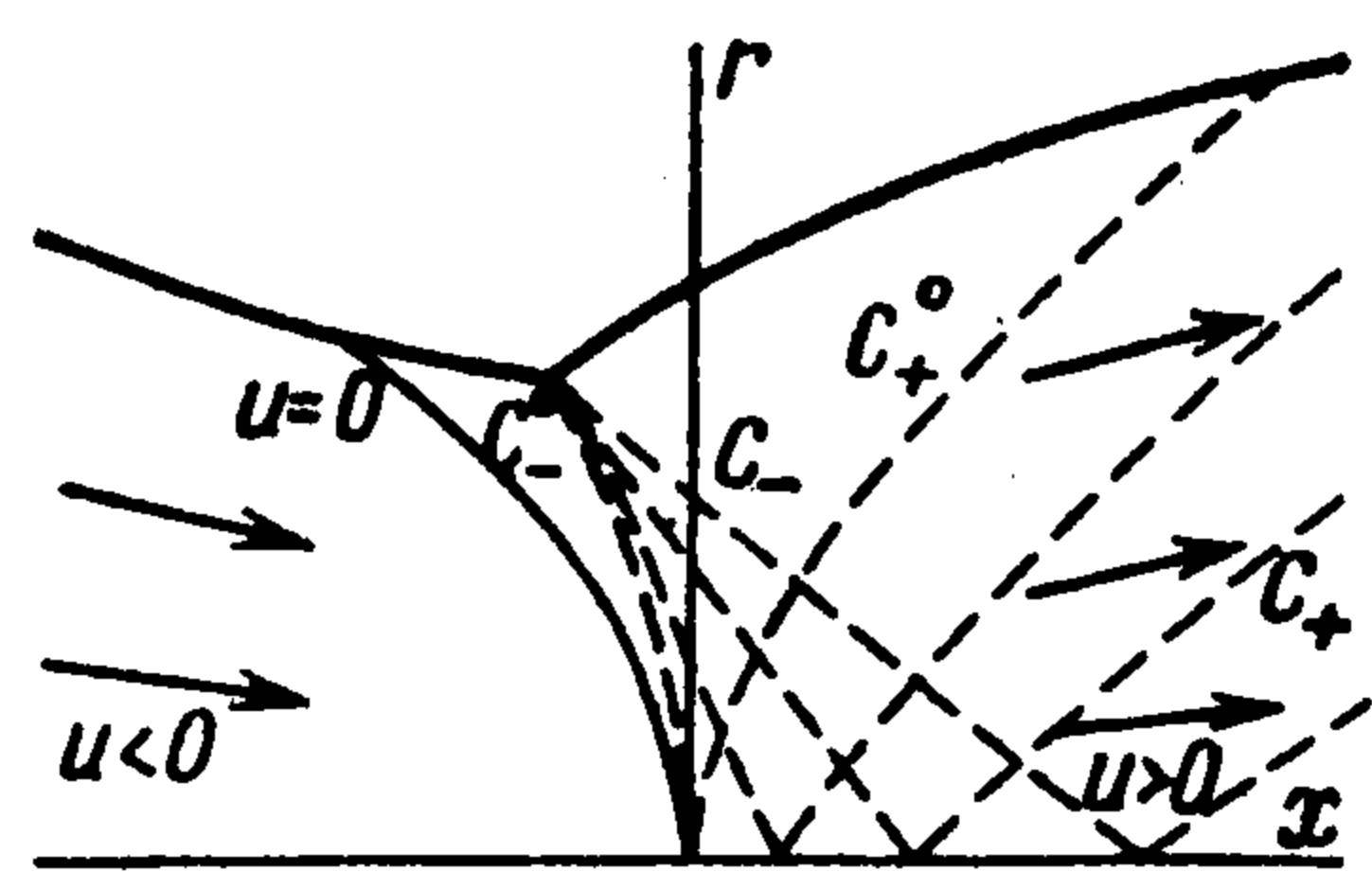
выполнение которых достаточно для безударного характера потока. Подчеркнем следующий факт, который непосредственно устанавливается из проведенного анализа интегральных кривых в плоскости  $F\Psi$ . В области,

расположенной вблизи центра сопла вниз по потоку за  $C_-^{\circ}$ -характеристикой, производная  $du/dx$ , определяющая скорость разгона дозвукового течения в сверхзвуковое, не может превзойти ее значения во входной части. Даже в том случае, когда сопло имеет вид, изображенный на фиг. 5, и в окрестности излома его стенки реализуется течение Прандтля — Мейера, верно равенство

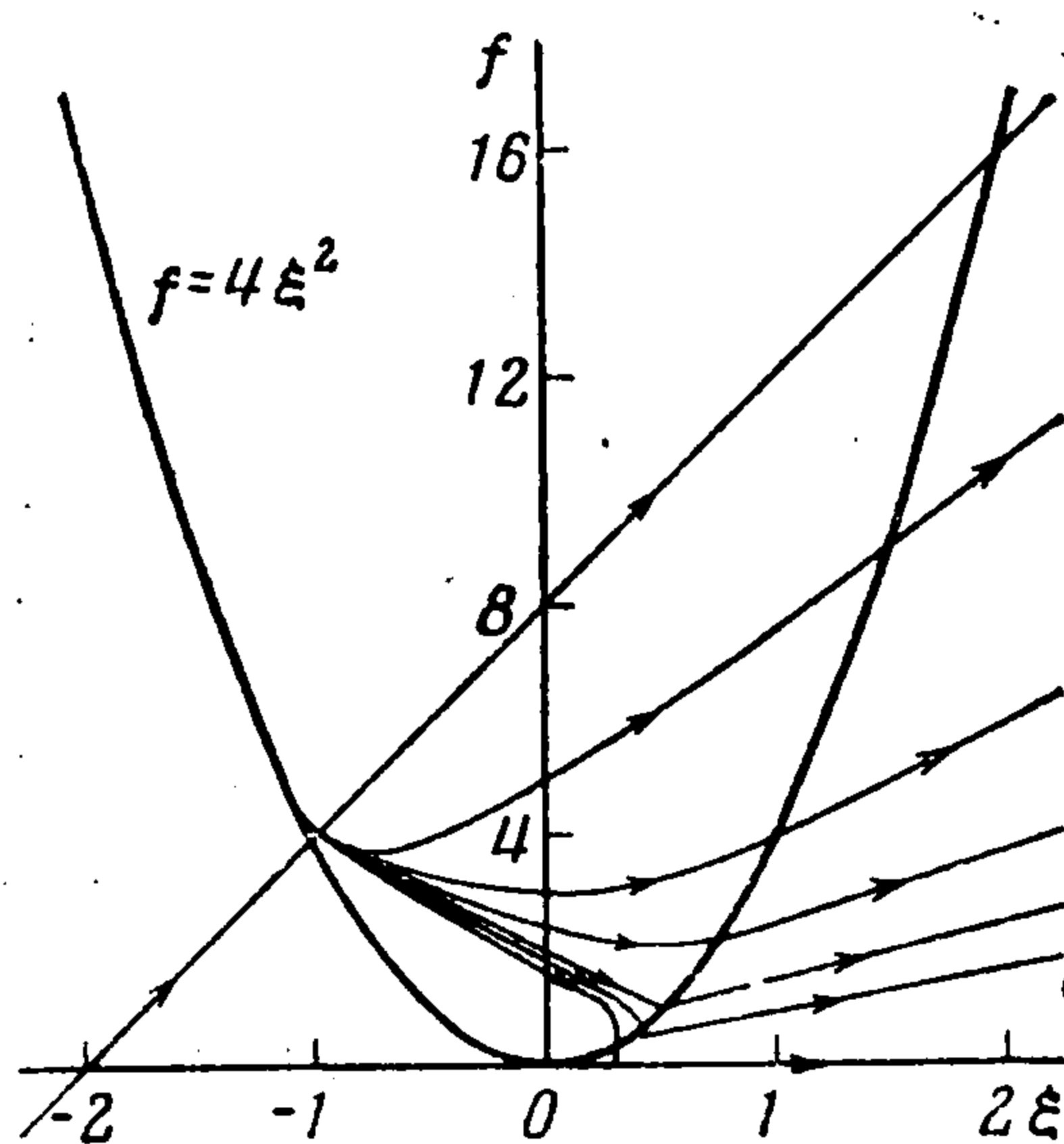
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=-0, r=0} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=+0, r=0}$$



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Поведение интегральных кривых в плоскости  $\xi f$  изображено на фиг. 6. Для непрерывных течений обе граничные точки  $P(\xi_1, f_1)$  и  $Q_i(\xi_{2i}, f_{2i})$

лежат на параболе  $f = 4\xi^2$ , как это непосредственно следует из равенств (3.3). Прямая  $f = 1/2 A_1^2 + A_1 \xi$ , соответствующая аналитическому потоку, и прямая  $f = 1/8 A_1^2 - 1/2 A_1 \xi$ , соответствующая потоку с разрывами первых производных на обеих особых характеристиках, являются предельными. Все остальные интегральные кривые в плоскости  $\xi f$ , выходящие из точки  $P$  и описывающие безударные течения газа, расположены между ними. Производная  $df/d\xi$  на обоих концах рассматриваемых кривых имеет ограниченные значения.

Соотношение (3.4) дает кривую, симметричную относительно оси  $\eta$ . Выше ее проходят кривые, которым в плоскости  $F\Psi$  отвечают интегральные кривые уравнения (1.12) со следующим расположением ветвей. Их ветви, идущие из точки  $C$  в бесконечно удаленную точку  $E$ , заключены между  $K_2$ -прямой и нижней ветвью кривой  $K_1$ ; ветви, идущие в противоположном направлении из точки  $E$  в точку  $C$ , находятся между  $K_2$ -прямой и верхней ветвью кривой  $K_1$ . Между кривой (3.4) и прямой (3.7) расположены интегральные кривые уравнения (1.4), которым в плоскости  $F\Psi$  соответствуют те же самые кривые, начинающиеся и кончающиеся в точке  $C$ , но ветви последних проходятся в обратном направлении.

Интегральные кривые, находящиеся выше кривой (3.4), получаются при  $1/2 < A_2/A_1 < 1$ ; интегральные кривые, заключенные между кривой (3.4) и прямой (3.7), получаются при  $1/4 < A_2/A_1 < 1/2$ .

Требование непрерывности функции  $f$  при переходе через особые линии Маха, которое удовлетворялось до сих пор при построении безударных течений, обеспечивает непрерывность составляющей скорости потока и вдоль оси  $x$ . Для непрерывности величины  $v$  на  $C_{\pm}^{\circ}$ -характеристиках необходимо, чтобы и функция  $g$  не имела разрывов. Так как вдоль линий Маха, касающихся в центре сопла звуковой кривой,  $f = 4\xi^2$ , то из формулы (1.5) следует, что это условие также выполняется.

Рассмотрим теперь течения газа с ударными волнами. В плоскости  $F\Psi$  они изображаются кривыми, идущими из точки  $C$  в точку  $E$  над верхней ветвью  $K_1$ -кривой; их продолжения, начинающиеся в точке  $E$ , при  $F \rightarrow 4$  уходят вниз на бесконечность. Соответствующие интегральные кривые уравнения (1.4), описывающие течения с разделяющими области 3 и 2 ударными волнами, расположены на фиг. 6 под прямой (3.7). Их нижней границей служит кривая, которая изображает поток с критическими значениями параметров газа за скачком уплотнения. Отметим, что наклон рассматриваемых интегральных кривых в плоскости  $\xi f$  непрерывно уменьшается и в точках пересечения с правой ветвью параболы  $f = 4\xi^2$  становится по абсолютной величине бесконечным. В то же время наклон кривых, идущих выше прямой (3.7), имеет минимальное значение в точке  $P$ , а затем непрерывно увеличивается. Отсюда следует, что причиной образования ударных волн в окрестности критического сечения сопла является такое уменьшение скорости потока за  $C_-^{\circ}$ -характеристикой, которое происходит более резко, чем по линейному закону.

Так как правая ветвь параболы  $f = 4\xi^2$  соответствует  $C_+^{\circ}$ -характеристике, то состояние газа перед ударной волной изображается точка-

ми, лежащими над ней; состояние позади ударной волны — точками, находящимися ниже ее. В предельном случае, когда скорость за ударной волной совпадает с критической скоростью, течению позади фронта волны на фиг. 6 соответствует ось  $\xi$ . В этом случае  $A_2 = 0$  и во всей области 2 реализуется равномерный поток, текущий со скоростью звука параллельно оси  $x$ . Отсюда заключаем, что в диапазоне значений

$$0 < A_2 / A_1 < \frac{1}{4} \quad (3.10)$$

в потоке образуется ударная волна, по обе стороны которой скорость сверхзвуковая. Неравенства (3.10) обеспечивают также дальнейшее увеличение скорости в области 2.

Прямой (1.15) в плоскости  $F\Psi$  соответствует интегральная кривая

$$f = d\sqrt{\xi}, \quad d = \text{const} \quad (3.11)$$

уравнения (1.4), которая упирается в начало координат  $\xi = f = 0$  и имеет там бесконечную по абсолютной величине производную. Согласно полученным в предыдущем параграфе результатам, интегральная кривая, описывающая поток с критическими значениями параметров позади ударной волны, расположена выше кривой (3.11).

Для точного построения интегральных кривых в области 3 можно воспользоваться формулой

$$f = 4c\xi + 8c^2 + d\sqrt{c + \xi} \quad (3.12)$$

которая получена С. В. Фальковичем [3] и дает общее решение уравнения (1.4), зависящее от двух произвольных постоянных  $c$  и  $d$ . При  $c = 1/4 A$  и  $d = 0$  имеем отсюда основное решение (1.6), при  $c = 0$  формула (3.12) переходит в решение (3.11). Особое решение (3.4) также можно вывести из написанного равенства при помощи предельного перехода, который будет указан ниже.

Используя формулу (3.5), имеем

$$g = \frac{1}{3} (48c^2\xi + 32c^3 + \frac{1}{2}d^2 + 8cd\sqrt{c + \xi} + 2d\xi\sqrt{c + \xi})$$

Таким образом, безразмерные компоненты  $u$  и  $v$  скорости потока в области 3 определяются соотношениями

$$\begin{aligned} u &= 4cx + 8c^2r^2 + dr\sqrt{x + cr^2} \\ v &= \frac{1}{3} [48c^2xr + (32c^3 + \frac{1}{2}d^2)r^3 + 2d(4cr^2 + x)\sqrt{x + cr^2}] \end{aligned} \quad (3.13)$$

Соотношения (3.13) показывают, что во входной и выхлопной частях сопла только основное решение (1.6) дает симметричное относительно оси  $x$  движение газа.

Прежде чем вычислять значения постоянных  $c$  и  $d$ , заметим, что уравнение (3.12) не изменяется при переходе к новым величинам

$$\xi \rightarrow \frac{\xi}{4/A_1}, \quad f \rightarrow \frac{f}{16/A_1^2} \quad (3.14)$$

Такая замена удобна тем, что любое движение газа в области 1 в новых переменных описывается формулой

$$f = 8 + 4\xi$$

не зависящей от значения постоянной  $A_1$ , в то время как все остальные выражения сохраняют прежний вид. Пусть указанная замена уже произведена. Тогда на фиг. 6 точка  $P$ , изображающая  $C_-$ -характеристику, будет иметь координаты  $\xi = -1, f = 4$ . Все интегральные кривые уравнения (1.4), проходящие через область 3, должны начинаться в точке  $P$  и обладать в ней производной  $df/d\xi = -2$ . Отсюда находим

связь между постоянными  $c$  и  $d$

$$d = -8 \left( c + \frac{1}{2} \right) \sqrt{c-1} \quad (3.15)$$

Рассмотрим безударное течение со слабыми разрывами вдоль особых линий Маха. Изображающая его интегральная кривая должна иметь в точке  $Q(\xi_2, 4\xi_2^2)$  ограниченную производную  $df/d\xi = 2\xi_2$ . Это требование определяет постоянную  $c$

$$c = \frac{\xi_2^2 - \xi_2 + 1}{3(\xi_2 - 1)}$$

Используя две последние формулы, находим

$$f = \frac{4}{3} \frac{\xi_2^2 - \xi_2 + 1}{\xi_2 - 1} \xi + \frac{8}{9} \frac{(\xi_2^2 - \xi_2 + 1)^2}{(\xi_2 - 1)^2} + \\ + \frac{4}{9} \frac{(2\xi_2^2 + \xi_2 - 1)(\xi_2 - 2)}{(\xi_2 - 1)^2} \sqrt{3(\xi_2 - 1)\xi + \xi_2^2 - \xi_2 + 1} \quad (3.16)$$

Устремим значение координаты  $\xi_2$  к 1. При этом  $c \rightarrow \pm\infty$ . Выполняя предельный переход при  $\xi_2 \rightarrow 1$ , из решения (3.16) получим интеграл (3.4). Решение (3.16) удовлетворяет всем граничным условиям в точках  $P$  и  $Q$  только в том случае, если

$$\frac{1}{2} \leq \xi_2 \leq 2$$

Полученное соотношение легко преобразовать к виду (3.9), в котором было записано условие, обеспечивающее безударный характер течения.

Пусть теперь формулы (3.12) и (3.13) описывают течение с исходящим из центра сопла скачком уплотнения. Связь (3.15) между фигурирующими в них постоянными будет по-прежнему иметь место. Изображающая разрывное течение кривая в плоскости  $\xi f$  пересекает параболу  $f = 4\xi^2$ , когда  $\xi = \xi_*$ , причем согласно предыдущему

$$0 < \xi_* < \frac{1}{2}$$

В точке  $Q(\xi_*, 4\xi_*^2)$  производная  $df/d\xi$  обращается по абсолютному значению в бесконечность. Интегральную кривую, удовлетворяющую поставленным требованиям, можно определить как

$$f = -4\xi_*\xi + 8\xi_*^2 + 8 \left( \frac{1}{2} - \xi_* \right) \sqrt{(\xi_* + 1)(\xi_* - \xi)}$$

Координата  $\xi_2$  скачка уплотнения в формуле (2.3) и величины  $f_2$  и  $f_3$  находятся из граничных условий (2.4) и (2.5), но последние слишком громоздки и не имеют явных решений. Для их вычисления удобно снова возвратиться к плоскости  $F\Psi$ , в которой общее решение (3.12), (3.13) представится как

$$F = -4z + 8z^2 + ez^{3/2}(z-1)^{1/2} \\ \Psi = - \left[ -4z + 16z^2 + 2ez^{3/2}(z-1)^{1/2} + \frac{1}{2} ez^{3/2}(z-1)^{-1/2} \right] \quad (3.17)$$

Здесь

$$e = 4 \frac{1 - \xi_* - 2\xi_*^2}{\xi_*^{3/2}(1 + \xi_*)^{1/2}}, \quad z = \frac{\xi_*}{\xi} \quad (3.18)$$

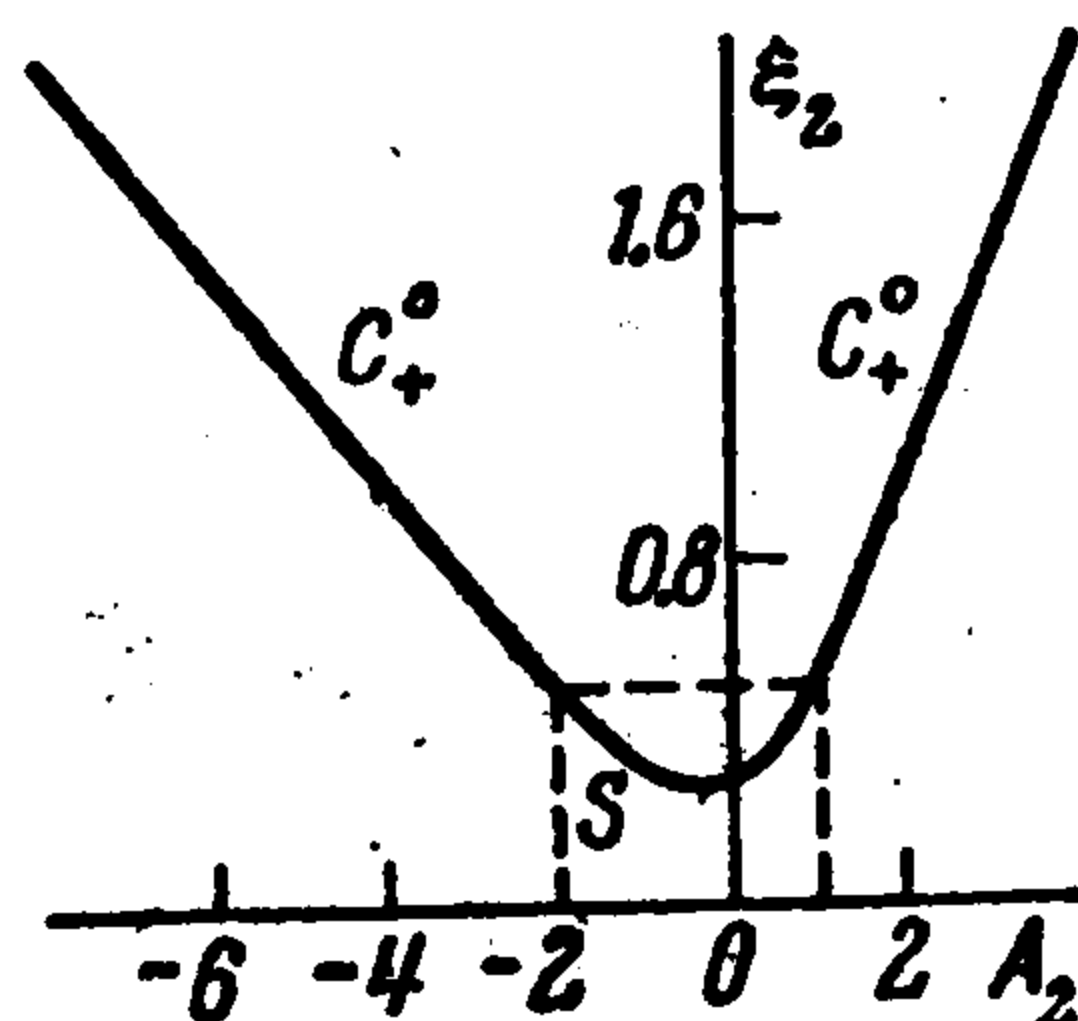
Для поставленных задач представляют интерес только те ветви кривых (3.17), которые получаются при  $z \geq 1$ . Точки их пересечения с кривой (2.9) дают значения  $F_3$  и  $\Psi_3$ , соответствующие состоянию газа перед ударным фронтом. Значения  $F_2$  и  $\Psi_2$  величин  $F$  и  $\Psi$  за скачком уплотнения получаются из формул (2.6) и (2.7). Обозначим через  $z_2$  величину параметра  $z$ , при которой достигается пересечение кривых (2.9) и (3.17). Координата  $\xi_2$  скачка уплотнения в формуле (2.3) находится тогда из второго равенства (3.18), где положено  $z = z_2$ . Постоянная  $A_2$ , которая выражает скорость расширения потока в области 2, вычисляется из соотношения (2.8). Наконец, используя формулы (1.11), а затем (1.5), можно определить значения функций  $f$  и  $g$  по обе стороны ударной волны.

На фиг. 7 показана зависимость величины  $\xi_2$  от постоянной  $A_2$ , построенная с учетом замены (3.14). В диапазоне значений  $1 \leq A_2 \leq 4$  линией  $\xi_2 = \text{const}$  служит  $C_+$ -характеристика. В этом случае связь между  $\xi_2$  и  $A_2$  ливейна, она вычисляется по последней из формул (1.10). В интервале  $0 \leq A_2 < 1$  параболой  $\xi_2 = \text{const}$

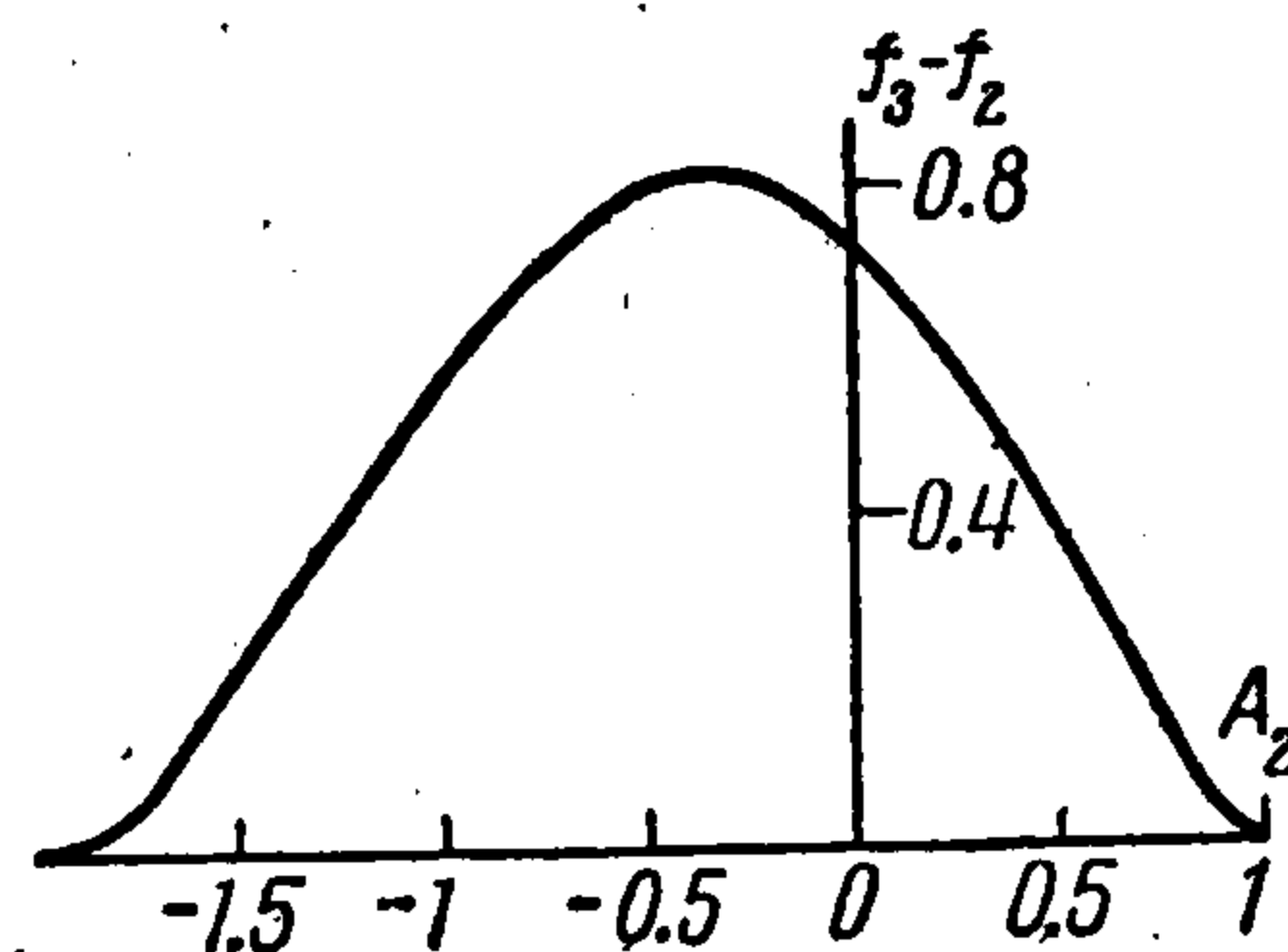
является скачок уплотнения. Как видно из фиг. 7, при  $A_2 \rightarrow 0$  его положение с изменением  $A_2$  меняется мало. Форма ударного фронта, за которым параметры газа достигают критических значений, дается равенством

$$x = 0.075 A_1 r^2$$

Когда  $A_2 \rightarrow 1$  и интенсивность скачка уплотнения невелика, зависимость  $\xi_2$  от  $A_2$  близка к линейной. При  $A_2 = 1$  наклон определяющей положение ударного



Фиг. 7



Фиг. 8

фронта кривой совпадает с наклоном прямой  $\xi_2 = \frac{1}{2} A_2$ , задающей положение  $C_+^0$ -характеристики. В соответствии с формулами (2.4) и (1.11) имеем

$$f_3 - f_2 = \xi_2^2 (8 - 2F_2)$$

Написанное соотношение определяет интенсивность скачка уплотнения, т. е. разрыв в величинах скорости, давления, плотности и температуры при переходе через ударный фронт. Разрыв в величине угла наклона вектора скорости по отношению к оси сопла дается равенством

$$g_3 - g_2 = -2\xi_2^3 (8 - 2F_2)$$

На фиг. 8 изображена зависимость  $f_3 - f_2$  от постоянной  $A_2$ , построенная также с учетом замены (3.14). Как видно из фиг. 8, вначале (при  $1 > A_2 > 0.9$ ) интенсивность скачка уплотнения возрастает медленно с уменьшением  $A_2$ . При  $0.1 < A_2 < 0$  связь между  $f_3 - f_2$  и  $A_2$  оказывается близкой к линейной. Используя данные приведенные на фиг. 7 и 8, легко получить разность  $g_3 - g_2$  в функции от  $A_2$ .

До сих пор исследованию подлежали течения, характер которых в окрестности горла сопла меняется с дозвукового на сверхзвуковой. Рассмотренный тип движений газа осуществляется, когда разность давлений на входе и выходе сопла достаточно велика. Если же давление на входе не очень сильно превосходит давление в выхлопной части, то поток будет дозвуковым по обе стороны горла сопла, но может содержать сверхзвуковые области, прилегающие к стенкам в окрестности критического сечения. С уменьшением давления на выходе размеры местных сверхзвуковых зон увеличиваются, и, наконец, они сливаются на оси канала. Такой поток является предельным в том смысле, что при дальнейшем понижении давления в выхлопной части тип течения меняется и поле скоростей за критическим сечением становится сверхзвуковым.

§ 4. Течения с местными сверхзвуковыми зонами. Рассмотрим движение газа предельного вида, когда прилегающие к стенкам сопла местные сверхзвуковые зоны замыкаются на его оси. Для этого рассмотрим снова задачу Коши (1.2), но будем считать, что  $A_1 > 0$ , а  $A_2 < 0$ . В области 1 искомое решение будет по-прежнему даваться формулами (1.7), а в области 2 — формулами (1.8), откуда следует, что соответствующий ему поток является дозвуковым по обе стороны горла канала. Ограничивающие местную сверхзвуковую область линии перехода в безударных течениях будут

$$x = -\frac{1}{2} A_1 r^2, \quad x = -\frac{1}{2} A_2 r^2$$

В то время как первая из этих линий, оставшаяся неизменной, вогнута в сторону набегающего потока, вторая вогнута в противоположную сторону, которая расположена вниз по потоку. В разрывных течениях, как мы увидим в дальнейшем, местную сверхзвуковую область может сзади замыкать скачок уплотнения.

Проходящая через центр сопла особая  $C_-^{\circ}$ -характеристика определяется первой из формул (1.9),  $C_+^{\circ}$ -характеристика запишется как

$$x = -\frac{1}{4} A_2 r^2 \quad (4.1)$$

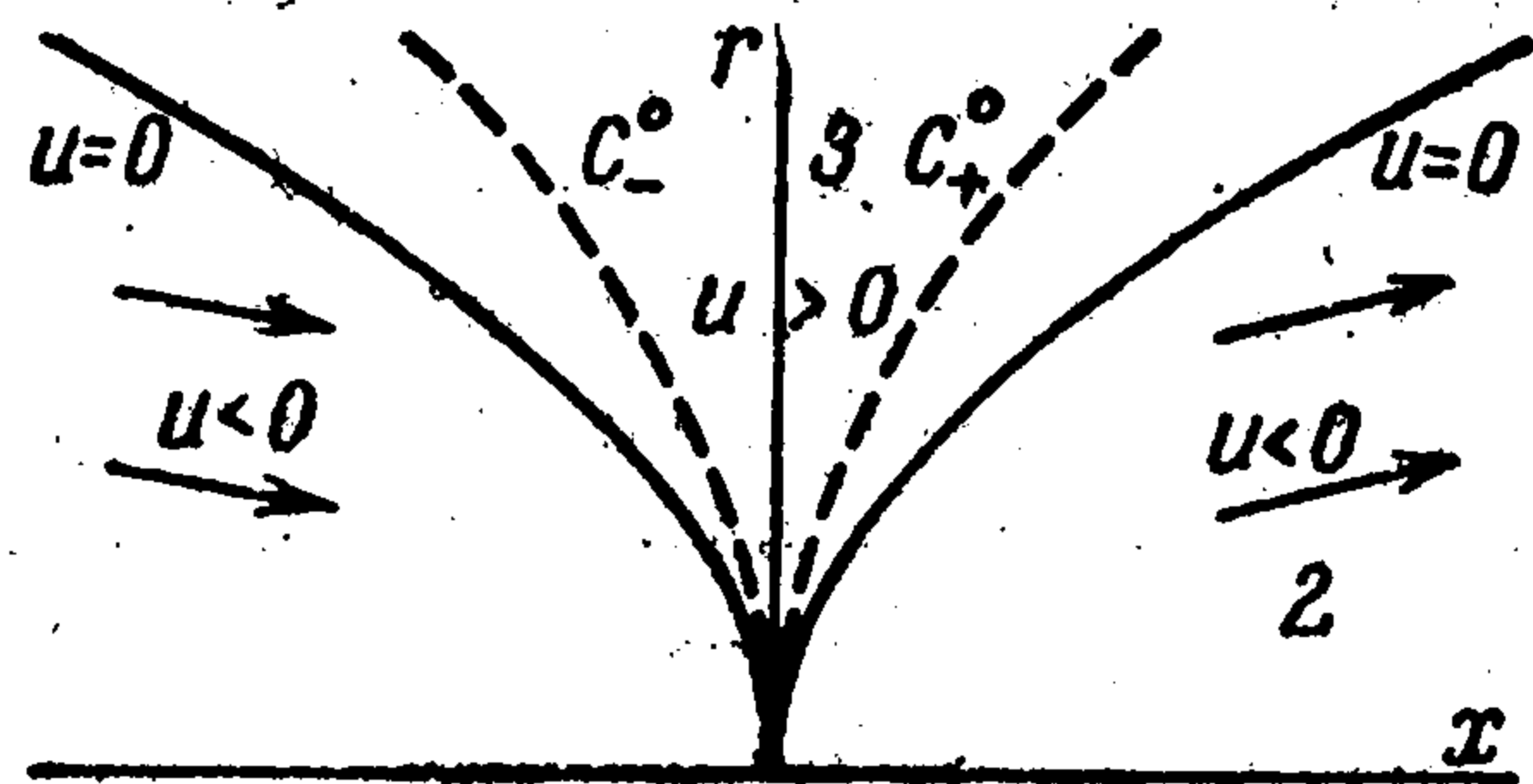
Результаты § 2 показывают, что  $C_+^{\circ}$ -характеристика существует только в потоке, лишенном ударных волн, его структура в окрестности центра сопла изображена на фиг. 9.

При интегрировании уравнения (1.4) в области 3 первое из граничных условий (1.10) остается неизменным. Если течение безударно, то согласно равенству (4.1) второе условие (1.10) надо заменить на

$$f = f_2 = \frac{1}{4} A_2^2 \quad \text{при} \quad \xi = \xi_2 = -1/4 A_2 \quad (4.2)$$

Так как  $A_2 < 0$ , то

$$\xi_2 > 0$$



Фиг. 9

Если в потоке имеется скачок уплотнения, то граничное условие, которое должно быть удовлетворено на правом конце интервала при интегрировании уравнения (1.4) в области 3, имеет по-прежнему вид (2.4), (2.5).

Воспользуемся снова фазовой плоскостью  $F\Psi$ , причем, как обычно, вначале будем отвлекаться от связи между характером потока в окрестности центра сопла и значениями постоянных  $A_1$  и  $A_2$ . Так как течение в области 1 осталось неизменным, то оно на фиг. 2 изображается отрезком  $K_1$ -кривой, расположенным между точками  $A$  и  $D$  и имеющим прежнее направление обхода. Согласно равенству (2.8) при  $\xi_2 > 0$   $A_2 < 0$  либо в том случае, когда  $F_2 < 0$  и перед корнем выбран верхний знак, либо когда при произвольном допустимом значении  $F_2$  перед корнем взят нижний знак. Рассуждения, аналогичные проведенным в § 2, показывают, что значения  $\xi_2$  для всех рассматриваемых течений остаются положительными. Поэтому область 2 движений газа с сомкнувшимися на оси сопла местными сверхзвуковыми зонами изобразится отрезком  $K_1$ -кривой, который также расположен между точками  $A$  и  $D$ , но имеет противоположное направление обхода, т. е. от точки  $D$  к точке  $A$ .

Рассмотрим течения, лишенные ударных фронтов. Простейшим из них является поток, который изображается  $K_1$ -кривой, проходимой в прямом направлении от точки  $A$  до точки  $C$  с последующим скачком из точки  $C$  в точку  $D$ . В областях 1 и 3 построенное течение совпадает с движением газа с переходом через скорость звука в аналитическом сопле Лавалья. В нем  $C_-^{\circ}$ -характеристика не несет никаких особенностей, вдоль  $C_+^{\circ}$ -характеристики терпят разрывы первые производные составляющих скорости по координатам [9]. Удовлетворяя граничному условию (4.2), получим значение производной  $du/dx$  в области 2

$$A_2 = -2A_1 \quad (4.8)$$

Это — наименьшее значение  $A_2$  при заданном значении  $A_1$ . В соответствии с формулой (4.3) получим

$$[du/dx]_2 = -3A_1$$

Во всех остальных течениях рассматриваемого типа приходящая в центр сопла  $C_-^{\circ}$ -характеристика является носителем разрывов первых производных компонент скорости. Движение газа в области 3 изображается в плоскости  $F\Psi$  интегральными кривыми, начинающимися и кончающимися в точке  $C$ . Таким образом, параметры среды во всем пространстве слева от исходящей из центра сопла  $C_+^{\circ}$ -характеристики в течениях с местными сверхзвуковыми зонами и в соответствующих течениях с переходом через скорость звука совпадают. При переходе через  $C_-^{\circ}$ -характеристику равенство (3.1) остается справедливым.

При продолжении течения из области 3 в область 2 в плоскости  $F\Psi$  нужно совершить скачок из точки  $C$  в точку  $D$ .  $C_+^{\circ}$ -характеристика в движениях газа с местными сверхзвуковыми зонами также несет разрывы первых производных со-

ставляющих скорости по координатам. При помощи последнего из равенств (3.3) находим величину этого разрыва

$$[\partial u / \partial x]_2 = 3/2 A_2 < 0$$

Только в течениях, изображением которого в плоскости  $F\Psi$  служит проходимость в обратном направлении  $K_1$ -кривая,  $C_+$ -характеристика лишена каких бы то ни было особенностей. Действительно, в этом случае кривая  $K_1$  проходит от точки  $A$  до точки  $D$  с последующим скачком в точку  $C$ ; от точки  $C$  движение по  $K_1$ -кривой идет через бесконечно удаленную точку  $E$  до точки  $D$  и далее через эту точку опять в точку  $A$ . Течение в областях 3 и 2 описывается формулой (3.7), откуда следует, что наибольшее значение  $A_2$ , обеспечивающее безударный характер потока с сомкнувшимися на оси канала сверхзвуковыми зонами, равно

$$A_2 = -0.5 A_1 \quad (4.4)$$

Равенство (4.4) аналогично (3.8).

Течения, отображающиеся в плоскости  $F\Psi$  на  $K_1$ -кривую, проходимость в прямом и обратном направлениях, являются по-прежнему предельными среди непрерывных. Отсюда находим, что соответствующий непрерывным течениям диапазон значений  $A$  определяется неравенствами

$$-2 \leq A_2 / A_1 \leq -0.5 \quad (4.5)$$

которые дополняют неравенства (3.9) Ф. И. Франкля, относящиеся к течениям с переходом через скорость звука.

Решению (3.4), (3.5) соответствует поток, симметричный не только относительно оси канала  $x$ , но и относительно оси  $r$ . Ему отвечает, очевидно, значение  $A_2 = -A_1$ .

Перейдем к изучению течений с местными сверхзвуковыми зонами, которые содержат ударные волны. Как и в рассмотренных выше непрерывных течениях, в большинстве течений с ударными волнами параметры газа в областях 1 и 3 совпадают с параметрами газа в соответствующих им движениях, где совершается переход от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым. В плоскости  $F\Psi$  их изображением служат те же самые кривые, которые выходят из точки  $C$  над верхней ветвью кривой  $K_1$  и продолжения которых, начинающиеся в  $E$ , лежат под нижней ветвью кривой  $K_1$ . Однако скачок с рассматриваемых интегральных кривых происходит не на отрезок  $CA$  кривой  $K_1$ , а на отрезок  $DA$ . Поэтому состояние газа перед ударным фронтом изображается либо точками верхней ветви

$$\Psi_3 = -(19 + 2F_3 - \sqrt{17 - 2F_3}) \quad (4.6)$$

кривой  $K_1^*$ , где  $4 < F_3 \leq 8.5$ , либо точками нижней ветви (2.9) кривой  $K_1^*$ , где  $F_8 < F_3 \leq 8.5$  (фиг. 2). Значение  $F_8$  величины  $F$  получается при пересечении  $K_1^*$ -кривой и интегральной кривой уравнения (1.12), проходящей в плоскости  $F\Psi$  через точку  $(8, -36)$  и изображающей течение газа с критическими значениями параметров в области 2. Эту кривую будем обозначать буквой  $K_4$ . Скачок уплотнения в течениях с местными сверхзвуковыми зонами возникает раньше, чем в соответствующих им движениях, где реализуется переход от дозвуковых скоростей в области 1 к сверхзвуковым в области 2.

Ниже кривой  $K_4$  в плоскости  $F\Psi$  проходят интегральные кривые уравнения (1.12), которые изображают течения с дозвуковым полем скоростей в области 2 за ударной волной. Ни при одном пересечении этих кривых с нижней ветвью (2.9)  $K_1^*$ -кривой не получается течений, где осуществляется переход через скорость звука в окрестности критического сечения канала.

В плоскости  $\xi f$  течения с ударными волнами даются кривыми, идущими ниже прямой (3.7), их свойства были описаны в предыдущем параграфе. Координата  $\xi_2$  скачка уплотнения находится в результате совместного решения уравнений (3.17) и (4.6), когда  $4 < F_3 \leq 8$ ; (3.17), (2.9) и (3.17), (4.6), когда  $8 < F_3 \leq 8.5$ . Диапазон значений  $A_2$ , соответствующий разрывным движениям, определяется неравенствами

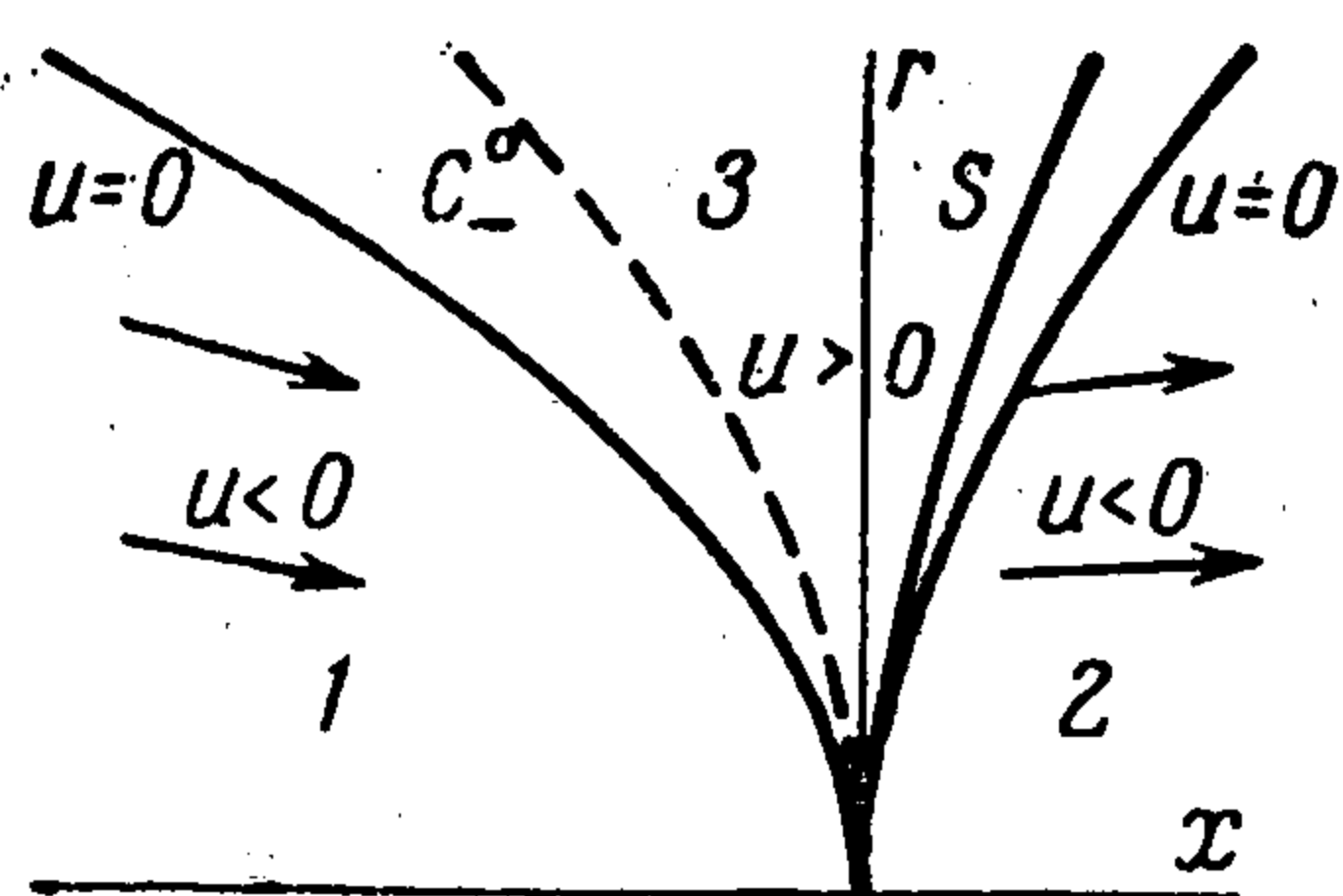
$$-0.5 < A_2 / A_1 < 0 \quad (4.7)$$

Результаты расчетов, показывающие зависимость  $\xi_2$  от  $A_2$  при  $A_2 < 0$ , показаны на левой половине фиг. 7. Как и прежде, принята во внимание замена (3.14). В интервале  $-8 \leq A_2 \leq -2$  параболой  $\xi_2 = \text{const}$  служит  $C_+$ -характеристика, а связь между  $\xi_2$  и  $A_2$  линейна, она дается формулой  $\xi_2 = -0.25A_2$ . В диапазоне значений  $-2 < A_2 < 0$  линией  $\xi_2 = \text{const}$  является скачок уплотнения. При  $A_2 = -2$  прямая  $\xi_2 = -0.25A_2$  переходит в кривую, которая определяет его положение в зависимости от коэффициента  $A_2$ . При  $A_2 \rightarrow 0$  положение ударного фронта мало меняется с изменением  $A_2$ .

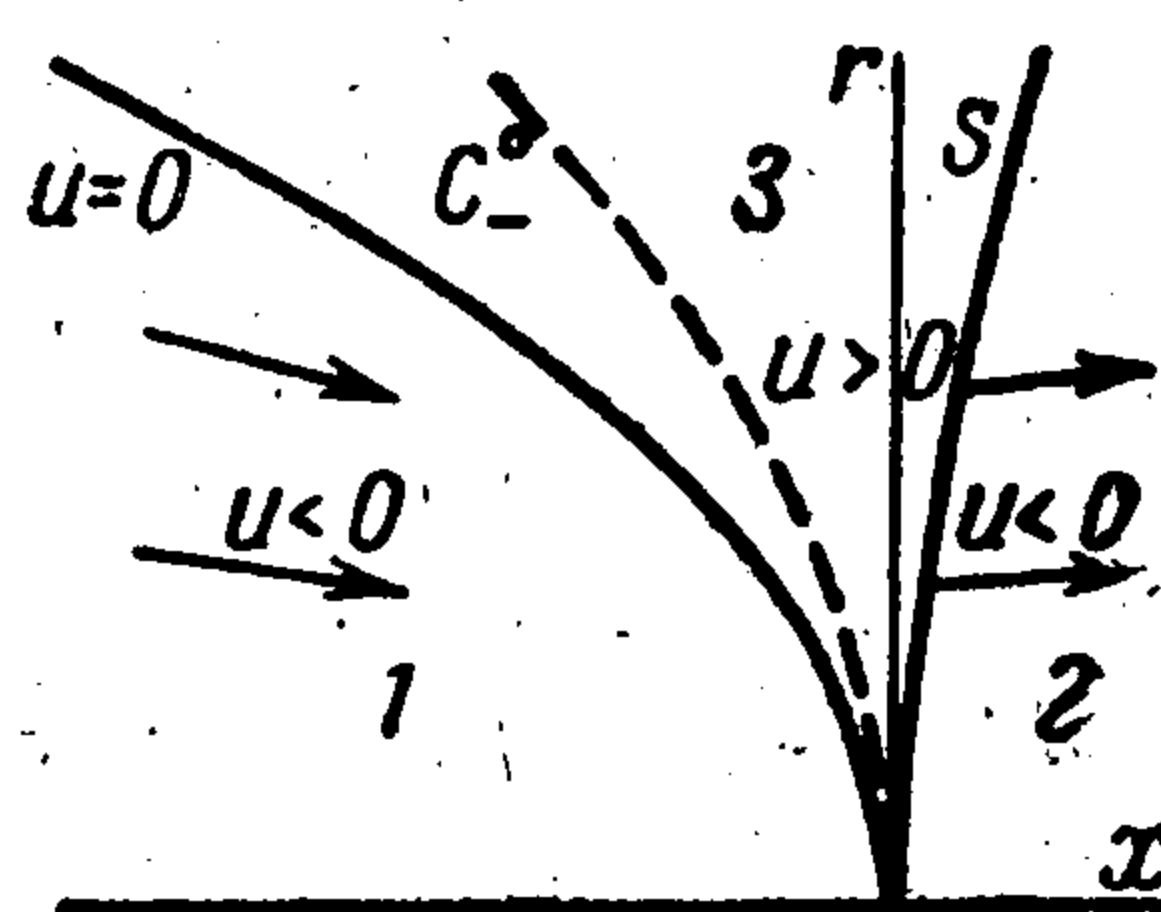
Как показывают расчеты, при

$$-0.5 < A_2 / A_1 < -0.15 \quad (4.8)$$

скорость за скачком уплотнения сверхзвуковая, она становится дозвуковой вниз по потоку за линией  $x = -0.5A_2r^2$ . Такое течение изображено на фиг. 10, соответствующие ему значения  $F_2$  и  $\Psi_2$  лежат на  $K_1$ -кривой в правой полуплоскости  $F\Psi$ .



Фиг. 10



Фиг. 11

При  $A_2 = -0.15 A_1$  скорость за скачком уплотнения равна критической, а ее составляющая вдоль оси  $r$  положительна. Поэтому в области 2 происходит уменьшение скорости. Ударный фронт служит одновременно линией перехода от сверхзвуковых скоростей к дозвуковым. В плоскости  $F\Psi$  ему соответствует точка  $(0, -2)$ , в физической плоскости уравнение скачка запишется как  $x = 0.0775 A_1 r^2$ .

В диапазоне значений

$$-0.15 < A_2 / A_1 < 0 \quad (4.9)$$

скорость за ударным фронтом дозвуковая и продолжает убывать по направлению к выхлопной части сопла. Такое течение изображено на фиг. 11, соответствующие ему значения  $F_2$  и  $\Psi_2$  лежат на  $K_1$ -кривой в левой полуплоскости  $F\Psi$ .

На левой половине фиг. 8 дана зависимость  $\bar{f}_2 - f_2$  от  $A_2$  при  $A_2 < 0$ , построенная с учетом замены (3.14). Как следует из приведенных расчетов, при  $A_2 = -0.0875 A_1$  амплитуда скачка уплотнения достигает наибольшей величины. Формулы (4.8) и (4.9) показывают, что скорость частиц за наиболее интенсивным при заданном значении  $A_1$  скачком уплотнения меньше скорости звука. При значениях  $A_2$ , близких к левому концу интервала (4.7), амплитуда ударного фронта возрастает медленно с увеличением  $A_2$ .

**§ 5. Построение контуров сопел.** Выясним, как меняется форма сопел в окрестности критического сечения в зависимости от величины производной  $du / dx$  в области 2. Выше уже отмечалось, что поток слева от  $C_-$ -характеристики удобно считать одним и тем же для всех рассматриваемых движений газа. Таким образом, входной участок всех сопел будет одинаковым, их форма будет различной в области справа от  $C_-$ -характеристики.

Следует подчеркнуть, что все исследование, которое проводится в работе, носит чисто локальный характер и относится только к непосредственной окрестности центра потока. За стенки сопла принимаем две симметрично расположенные относительно оси  $x$  линии тока, построенные в соответствии с решением задачи Коши (1.2). Поэтому уравнение стенки канала в точке пересечения с  $C_+$ -характеристикой будет иметь

разрыв в третьей производной, в точке пересечения с ударной волной будет скачком меняться угол наклона стенки к оси  $x$ . Естественно, что добиться необходимых особенностей при построении контура реального сопла невозможно. Разрывы производных компонент скорости или самих этих функций, исходящие из центра канала, будут в дальнейшем отражаться от его стенок. Это отражение в ряде случаев может повлиять на характер исходного движения газа. Например, если скорость за простирающейся вниз по потоку ударной волной дозвуковая, то ее отражение от стенки сопла вообще невозможно; рассматриваемое течение с сомкнувшимися на оси симметрии местными сверхзвуковыми зонами практически невозможно реализовать. В случае существования соответствующего ему движения, где осуществляется переход через скорость звука, последнее, вероятно, также неосуществимо. Сделанные замечания необходимо иметь в виду при оценке той величины сопровождающих варьирование постоянной  $A_2$  деформаций контура сопла, которая не приводит к разрушению потока во входной части.

Прежде чем переходить к построению контуров сопел, найдем положение их наиболее узкого сечения. В этом сечении в расположенных на стенках сопла точках направление скорости параллельно оси  $x$ . Поэтому положение критического сечения проще всего определить, написав уравнение линии, вдоль которой  $v = 0$ . Используя формулу (1.5), получим ее изображение в плоскости  $F\Psi$

$$\Psi = 2F \frac{F-2}{4-F} \quad (5.1)$$

На фиг. 2 кривая (5.1) обозначена через  $V^*$ .

Линия, несущая нулевое значение поперечной составляющей скорости, для аналитического сопла получается при помощи формулы (1.7); она вогнута в сторону набегающего потока

$$x = -\frac{1}{6} A_1 r^2$$

Как видно из фиг. 2, при движении вдоль интегральных кривых уравнения (1.12) мы пересекаем кривую  $V^*$  прежде, чем попасть в бесконечно удаленную точку  $E$ , только в том случае, когда исходящие из точки  $C$  ветви этих кривых заключены между нижней ветвью  $K_1$ -кривой и прямой  $K_2$ . Прямая  $K_2$  пересекается с  $V^*$ -кривой в точке  $E$ . Если исходящие из точки  $C$  кривые в плоскости  $F\Psi$  расположены между прямой  $K_2$  и верхней ветвью  $K_1$ -кривой, то точки пересечения с кривой  $V^*$  достигаются на их продолжениях, проходящих через бесконечно удаленную точку  $E$ . То же самое относится и к кривым, изображающим течения с ударными волнами и выходящим, как было показано в § 2, из точки  $C$  над верхней ветвью  $K_1$ -кривой.

Из приведенного анализа следует, что линия нулевой поперечной составляющей скорости частиц расположена слева от оси  $r$  и вогнута в сторону набегающего потока, когда  $0.5 < A_2 / A_1 \leq 1$ .

При  $A_2 = 0.5A_1$  в области между особыми  $C_{\mp}^{\circ}$ -характеристиками реализуется течение (3.5), в котором скорость параллельна оси сопла на оси  $r$ .

В интервале  $0.25 \leq A_2 / A_1 < 0.5$  течение остается безударным, но наиболее узкое сечение канала находится ниже по потоку, чем его центр. В этом случае линия  $v = 0$  вогнута в сторону сверхзвуковой части сопла.

При  $A_2 = 0.25 A_1$  ее уравнение будет

$$x = \frac{1}{12} A_1 r^2 \quad (5.2)$$

Значения производной  $du/dx$  в области 2 безударных течений с сомкнувшимися на оси симметрии местными сверхзвуковыми зонами получаются следующими. Соплам, у которых критическое сечение расположено слева от центра, соответствует интервал  $-2 \leq A_2/A_1 < -1$ . Значение  $A_2 = -A_1$  получается, когда сопло обладает двумя осями симметрии и  $v = 0$  при  $x = 0$ . Соплам, горло которых находится справа от центра, но которые тем не менее обеспечивают безударность течения в его окрестности, отвечает диапазон  $-1 < A_2/A_1 \leq -0.5$ .

Как видно из фиг. 2, разрывные движения газа всегда реализуются в соплах, у которых наиболее узкое сечение расположено справа от центра. Пусть  $h$  означает полуширину горла канала. При помощи формулы (5.2) заключаем, что течение через сопло Лавалья становится разрывным, если критическое сечение расположено на расстоянии  $L > \frac{1}{12} A_1 h^2$  вниз по потоку за точкой пересечения звуковой кривой с осью симметрии. Осуществляется ли в движении газа через такое сопло переход через скорость звука, или поле скоростей в области 2 остается дозвуковым, не имеет значения: поток содержит ударную волну. Если расстояние между горлом и центром канала не превосходит указанного предела, то течение остается безударным. Как показывают расчеты, в диапазоне значений постоянной  $A_2$ , задаваемом неравенствами

$$0.16 < A_2/A_1 < 0.25, \quad -0.5 < A_2/A_1 < -0.325$$

линия  $v = 0$  идет круче, чем скачок уплотнения. Когда

$$-0.325 < A_2/A_1 < 0.16$$

ударный фронт служит одновременно линией, при переходе через которую значения  $v$  меняются с отрицательных на положительные.

Обозначим через  $r^*$  отклонение линии тока от прямой  $r = \text{const}$ . Величина  $r^*$  находится интегрированием дифференциального уравнения

$$dr^*/dx = (2m_*)^{-1} v(x, r) \quad (5.3)$$

вдоль выбранной прямой  $r = \text{const}$ . Подставляя основное решение (1.7), подвергнутое преобразованию (3.14), в правую часть написанного соотношения, находим форму входной части рассматриваемых сопел

$$2m_* r^* = \frac{82}{3} r^3 x + 8 r x^2 \quad (5.4)$$

Равенство (5.4) определяет также форму аналитического сопла вниз по потоку за  $C_-^\circ$ -характеристикой. Наклон стенок неаналитических сопел в точках пересечения с  $C_-^\circ$ -характеристикой остается непрерывным, в то время как их кривизна терпит разрыв. Считая преобразование (3.14) выполненным, получим граничное условие для интегрирования уравнения (5.3) в области 3

$$2m_* r^* = -\frac{8}{3} r^3 \quad \text{при } x = -r^2 \quad (5.5)$$

Рассмотрим особое течение с  $A_2 = \frac{1}{2} A_1$ , которое в области между  $C_\mp^\circ$ -характеристиками описывается равенствами (3.5). После их подстановки в уравнение (5.3) и удовлетворения граничному условию (5.5) получим форму контура сопла в виде

$$2m_* r^* = -\frac{11}{2} r^5 + 3 r x^2 - \frac{1}{6} \frac{1}{r^3} x^4 \quad (5.6)$$

Пусть теперь течение в области 3 задается при помощи общих формул (3.13), где постоянные  $c$  и  $d$  связаны равенством (3.15). Интегрирование уравнения (5.3)

с учетом граничного условия (5.5) в этом случае дает

$$2m_* r^x = \frac{1}{3} \left\{ [8 \cdot (8c^3 - 3c^2 - 3c - 2) + \frac{32}{5} (c + \frac{1}{2}) (c - 1)^2 (6c - 1)] r^5 + \right. \\ \left. + 8(8c^3 - 3c - 1) r^3 x + 24c^2 r x^2 - \frac{32}{5} (c + \frac{1}{2}) (c - 1)^{1/2} (x + 6cr^2) (x + cr^2)^{3/2} \right\} \quad (5.7)$$

Полагая здесь  $c = 1$ , возвращаемся снова к равенству (5.4). Выбирая  $c = -1/2$ , получим сопло, в котором разрывы первых производных компонент скорости образуются как на  $C_-^\circ$ -характеристике, так и на  $C_+^\circ$ -характеристике. Форма его контура задается уравнением

$$2m_* r^x = -6r^5 - \frac{4}{3} r^3 x + 2rx^2 \quad (5.8)$$

Обозначим через  $K$  кривизну стенки сопла. В рассматриваемом приближении  $K = d^2 r^x / dx^2$ .

Если течение через сопло Лавала не является аналитическим, то, как отмечалось выше, в точке пересечения с  $C_-^\circ$ -характеристикой кривизна его стенки терпит разрыв. Величина этого разрыва для контуров всех неаналитических сопел будет

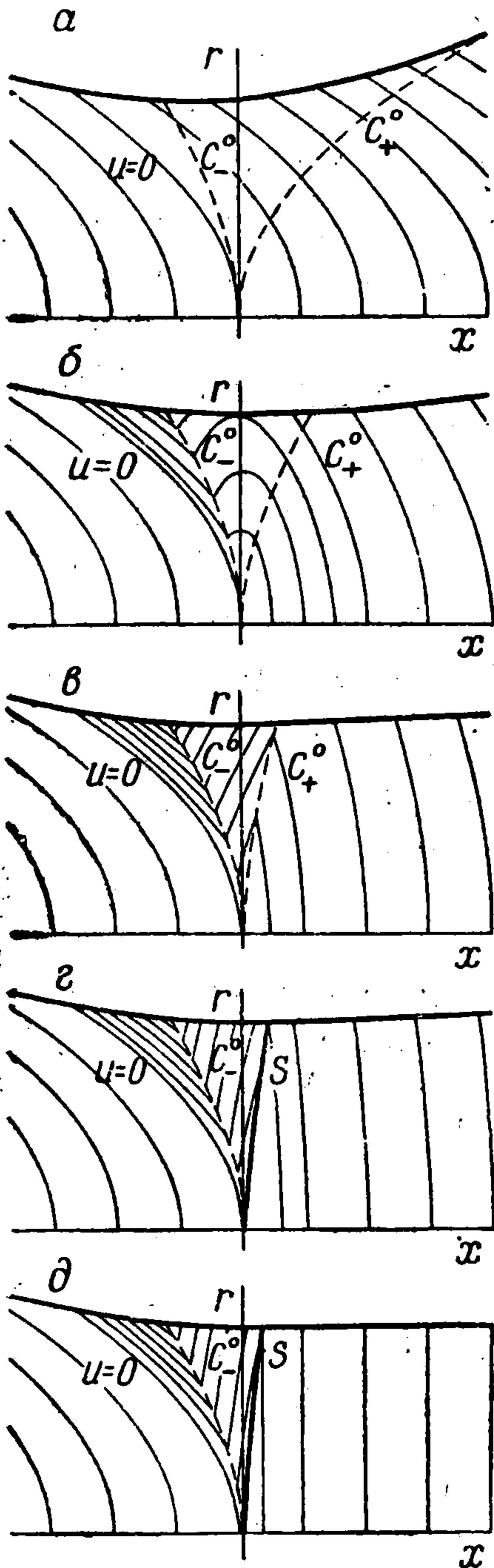
$$[K]_1 = -\frac{3}{8m_*} A_1^2 r < 0$$

потому что при переходе через  $C_-^\circ$ -характеристику разрыв производной  $du/dx$  при заданном значении  $A_1$  определяется однозначно.

Остановимся вкратце на поведении линий  $u = \text{const}$ , вдоль которых скорость частиц, давление, плотность и температура сохраняют постоянные значения. Во входной части любого сопла линии  $u = \text{const}$  согласно формуле (1.7) вогнуты в сторону набегающего потока. В области 2 эти линии также вогнуты в сторону набегающего потока, когда  $A_2 > 0$ , но при  $A_2 < 0$  они вогнуты в направлении выхлопной части канала. Рассмотрим поведение линий  $u = \text{const}$  в области 3. Если течение через сопло Лавала аналитично, то во всей этой области линии  $u = \text{const}$  вогнуты в сторону набегающего потока. В безударных неаналитических течениях газа вблизи  $C_-^\circ$ -характеристики линии, несущие одинаковые значения параметров газа, вогнуты в направлении выхлопной части сопла, а в окрестности  $C_+^\circ$ -характеристики эти линии вогнуты в сторону набегающего потока. Последнее утверждение следует из того факта, что в точках  $C_-^\circ$ -характеристики согласно равенству (3.1) производная

$df/d\xi$  отрицательна, а в точках, расположенных на  $C_+^\circ$ -характеристике, указанная производная принимает положительные значения. В предельном неаналитическом течении газа, когда разрывы первых производных компонент скорости образуются на обеих особых характеристиках, во всей области 3 линии  $u = \text{const}$  вогнуты в направлении выхлопной части сопла. Аналогичная ситуация имеет место и во всех течениях, где образуются скачки уплотнения. Действительно, вдоль кривых в плоскости  $\xi f$ , изображающих разрывные движения газа, производная  $df/d\xi$  не только отрицательна, но и убывает при движении от  $C_-^\circ$ -характеристики к скачку уплотнения.

Контур сопел, построенные в соответствии с равенствами (5.4), (5.6) — (5.8), приведены на фиг. 12. Там же сплошными линиями показаны линии  $u = \text{const}$ .



Фиг. 12

приходящие в центр потока характеристики  $C_-^\circ$  и замыкающие область 3 характеристики  $C_+^\circ$  безударных течений и скачки уплотнения в разрывных течениях. Все построенные контуры обеспечивают сверхзвуковой или в точности звуковой характер потока в области 2, т. е. для всех них  $A_2 \geq 0$ . На фиг. 12, а показано аналитическое сопло с  $A_2 = A_1$ ; на фиг. 12, б изображено сопло, в котором при  $A_2 = 1/2 A_1$  реализуется течение (3.5); на фиг. 12, в приведено сопло, где движение газа обладает разрывами первых производных составляющих скорости по координатам на обеих проходящих через центр  $C_\mp^\circ$ -характеристиках, ему соответствует  $A_2 = 1/4 A_1$ . Течение через сопло, показанное на фиг. 12, г, получается при  $A_2 = 0.07 A_1$  и обладает скачком уплотнения. В соответствующем ему движении газа с сомкнувшимися на оси симметрии местными сверхзвуковыми зонами скорость за скачком уплотнения равна скорости звука. Значению  $A_2 = 0$  отвечает течение через сопло, приведенное на фиг. 12, д; в нем параметры газа во всей области 2 за ударной волной принимают критические значения, а в соответствующем движении с местными сверхзвуковыми зонами скорость за скачком уплотнения дозвуковая. Как отмечалось в начале этого параграфа, подобные течения практически невозможно реализовать.

§ 6. Течения с осевой симметрией. При  $\nu = 2$  уравнения (1.1) описывают трансзвуковые течения, обладающие осевой симметрией. Применим их для исследования характера перехода через скорость звука в канале с круглым поперечным сечением.

При  $\nu = 2$  система уравнений (1.1) и начальные данные (1.2) инвариантны по отношению к той же группе преобразований подобия, что и при  $\nu = 1$ . Поэтому решение уравнений (1.1), относящееся к осесимметрическим течениям, можно искать в виде (1.3). Уравнение для функции  $f$ , аналогичное (1.4), будет иметь вид

$$(f - 4\xi^2) \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \left(\frac{df}{d\xi}\right)^2 + 4\xi \frac{df}{d\xi} - 4f = 0 \quad (6.1)$$

После его интегрирования функция  $g$  определяется по формуле

$$g = \xi f + 1/4 (f - 4\xi^2) df / d\xi \quad (6.2)$$

Основное решение уравнения (6.1) запишется как [9]

$$f = 1/4 A^2 + A\xi \quad (6.3)$$

где постоянная  $A$  равна, как и прежде, значению производной  $du/dx$  в точке  $x = r = 0$ . В соответствии с формулами (1.3), (6.3) и (6.2) находим

$$u = Ax + 1/4 A^2 r^2, \quad v = 1/2 A^2 x r + 1/16 A^3 r^3 \quad (6.4)$$

При  $A = A_1$  полученные равенства описывают движение газа в подводящей части сопла, при  $A = A_2$  они дают поток в области за  $C_+^\circ$ -характеристикой. Когда  $A_1 = A_2$ , все течение в окрестности центра канала определяется формулами (6.4); такое течение реализуется в аналитическом сопле Лавала. В дальнейшем постоянную  $A_1$  будем считать одной и той же для всех рассматриваемых движений; постоянную  $A_2$  будем предполагать вначале большей или равной нулю.

Уравнение линии перехода через скорость звука будет

$$x = -1/4 A_1 r^2$$

Характеристические кривые находятся из решений дифференциального уравнения

$$(dx/dr)^2 = A_{1,2} x + 1/4 A_{1,2}^2 r^2$$

Проходящие через центр сопла особые  $C_\mp^\circ$ -характеристики даются формулами

$$x = 1/8 A_1 (1 - \sqrt{5}) r^2 \quad (C_-^\circ\text{-характеристика})$$

$$x = 1/8 A_2 (1 + \sqrt{5}) r^2 \quad (C_+^\circ\text{-характеристика})$$

Если течение лишено ударных волн, то граничные условия, которые должны быть удовлетворены при интегрировании уравнения (6.1) в заключенной между  $C_\mp^\circ$ -характеристиками области, запишутся как

$$\begin{aligned} f = f_1 = 1/8 A_1^2 (3 - \sqrt{5}) & \quad \text{при } \xi = \xi_1 = 1/8 A_1 (1 - \sqrt{5}) \\ f = f_2 = 1/8 A_2^2 (3 + \sqrt{5}) & \quad \text{при } \xi = \xi_2 = 1/8 A_2 (1 + \sqrt{5}) \end{aligned} \quad (6.5)$$

В разрывном течении скачок уплотнения идет круче, чем  $C_+$ -характеристика. Поэтому при построении разрывных течений только первое из условий (6.5) для интегрирования уравнения (6.1) в области 3 остается неизменным. В качестве второго граничного условия служит формула (2.4) и соотношение

$$(f_2 - 4\xi_2^2) \frac{df_2}{d\xi} + 12\xi_2 f_2 = (f_3 - 4\xi_3^2) \frac{df_3}{d\xi} + 12\xi_3 f_3 \quad (6.6)$$

следующее из равенств (2.2) и (6.2). Форма скачка уплотнения задается уравнением (2.3).

Для изучения качественных свойств осесимметрических течений воспользуемся снова методом фазовой плоскости  $F\Psi$ . При помощи формул (1.11) приведем уравнение (6.1) к виду [8]

$$\frac{d\Psi}{dF} = \frac{\Psi^2 + 7\Psi F + 6F^2 - 8\Psi - 4F}{\Psi(4-F)} \quad (6.7)$$

Общая картина поля интегральных кривых уравнения (6.7) изображена на фиг. 13, где использованы обозначения предыдущих параграфов. Граничные условия (6.5), которые используются при построении осесимметрических безударных течений, в плоскости  $F\Psi$  приобретают тот же самый вид, что и для плоскопараллельных течений

$$F_{1,2} = 4$$

Граничными условиями на скачке уплотнения служат равенство (2.6) и соотношение

$$\Psi_2 + \Psi_3 = -40 \quad (6.8)$$

которое получается после подстановки формул (1.11) в уравнение (6.6).

Изображение основного решения (6.3) в плоскости  $F\Psi$  будем называть по-прежнему  $K_1$ -кривой, ее уравнение будет

$$\Psi = -2(1 + F \mp \sqrt{1 + F}) \quad (6.9)$$

Движение по  $K_1$ -кривой в направлении, указанном на фиг. 13 стрелкой,

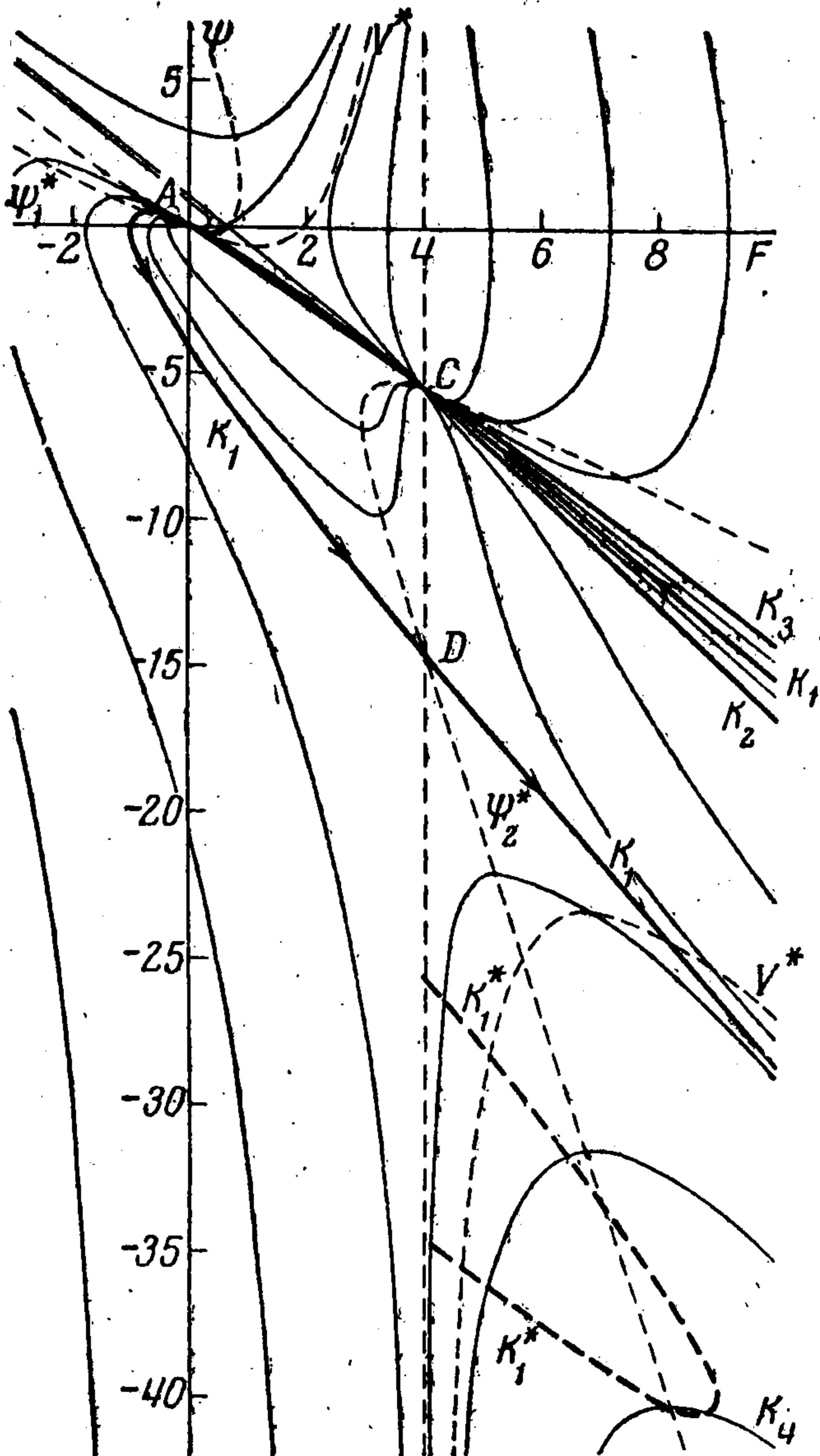
соответствует потоку через аналитическое сопло Лавала. Как и в плоскопараллельных течениях, область 3 безударных неаналитических течений, обладающих осевой симметрией, изображается в плоскости  $F\Psi$  кривыми, выходящими и кончающимися в точке  $C$ . В окрестности бесконечно удаленной точки  $E$  они представляются разложением

$$\Psi = -2F \pm cF^{1/2} + (4 - 3/2 c^2) \pm (15/8 c^2 - 7) cF^{-1/2} - 2/3 (8 - 14c^2 + 3c^4) F^{-1} \pm \dots \quad (6.10)$$

где  $c$  — произвольная постоянная. Полагая  $c = 0$ , получим уравнение  $K_2$ -кривой

$$\Psi = -2F + 4 - 16/3 F^{-1} + \dots$$

которая проходит в прямом и обратном направлениях. Одна из ветвей всех остальных интегральных кривых уравнения (6.7), изображающих безударные неаналитические течения, заключена между  $K_2$ -кривой и нижней ветвью кривой  $K_1$ , другая — между этой же кривой и верхней ветвью кривой  $K_1$ . В предельном случае течение, имеющее слабые разрывы, будет отображаться на  $K_1$ -кривую, проходящую в обратном направлении.



Фиг. 13

Повторяя рассуждения, приведенные в § 1, получим, что на  $C_+$ -характеристике осесимметрических течений не возникает разрывов первых производных составляющих скорости частиц по координатам. Разложение функций  $f(\xi)$  в окрестности точки  $\xi = \xi_2$ , соответствующей  $C_+$ -характеристике, обеспечивает также непрерывность вторых производных составляющих скорости при переходе через эту характеристику<sup>1</sup>. Исключением является, как и прежде, предельный случай, когда течение между особыми линиями Маха отображается на проходимость в обратном направлении  $K_1$ -кривую. В предельном случае первые производные параметров потока имеют разрывы как на  $C_-$ -характеристике, так и на  $C_+$ -характеристике.

В окрестности бесконечно удаленной точки  $G$  единственная проходящая через нее интегральная кривая уравнения (6.7) представляется разложением

$$\Psi = -\frac{3}{2}F + \frac{2}{5} + \frac{4}{25}F^{-1} + \dots \quad (6.11)$$

Будем обозначать кривую (6.11) по-прежнему буквой  $K_3$ .

Если течение между  $C_-$ -характеристикой и осью  $r$  изображается в плоскости  $F\Psi$  отрезком кривой, заключенным между  $K_3$ -кривой и верхней ветвью кривой  $K_1$ , то течение в области между осью  $r$  и  $C_+$ -характеристикой отобразится на интегральную кривую уравнения (6.7), которая служит продолжением указанного отрезка и расположена под нижней ветвью кривой  $K_1$ . В таком течении  $C_+$ -характеристика является одновременно предельной линией. При помощи  $K_3$ -кривой получается течение, где предельная линия совпадает с осью  $r$ . Интегральные кривые уравнения (6.7), расположенные выше кривой  $K_3$ , дают примеры течений с предельными линиями слева от оси  $r$ . Их невозможно продолжить через скачок уплотнения.

При помощи формул (2.6), (6.8) и (6.9) получим уравнение кривой  $K_1^*$

$$\Psi_3 = -(22 + 2F_3 + 2\sqrt{9 - F_3}) \quad (6.12)$$

которое связывает величины  $F_3$  и  $\Psi_3$ , характеризующие состояние газа перед ударной волной. В формуле (6.12)  $4 < F_3 \leq 8$ . Считается, что в области 2 за скачком уплотнения скорость потока больше или равна скорости звука. Так как кривую  $K_1$  пересекает только часть интегральных кривых уравнения (6.7), то не все течения в которых предельной линией служит  $C_+$ -характеристика, могут быть реализованы введением ударных волн. Так же как и в плоскопараллельных течениях, в разрывных течениях с осевой симметрией скачок уплотнения зарождается в центре сопла и затем сносится потоком вниз по направлению к выхлопной части. Приходящая в центр сопла  $C_-$ -характеристика во всех неаналитических движениях газа несет разрывы первых производных компонент скорости по координатам.

Поведение решений уравнения (6.1) будет качественно таким же, что и кривых, приведенных на фиг. 6. Для всех этих кривых производная  $df/d\xi$  при приближении к  $C_-$ -характеристике справа имеет значение

$$df/d\xi = -\frac{1}{2}A_1(3 - \sqrt{5}) \quad (6.13)$$

Поэтому величина разрыва производной  $du/dx$  на  $C_-$ -характеристике выражается однозначно через  $A_1$

$$[du/dx]_1 = -\frac{1}{2}A_1(5 - \sqrt{5}) < 0$$

В безударных течениях при подходе к  $C_+$ -характеристике слева и справа остается справедливым равенство (3.2). Граничные условия (6.5), (6.13) и (3.2), которым необходимо удовлетворить при интегрировании уравнения (6.1) в области 3, можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} f_1 = 4\xi_1^2, & \quad df_1/d\xi = 2(\sqrt{5} - 1)\xi_1 & \text{при } \xi = \xi_1 \\ f_2 = 4\xi_2^2, & \quad df_2/d\xi = 2(\sqrt{5} - 1)\xi_2 & \text{при } \xi = \xi_2 \end{aligned}$$

Написанные соотношения показывают, что  $df_1/d\xi < 0$ , а  $df_2/d\xi > 0$ , т. е. в безударных течениях функция  $u$  сначала убывает, а затем возрастает в области 3 вдоль линий  $r = \text{const}$ .

<sup>1</sup> Напомним, что в плоскопараллельных течениях  $C_+$ -характеристика несет разрывы вторых производных компонент скорости.

В предельном случае безударных течений, когда их изображением в плоскости  $F\Psi$  служит проходящая в обратном направлении  $K_1$ -кривая, решение уравнения (6.1) в области 3 имеет вид [8]

$$f = 1/8 A_1^2 (7 - 3\sqrt{5}) - 1/2 A_1 (3 - \sqrt{5}) \xi \quad (6.14)$$

Удовлетворяя граничным условиям в форме (6.5), получим для постоянной  $A_2$  формулу

$$A_2 = 1/2 A_1 (7 - 3\sqrt{5})$$

которая аналогична соотношению (3.8) для плоскопараллельных течений. Отсюда имеем неравенства

$$1/2 (7 - 3\sqrt{5}) \leq A_2 / A_1 \leq 1 \quad (6.15)$$

обеспечивающие отсутствие ударных волн в окрестности критического сечения сопла Лавала. Неравенства (3.9) и (6.15) показывают, что при заданной величине  $A_1$  для осесимметрических течений допустимы меньшие по сравнению с плоскопараллельными течениями значения  $A_2$ , которые не приводят к образованию скачков уплотнения.

Решению (6.10) в плоскости  $\xi f$  соответствует кривая, симметричная относительно оси ординат. Используя соотношения (6.5), получим

$$A_2 = 1/2 A_1 (3 - \sqrt{5})$$

Интегральные кривые уравнения (6.1), находящиеся выше симметричной относительно оси  $f$  кривой, получаются при

$$1/2 (3 - \sqrt{5}) < A_2 / A_1 < 1$$

интегральные кривые, заключенные между этой кривой и прямой (6.14), — при

$$1/2 (7 - 3\sqrt{5}) < A_2 / A_1 < 1/2 (3 - \sqrt{5})$$

Соответствие ветвей кривых в плоскости  $F\Psi$  интегральным кривым уравнения (6.1) у осесимметрических течений такое же, как и у рассмотренных ранее плоскопараллельных движений газа.

Диапазону значений

$$0 < A_2 / A_1 < 1/2 (7 - 3\sqrt{5}) \quad (6.16)$$

соответствуют течения с ударными волнами, за которыми скорость сверхзвуковая и продолжает возрастать по направлению к выхлопной части сопла. При  $A_2 = 0$  параметры газа в области 2 принимают критические значения, а равномерному потоку за скачком уплотнения на фиг. 6 соответствует ось  $\xi$ . В этом случае простые равенства

$$f_3 = 8\xi_2^2, \quad df_3 / d\xi = -24\xi_2$$

служат граничными условиями, которым необходимо удовлетворить на правом конце интервала при интегрировании уравнения (6.1). При движении вдоль интегральных кривых в плоскости  $\xi f$  по направлению от  $C_-^0$ -характеристики к скачку уплотнения производная  $df/d\xi$  непрерывно уменьшается. Образование ударных волн в соплах с круглым поперечным сечением сопровождается, как и прежде, таким уменьшением скорости потока в области за особой  $C_-^0$ -характеристикой, которое происходит более резко, чем по линейному закону. Во входной части сопла Лавала поток остается неизменным, образование ударного фронта не приводит к его разрушению. Сравнение неравенств (3.10) и (6.16) показывает, что при одном и том же значении  $A_1$  в осесимметрических течениях возникают более слабые скачки уплотнения, чем в плоскопараллельных.

Зависимость величин  $\xi_2$  и  $f_3 - f_2$  от  $A_2$  имеет тот же характер, что и изображенный на фиг. 7 и 8. Эту зависимость проще всего получить прямым интегрированием уравнения (6.1), которое ведется от заданной точки  $\xi = \xi_1$  до некоторой точки  $\xi = \xi_2$ , где удовлетворяются граничные условия (2.4) и (6.6) на ударном фронте

Рассмотрим осесимметрические течения, в которых в окрестности горла канала образовались сомкнувшиеся на оси местные сверхзвуковые зоны. Как и в плоскопараллельных движениях газа, их параметры в областях 1 и 3 совпадают с пара-

метрами соответствующих течений, где совершается переход через скорость звука. В области 1 поток описывается формулами (6.4) с  $A = A_1$ , в области 2 — теми же формулами с  $A = A_2$ , причем  $A_1 > 0$ , а  $A_2 < 0$ . Переход через скорость звука при движении вдоль линий тока из области 3 в область 2 совершается либо в точках кривой  $x_2 = -1/4 A_2 r^2$ , либо на скачке уплотнения.

В безударных течениях уравнение  $C_+$ -характеристики запишется как

$$x = 1/8 A_2 (1 - \sqrt{5}) r^2$$

Граничное условие на ней для интегрирования уравнения (6.1) в заключенной между особыми линиями Маха области имеет вид

$$f = f_2 = 1/8 A_2^2 (3 - \sqrt{5}) \quad \text{при } \xi = \xi_2 = 1/8 A_2 (1 - \sqrt{5}) \quad (6.17)$$

Течение с местными сверхзвуковыми зонами, соответствующее движению газа с переходом через скорость звука в аналитическом сопле Лавалья в плоскости  $F\Psi$  изображается  $K_1$ -кривой, проходимой в прямом направлении от точки  $A$  до точки  $C$  с последующим скачком из точки  $C$  в точку  $D$ . В нем, как и прежде,  $C_-$ -характеристика лишена каких бы то ни было особенностей, вдоль  $C_+$ -характеристики ерпят разрывы первые производные составляющих скорости по координатам [10].

Удовлетворяя граничному условию (6.17), получим значение

$$A_2 = -1/2 A_1 (3 + \sqrt{5})$$

которое является минимальным значением постоянной  $A_2$  при заданной величине  $A_1$ . При помощи последнего соотношения находим

$$[\partial u / \partial x]_2 = -1/2 A_1 (5 + \sqrt{5})$$

Во всех остальных течениях с местными сверхзвуковыми зонами проходящая в центр сопла  $C_-$ -характеристика несет разрывы первых производных компонент вектора скорости. При переходе через нее остается справедливым равенство (6.13).

В безударных течениях  $C_+$ -характеристика также несет разрывы первых производных составляющих скорости по координатам. Величина этого разрыва определяется формулой

$$[\partial u / \partial x]_2 = 1/2 A_2 (5 - \sqrt{5}) < 0$$

Только в течении, изображением которого служит проходима в обратном направлении  $K_1$ -кривая,  $C_+$ -характеристика не несет никаких особенностей. В областях 3 и 2 решение уравнения (6.1) описывается формулой (6.14). Отсюда имеем наибольшее значение  $A_2$ , при котором в потоке с сомкнувшимися на оси  $x$  местными сверхзвуковыми зонами не возникает ударных волн

$$A_2 = -1/2 A_1 (3 - \sqrt{5})$$

Диапазон значений постоянной  $A_2$ , соответствующий безударным течениям, определяется, следовательно, неравенствами

$$-1/2 (3 + \sqrt{5}) \leq A_2 / A_1 \leq -1/2 (3 - \sqrt{5}) \quad (6.18)$$

Сопоставление неравенств (4.5) и (6.18) показывает, что для осесимметрических течений с местными сверхзвуковыми зонами допустимы большие по сравнению с аналогичными плоскопараллельными течениями значения  $A_2$ , которые не приводят к возникновению скачков уплотнения. Неравенства (6.18) дополняют соотношения (6.15), относящиеся к течениям с переходом через скорость звука в окрестности критического сечения канала. Решению (6.10) уравнения (6.7) соответствует поток, симметричный относительно оси  $r$ ; поэтому для него  $A_2 = -A_1$ .

Изучение осесимметрических течений с местными сверхзвуковыми зонами, обладающих ударными волнами, приводит к тем же самым выводам, которые были сделаны при изучении аналогичных плоскопараллельных движений газа. В областях 1 и 3 в большинстве течений с ударными волнами параметры газа совпадают с параметрами соответствующих им движений, где в окрестности критического сечения сопла совершается переход через скорость звука. В таких течениях состояние реди перед скачком уплотнения изображается либо точками верхней ветви

$$\Psi_3 = - (22 + 2F_3 - 2\sqrt{9 - F_3})$$

кривой  $K_1^*$ , где  $4 < F_3 \leq 9$ , либо точками нижней ветви (6.12) этой же кривой, где  $F_3 < F_3 \leq 9$ . Значение  $F_3$  величины  $F$  получается при пересечении  $K_1^*$ -кривой с интегральной кривой  $K_4$  уравнения (6.7), изображающей течение с критическими значениями параметров в области 2. Ниже  $K_4$ -кривой в плоскости  $F\Psi$  проходят только такие интегральные кривые уравнения (6.7), которые не дают течений с переходом через критическую скорость ни при одном пересечении с нижней ветвью  $K_1^*$ -кривой.

Диапазон значений  $A_2$ , которому соответствуют разрывные движения, определяется неравенствами

$$-1/2(3 - \sqrt{5}) < A_2 / A_1 < 0 \quad (6.19)$$

Характер зависимости  $\xi_2$  и  $f_3 - f_2$  от  $A_2$  для разрывных осесимметрических течений с местными сверхзвуковыми зонами качественно такой же, как и для аналогичных плоскопараллельных течений. Например, скорость частиц за наиболее интенсивным при заданном значении  $A_1$  скачком уплотнения меньше критической. Сравнение неравенств (4.7) и (6.19) показывает, что скачки уплотнения, которые возникают в осесимметрических течениях, имеют меньшую интенсивность, чем в плоскопараллельных движениях газа.

Рассмотрим в заключение, как меняется контур сопла с круглым поперечным сечением в зависимости от величины производной  $du/dx$  в области 2. Используя формулу (6.2), найдем изображение  $V^*$  линии  $v = 0$  в плоскости  $F\Psi$ ; оно по-прежнему задается уравнением (5.1). Повторяя рассуждения, приведенные в § 5, получим, что линия  $v = 0$  расположена слева от оси  $r$  и вогнута в сторону набегающего потока при

$$1/2(3 - \sqrt{5}) < A_2 / A_1 \leq 1$$

Линия нулевой поперечной составляющей скорости частиц для аналитического сопла с  $A_2 = A_1$  имеет вид  $x = -1/8 A_1 r^2$ .

При  $A_2 = 1/2 A_1 (3 - \sqrt{5})$  в окрестности горла сопла реализуется течение, в котором вектор скорости параллелен оси сопла вдоль оси  $r$ .

В интервале значений  $A_2$ , задаваемом соотношениями

$$1/2(7 - 3\sqrt{5}) \leq A_2 / A_1 < 1/2(3 - \sqrt{5})$$

течение остается безударным, но линия  $v = 0$  вогнута в сторону выхлопной части сопла. При  $A_2 = 1/2 A_1 (7 - 3\sqrt{5})$  ее уравнение будет

$$x = 1/16 A_1 (3 - \sqrt{5}) r^2 \quad (6.20)$$

Значения постоянной  $A_2$  для безударных течений с сомкнувшимися на оси сопла местными сверхзвуковыми зонами будут следующими. Соплам, у которых линия  $v = 0$  вогнута в сторону набегающего потока, соответствует интервал

$$-1/2(3 + \sqrt{5}) \leq A_2 / A_1 < -1$$

Соплам, у которых линия нулевой поперечной составляющей скорости вогнута в сторону выхлопной части, отвечает диапазон

$$-1 < A_2 / A_1 \leq -1/2(3 - \sqrt{5})$$

Значение  $A_2 = -A_1$  отвечает течению через сопло, обладающее двумя осями симметрии. В нем  $v = 0$  при  $x = 0$ .

Разрывные движения газа реализуются только в таких соплах, у которых критическое сечение расположено справа от центра. Используя формулу (6.20), найдем, что течение через сопло Лаваля остается непрерывным, если расстояние  $L$  между горлом и центром канала не превосходит величины  $1/16 A_1 (3 - \sqrt{5}) h^2$ , где через  $h$  обозначен радиус горла. Если

$$L > 1/16 A_1 (3 - \sqrt{5}) h^2$$

течение становится разрывным вне зависимости от того, осуществляется ли в движении газа переход через скорость звука, или поле скоростей в области 2 будет дозвуковым.

При построении решений уравнения (6.1) в областях 3 и 2 удобно положить

$$A_1 = 2(1 + \sqrt{5}) \quad (6.21)$$

Тогда, как и в плоскопараллельных течениях, при переходе через  $C_-^\circ$ -характеристику при  $\xi = -1$  значение функции  $f$  будет равно 4. Равенство (6.21) эквивалентно переходу к новым переменным

$$\xi \rightarrow \frac{\xi}{2(1 + \sqrt{5})/A_1}, \quad f \rightarrow \frac{f}{8(3 + \sqrt{5})/A_1^2}$$

Интегрирование уравнения (5.3), в правую часть которого подставлено основное решение (6.4), с учетом равенства (6.21) приводит к формуле

$$2m_* r^x = 4(2 + \sqrt{5})r^3 x + 2(3 + \sqrt{5})rx^2 \quad (6.22)$$

Написанное соотношение дает входной участок всех рассматриваемых сопел, оно определяет также форму аналитического сопла вниз по потоку за  $C_-^\circ$ -характеристикой. При помощи соотношения (6.22) находим граничное условие для интегрирования уравнения (5.3) в области 3

$$2m_* r^x = -2(1 + \sqrt{5})r^5 \quad \text{при } x = -r^2$$

Рассмотрим течение с разрывами первых производных компонент скорости частиц по координатам на обеих особых характеристиках, проходящих через центр сопла. Уравнение его контура запишется как

$$2m_* r^x = -4\sqrt{5}r^5 + 4(2 - \sqrt{5})r^3 x + 2(3 - \sqrt{5})rx^2$$

Величина разрыва  $[K]_1$  кривизны стенок всех неаналитических сопел с круглым поперечным сечением в точке пересечения с  $C_-^\circ$ -характеристикой дается равенством

$$[K]_1 = \frac{1}{8m_*} (5 - 3\sqrt{5}) A_1^2 r < 0$$

Поведение линий  $u = \text{const}$ , вдоль которых параметры газа сохраняют постоянные значения, в течениях через осесимметрические сопла будет качественно таким же, как и в плоскопараллельных движениях.

Поступила 17 XII 1962

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Христианович С. А. О сверхзвуковых течениях газа. Тр. ЦАГИ, 1941, № 543.
2. Франкль Ф. И. К теории сопел Лаваля. Изв. АН СССР, серия матем., 1945, т. 9, № 5.
3. Фалькович С. В. К теории сопла Лаваля. ПММ, 1946, т. 10, вып. 4.
4. Lighthill M. J. The hodograph transformation in trans-sonic flow. I. Symmetrical channels. Proc. Roy. Soc., A, 1947, vol. 191, n 1026.
5. Cherry T. M. Exact solutions for flow of a perfect gas in a two-dimensional Laval nozzle. Proc. Roy. Soc., A, 1950, vol. 203, n 1075.
6. Ehlers F. E. On Some Solutions of the Hodograph Equation Which Yield Transonic Flows Through a Laval Nozzle. Journ. Aer. Sci., 1955, vol. 22, n 2.
7. Tricomi F. G. Beispiel einer Strömung mit Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit. Monatshefte Mathem., 1954, Bd. 58, № 3.
8. Рыжов О. С. О течениях в окрестности поверхности перехода в соплах Лаваля. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4.
9. Tomotika S., Tamada K. Studies on two-dimensional transonic flows of compressible fluids. — Part I. Quart. Appl. Mathem., 1950, vol. VII, N 4.
10. Tomotika S., Hazimoto Z. On the Transonic Flow of a Compressible Fluid Through an Axially Symmetrical Nozzle. Journ. Mathem. Phys., 1950, vol. XXIX, n 2.
11. Karmán Th. The Similarity Law of Transonic Flow. Journ. Mathem. Phys., 1947, vol. XXVI, n 3.
12. Busemann A. Die achsensymmetrische kegelige Überschallströmung. Luftfahrtforsch., 1942, Bd. XIX, N 4.
13. Germain P. Écoulements transsoniques au voisinage d'un point de rencontre d'une onde de choc avec une ligne sonique. Compt. Rend., 1958, t. 247, n 25.
14. Germain P., Gillon G. Écoulements transsoniques au voisinage d'un point de rencontre d'une onde de choc et d'une ligne sonique. Publ. ONERA, 1961, n 102.
15. Горьков Л. П., Пятаевский Л. П. Возникновение ударной волны при отражении слабого разрыва от звуковой линии. ДАН СССР, 1962, т. 144, № 2.