

О КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СМЕСИ В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ

Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий

(Пермь)

Условия возникновения конвекции в чистой среде, подогреваемой снизу, изучены весьма подробно. Этой проблеме посвящено большое число теоретических и экспериментальных работ. Конвективная устойчивость смеси с неоднородным распределением температуры и концентрации, напротив, исследована явно недостаточно, хотя проблема эта во всех отношениях не менее интересна. Авторы могут указать две теоретические работы, в которых исследовалась конвективная устойчивость смеси. Б. А. Вертгейм [1] получил уравнения малых возмущений и рассмотрел вопрос об устойчивости смеси в круглом вертикальном цилиндре; в работе определено начало возникновения стационарной конвекции (соответствующая задача для случая чистой среды решена Г. А. Остроумовым [2]); возмущения колебательного типа не рассматривались. С. Б. Герасимова¹ показала, что при определенных граничных условиях колебательные возмущения отсутствуют, если характеристики смеси удовлетворяют некоторым неравенствам; в этом случае кризис равновесия определяется только монотонными возмущениями, и исследование устойчивости может быть проведено при помощи предложенного В. С. Сорокиным [3] вариационного метода. Вопрос о колебательной неустойчивости остался в сущности открытым.

Ниже решается задача об устойчивости плоского вертикального слоя смеси в поле тяжести. Простая форма области позволяет найти точное решение нестационарных уравнений малых возмущений. Исследование спектра возмущений приводит, в частности, к выводу, что, в отличие от случая чистой среды [3], в смеси возможны два вида неустойчивости — относительно монотонных и колебательных возмущений. Качественные особенности найденного спектра неустойчивости, вероятно, не связаны с геометрией области. Отметим, что при определенных условиях оказываются неустойчивыми состояния равновесия, при которых градиент плотности направлен вниз (внизу тяжелее). Этот эффект, как будет видно, объясняется конкуренцией диффузии и теплопроводности и является специфическим для смеси.

§ 1. Рассмотрим двухкомпонентную смесь, плотность которой

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta_1 T - \beta_2 C) \quad (1.1)$$

где T и C — температура смеси и концентрация легкой компоненты, отсчитываемые от условного нуля. Если температура и концентрация смеси неоднородны, то, вообще говоря, возникает движение. Уравнения конвекции смеси с учетом эффектов термодиффузии и диффузионной теплопроводности были получены и обсуждены И. Г. Шапошниковым [4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= - \frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + g (\beta_1 T + \beta_2 C) \boldsymbol{\gamma} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T &= (\chi + N \lambda^2 D) \nabla^2 T + N \lambda D \nabla^2 C \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla C &= \lambda D \nabla^2 T + D \nabla^2 C, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

¹ Герасимова С. Б. К теории конвективных явлений в бинарных смесях. Кандидатская диссертация. Пермский университет, 1955.

Здесь v — скорость; p — давление, отсчитываемое от гидростатического при $T = 0$ и $C = 0$; ρ_0 — плотность, соответствующая $T = 0$ и $C = 0$; γ — единичный вектор, направленный вертикально вверх; χ , D , λ — коэффициенты температуропроводности, диффузии и термодиффузии; N — термодинамический коэффициент, определяющий (вместе с λ) величину эффекта диффузионной теплопроводности [4]. Параметры среды, входящие во все формулы, считаются постоянными. Приведем также выражения для молекулярного потока тепла q и диффузионного потока легкой компоненты j

$$q = -\rho_0 c_p [(\chi + N\lambda^2 D) \nabla T + N\lambda D \nabla C], \quad j = -D [\lambda \nabla T + \nabla C]. \quad (1.3)$$

Из уравнений (1.2) легко видеть, что в состоянии стационарного равновесия ($v = 0$ и все величины не зависят от времени) температура T_0 и концентрация C_0 удовлетворяют уравнениям

$$\nabla^2 T_0 = 0, \quad \nabla^2 C_0 = 0, \quad (\beta_1 \nabla T_0 + \beta_2 \nabla C_0) \times \gamma = 0 \quad (1.4)$$

Отсюда следует, что градиент плотности смеси в равновесии постоянен и вертикален.

Исследуем устойчивость равновесия плоского слоя смеси, ограниченного бесконечными вертикальными параллельными плоскостями $x = \pm d$. Будем рассматривать равновесие, при котором не только градиент плотности, но и градиенты температуры и концентрации постоянны и вертикальны

$$\nabla T_0 = -A_0 \gamma, \quad \nabla C_0 = -B_0 \gamma \quad (1.5)$$

Из (1.4) видно, что возможны состояния равновесия и с более сложным распределением температуры и концентрации. Из уравнений (1.5) следует, что в равновесии вертикальны также тепловой и диффузионный потоки q и j . В соответствии с условиями на нижнем и верхнем концах слоя эти потоки могут быть заданы независимо один от другого. Поэтому и постоянные A_0 и B_0 , определяющие потоки, будем считать заданными независимо. Если по условиям задачи в равновесии $j = 0$ или $q = 0$, то A_0 и B_0 оказываются связанными (в работах Вертгейма и Герасимовой имелись в виду именно такие случаи).

§ 2. Рассмотрим возмущение равновесия (1.5) следующего вида:

$$v_x = 0, \quad v_y = 0, \quad v_z = v(x, t), \quad T = T(x, t), \quad C = C(x, t) \quad (2.1)$$

(ось z направлена вертикально вверх). Полагая градиент давления равным нулю (свободная конвекция) и считая все величины зависящими от времени по закону $e^{\sigma t}$, получим из (1.2) с учетом (1.5) уравнения для возмущений

$$\begin{aligned} \sigma v &= \nu v'' + g(\beta_1 T + \beta_2 C) \\ \sigma T - A_0 v &= (\chi + N\lambda^2 D) T'' + N\lambda DC'' \\ \sigma C - B_0 v &= \lambda DT'' + DC'' \end{aligned} \quad (2.2)$$

(штрихами обозначено дифференцирование по x). Выберем единицы расстояния $l = d/\pi$, времени l^2/ν , скорости χ/l , температуры $A_0 l$, концентрации $B_0 l \chi/D$.

Уравнения (2.2), сохраняя прежние обозначения для переменных, можно представить в безразмерной форме

$$\begin{aligned} \sigma v &= v'' + RT + R_d C & \left(R = \frac{g\beta_1 A_0 l^4}{\nu \chi}, R_d = \frac{g\beta_2 B_0 l^4}{\nu D} \right) \\ \sigma P T - v &= (1 + a) T'' + \frac{a}{b} C'' & \left(P = \frac{\nu}{\chi}, P_d = \frac{\nu}{D} \right) \\ \sigma P_d C - v &= b T'' + C'' & \left(a = \frac{N\lambda^2 D}{\chi}, b = \frac{\lambda A_0 D}{B_0 \chi} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь R, R_d — обычное и диффузионное числа Релея; P, P_d — числа Прандтля; a, b — безразмерные параметры, характеризующие термодиффузию и диффузионную теплопроводность. Уравнения (2.3) имеют простые решения, удовлетворяющие условию потока замкнутости

$$\int_{-\pi}^{\pi} v dx = 0$$

при следующих граничных условиях:

1) На границах слоя $x = \pm \pi$ исчезают скорость и возмущения температуры и концентрации. В этом случае v, T и C пропорциональны $\sin nx$, где $n = 1, 2, 3, \dots$

2) На границах слоя $v' = T' = C' = 0$ (свободные теплоизолированные границы, непроницаемые для вещества). Тогда v, T и C пропорциональны $\sin [(2n + 1)x / 2]$, где $n = 0, 1, 2, \dots$

Выводы об устойчивости, получающиеся из рассмотрения возмущений обоих типов, качественно одинаковы. Поэтому далее для краткости будет рассмотрен лишь первый случай, причем будет положено $n = 1$ (основной уровень неустойчивости). Подставляя решение вида $(v, T, C) \sim \sim \sin x$ в уравнения (2.3), получим систему линейных однородных уравнений для амплитуд возмущений. Приравнявая нулю определитель этой системы, найдем уравнение для характеристических декрементов σ . Знак вещественной части σ указывает на затухание ($\text{Re } \sigma < 0$) или нарастание ($\text{Re } \sigma > 0$) возмущений; мнимая часть σ определяет частоту возмущений.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$A\sigma^3 + B\sigma^2 + C\sigma + D = 0 \quad (2.4)$$

где

$$A = PP_d, \quad B = P + PP_d + (1 + a) P_d$$

$$C = 1 + P + (1 + a) P_d - P_d R - P R_d$$

$$D = 1 - (1 + a) R - (1 + a + a/\alpha) R_d \quad (\alpha = -\lambda\beta_2/\beta_1)$$

Вещественная и мнимая части характеристического декремента $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$ удовлетворяют уравнениям

$$A(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2^2) + B(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) + C\sigma_1 + D = 0 \quad (2.5)$$

$$\sigma_2 [A(3\sigma_1^2 - \sigma_2^2) + 2\sigma_1 B + C] = 0 \quad (2.6)$$

Из этих уравнений видно, что существуют возмущения двух видов:

- 1) меняющиеся со временем монотонно, $\sigma_2 = 0$;
- 2) колебательные возмущения, $\sigma_2 \neq 0$.

Рассмотрим сначала монотонные возмущения. При $\sigma_2 = 0$ уравнение (2.6) удовлетворяется, а уравнение (2.5) позволяет найти вещественный декремент σ_1 как функцию всех параметров. Граница устойчивости определяется из условия $\sigma_1 = 0$, т. е. $D = 0$, или

$$(1 + \alpha) R + (1 + a + a / \alpha) R_d = 1 \quad (2.7)$$

На плоскости RR_d каждая точка соответствует состоянию равновесия с заданными значениями градиентов температуры и концентрации A_0 и B_0 . Числа Релея R и R_d могут быть как положительными, так и отрицательными, в зависимости от направления градиентов. Уравнение (2.7) описывает на плоскости RR_d прямую, которая отделяет область, где $\sigma_1 < 0$ (т. е. монотонные возмущения затухают), от области, где $\sigma_1 > 0$ (растающие монотонные возмущения).

Аналогичным образом найдем «нейтральную» линию для колебательных возмущений. Для этих возмущений $\sigma_2 \neq 0$, и следует приравнять нулю квадратную скобку в (2.6). Вместе с (2.5) это дает систему, из которой определяется декремент колебательных возмущений σ_1 и их частота σ_2 . Исключив из двух уравнений σ_2 , найдем уравнение для декремента колебательных возмущений σ_1 . На границе устойчивости $\sigma_1 = 0$. Это дает $AD - BC = 0$; отсюда находим уравнение «нейтральной» линии для колебательных возмущений

$$\begin{aligned} P_d [PP_d + (1 + a) P_d - \alpha P] R + P [P + PP_d - (a / \alpha) P_d] R_d = \\ = [P + (1 + a) P_d] [(1 + P) (1 + P_d) + a P_d] \end{aligned} \quad (2.8)$$

На плоскости RR_d прямые (2.7) и (2.8) пересекаются в точке с координатами

$$R_* = \frac{(a / \alpha) [1 + P + (1 + a) P_d] + [(1 + a) (1 + P_d + a P_d) + a P]}{P (1 + \alpha) - P_d (1 + a + a / \alpha)} \quad (2.9)$$

$$R_{d*} = \frac{[1 + P + a P_d] + \alpha [1 + P + (1 + a) P_d]}{P (1 + \alpha) - P_d (1 + a + a / \alpha)} \quad (2.10)$$

Приведем также формулу, определяющую частоту «нейтральных» колебаний

$$\sigma_2^2 = \frac{P (1 + \alpha) - P_d (1 + a + a / \alpha)}{P_d [PP_d + (1 + a) P_d - \alpha P]} (R_d - R_{d*}) \quad (2.11)$$

Из формулы (2.11) видно, что частота нейтральных колебаний σ_2 обращается в нуль в точке пересечения прямых (2.7) и (2.8) и вещественна на линии (2.8) лишь по одну сторону от этой точки. Прямая (2.8) имеет поэтому смысл нейтральной линии для колебательных возмущений лишь по одну сторону от точки пересечения — там, где $\sigma_2^2 > 0$ (здесь имеется полная аналогия со случаем конвективной устойчивости в магнитном поле [5] и при вращении [6]).

Формулы (2.7) — (2.11) содержат много параметров. Для выяснения характерных особенностей обстановки далее будут обсуждены некоторые случаи, представляющие, по-видимому, наибольший интерес.

§ 3. Рассмотрим сначала наиболее простой случай, когда можно пренебречь эффектами термодиффузии и диффузионной теплопроводности ($\lambda = 0$). При этом исходные уравнения (1.2) и выражения для потоков (1.3) значительно упрощаются, а связанные с диффузией новые эффекты, о которых упоминалось во введении, видны особенно отчетливо. Уравнения нейтральных кривых монотонных и колебательных возмущений теперь запишутся так (в формулах (2.7) и (2.8) нужно положить $\alpha = a = 0$):

$$R + R_d = 1 \quad (3.1)$$

$$P_d^2 (1 + P) R + P^2 (1 + P_d) R_d = (1 + P) (1 + P_d) (P + P_d) \quad (3.2)$$

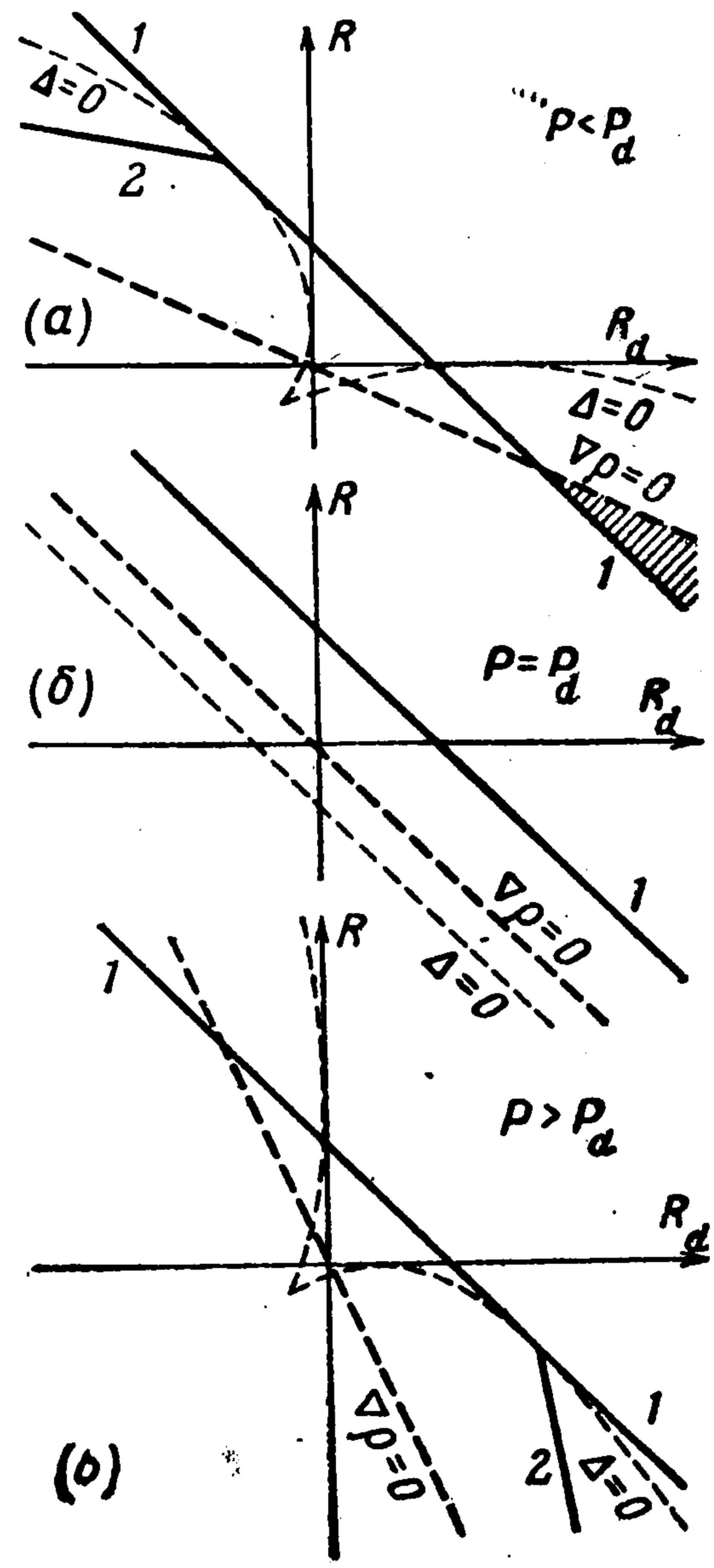
Координаты точки пересечения прямых (3.1) и (3.2) на плоскости RR_d

$$R_* = -\frac{1 + P_d}{P - P_d}, \quad R_{d*} = \frac{1 + P}{P - P_d} \quad (3.3)$$

Критическая частота колебательных возмущений на линии (3.2) определяется соотношением

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{P^2} \left(\frac{R}{R_*} - 1 \right) \quad (3.4)$$

Взаимное расположение линий устойчивости на плоскости RR_d определяется отношением $P / P_d = D / \chi$. На фиг. 1, а, б, в изображены кривые устойчивости для случаев $P < P_d$, $P = P_d$ и $P > P_d$ соответственно. На фиг. 1 прямая 1 есть нейтральная линия для монотонных возмущений. Отрезки, отсекаемые линией 1 на осях R и R_d , изображают критические числа Релея для случаев чисто тепловой и чисто концентрационной неустойчивости. Прямая 2 на фиг. 1, а и в изображает нейтральную линию для колебательных возмущений. Область устойчивости расположена под прямыми 1 и 2. На фигурах изображена также кривая $\Delta = 0$, где Δ — дискриминант кубического уравнения (2.4)¹. В области ниже этой



Фиг. 1

¹ Точка возврата на дискриминантной кривой $\Delta = 0$ имеет координаты

$$R = \frac{P_d}{27P(P - P_d)} \left[2 - \frac{P}{P_d}(1 + P_d) \right]^3, \quad R_d = \frac{P}{27P_d(P_d - P)} \left[2 - \frac{P_d}{P}(1 + P) \right]^3$$

Касание осей R и R_d происходит соответственно в точках

$$R = \frac{(P - P_d)(1 - P_d)}{P_d^2}, \quad R_d = \frac{(P_d - P)(1 - P)}{P^2}$$

кривой кубическое уравнение (2.4) имеет два комплексно-сопряженных корня, описывающих колебательные возмущения. На линии 2 декремент колебательных возмущений обращается в нуль; в области между линией 2 и кривой $\Delta = 0$ колебательные возмущения нарастают. Таким образом, в отличие от чистой среды в смеси возможна колебательная неустойчивость. Исключение составляет лишь случай $P = P_d$, т. е. $\chi = D$, когда точка пересечения линий 1 и 2 уходит на бесконечность (фиг. 1, б). В этом случае колебательные возмущения всегда затухают, и имеет место лишь монотонная неустойчивость — в области выше линии 1.

В чистой среде, как известно, неустойчивость возникает, если градиент плотности направлен вверх (вверху тяжелее) и по величине превосходит определенное критическое значение. Можно было бы ожидать, что и в смеси возникновение неустойчивости определяется в конечном счете градиентом плотности.

Оказывается, однако, что это не так: неустойчивость при определенных условиях возникает, если плотность смеси везде одинакова и даже если градиент плотности направлен вниз.

На плоскости RR_d легко найти линию, все точки которой изображают состояния равновесия смеси с равным нулю градиентом плотности.

Уравнение этой линии, как видно из (1.1), есть

$$P_d R + P R_d = 0 \quad (3.5)$$

Точкам плоскости RR_d , расположенным ниже прямой (3.5), соответствуют состояния равновесия с градиентом плотности, направленным вниз; в области выше прямой (3.5) градиент $\nabla \rho$ направлен вверх. Эта прямая (3.5) во всех случаях, кроме $P = P_d$, пересекает нейтральные линии 1 и 2 (фиг. 1). В каждом из случаев $P < P_d$ и $P > P_d$ имеются, таким образом, по две области, где кривая устойчивости расположена ниже линии $\nabla \rho = 0$ (одна из таких областей на фиг. 1, а заштрихована). Все состояния равновесия, изображаемые точками внутри этих областей, неустойчивы, хотя при этом внизу среда тяжелее.

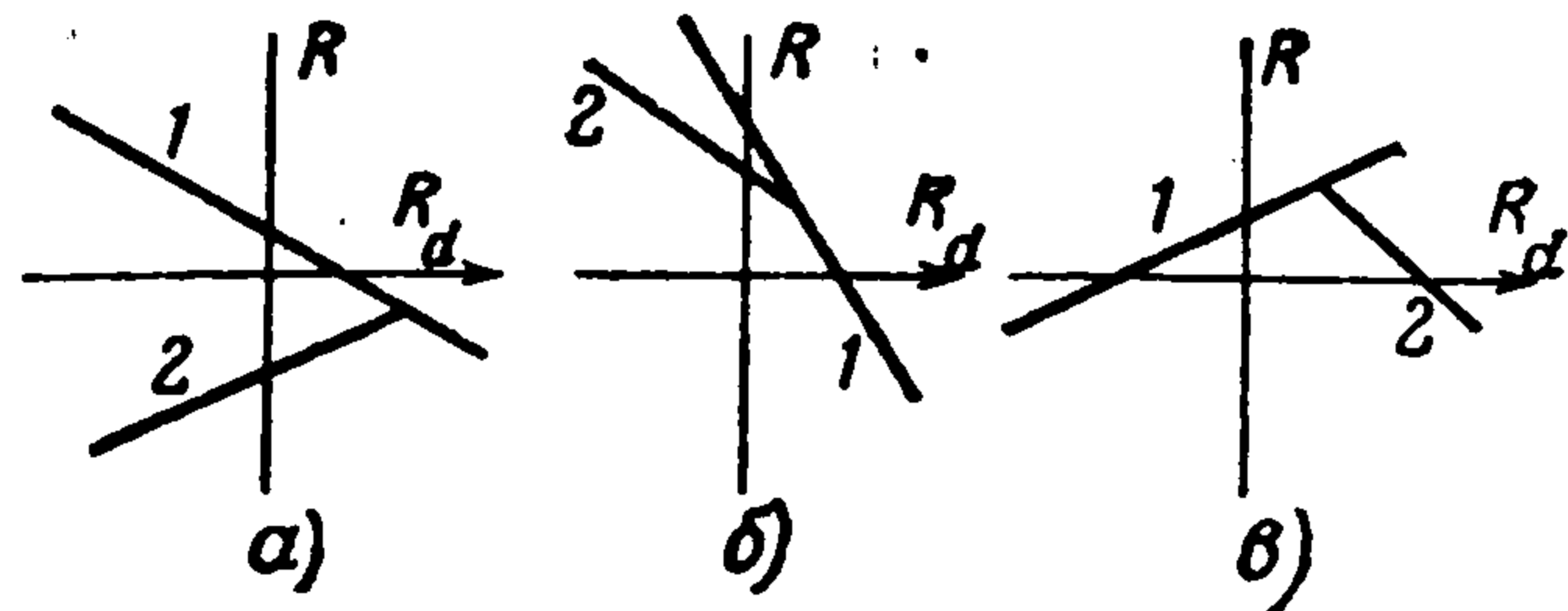
Только что отмеченный несколько неожиданный результат расчета может быть сделан наглядным.

Рассмотрим, например, заштрихованную на фиг. 1, а область, где согласно расчету имеет место неустойчивость монотонного вида при наличии градиента плотности, направленного вниз. Этой области соответствует градиент температуры, направленный вверх ($R < 0$, подогрев сверху) и градиент концентрации, направленный вниз ($R_d > 0$, внизу преобладает легкая компонента), причем имеет место неравенство $P_d > P$ (т. е. $\chi > D$; выравнивание температуры происходит быстрее выравнивания концентрации).

В этих условиях элемент среды, случайно сместившийся вверх, будет быстро нагреваться, но относительно медленно терять легкую компоненту. В новом месте температура элемента будет, конечно, ниже температуры окружающей среды, зато он будет богаче легкой компонентой; при подходящих значениях градиентов плотность сместившегося элемента может оказаться меньше плотности окружающей среды, и, следовательно, элемент будет продолжать всплывать; возникнет монотонного вида неустойчивость. Подобным же образом может быть понято и возникновение колебательной неустойчивости в условиях, когда внизу среда тяжелее.

§ 4. Результаты § 3 относились к случаю $\lambda = 0$ (т. е. $\alpha = 0, a = 0$), когда можно пренебречь перекрестными эффектами — термодиффузией и диффузионной теплопроводностью. Если эти эффекты существенны, то следует пользоваться общими формулами (2.7) — (2.11). Ситуация, описанная в § 3, в общем, сохраняется и при

учете термодиффузии и диффузионной теплопроводности. Однако взаимное расположение нейтральных линий монотонных и колебательных возмущений теперь определяется четырьмя параметрами среды (P, P_d, α, a) и может отличаться от того, что изображено на фиг. 1. Из общих формул (2.7) — (2.11) легко получается классификация всех возможных случаев взаимного расположения линий устойчивости на плоскости RR_d в зависимости от соотношения между параметрами. Нет необходимости приводить здесь эту классификацию, тем более, что некоторые из формально возможных случаев могут оказаться практически неинтересными, так как, например, смеси с аномальной термодиффузией ($\lambda > 0$) встречаются редко, а эффект диффузионной теплопроводности всегда очень мал. На фиг. 2 для примера приведены спектры неустойчивости для некоторых значений параметров (точка $R = R_d = 0$ всегда лежит в области устойчивости). В связи с этими примерами заметим, что при наличии термодиффузии смесь (в смысле устойчивости) отличается от чистой среды, даже если в смеси отсутствует градиент концентрации ($R_d = 0$). Так (фиг. 2, а) неустойчивость при $R_d = 0$ возникает при достаточном подогреве и снизу и сверху; далее (фиг. 2, б) при подогреве снизу и $R_d = 0$ возникает неустойчивость относительно колебательных возмущений, и так далее.



$$а) a = 0, \alpha > \frac{P_d}{P}(1 + P)$$

$$б) a = 0, -1 < \alpha < -\frac{1 + P}{1 + P + P_d}$$

$$в) -\frac{a}{1 + a} < \alpha < 0$$

Фиг. 2

§ 5. Представляется интересным исследовать устойчивость равновесия при условии, что равновесные градиенты температуры и концентрации связаны определенным соотношением a и не задаются независимо, как это предполагалось выше.

Так, например, если вертикальный канал сверху и снизу закрыт пробками, непроницаемыми для вещества, то в стационарном равновесии будет отсутствовать поток вещества: $j = 0$; тепловой поток q при этом отличен от нуля и определяется условиями подогрева.

Можно рассмотреть также и другой предельный случай, когда $q = 0$ но имеется поток вещества вдоль канала.

В обоих указанных случаях отличны от нуля градиенты температуры и концентрации, однако они связаны условиями $j = 0$ либо $q = 0$.

Рассмотрим сначала случай $j = 0$. При этом диффузионный и термодиффузионный потоки взаимно компенсируются, а градиенты температуры и концентрации, как видно из второго равенства (1.3) и из (1.5) связаны соотношением $\lambda A_0 + B_0 = 0$, или в безразмерной форме

$$- \alpha P_d R + P R_d = 0 \tag{5.1}$$

Из уравнений (2.7) и (2.8) с учетом соотношения (5.1) находим выражения для критических чисел Релея R_1 и R_2 соответственно в случае

МОНОТОННЫХ И КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

$$R_1 = \frac{P}{(P + aP_d) + \alpha(P + P_d + aP_d)} \quad (5.2)$$

$$R_2 = \frac{[P + (1 + a)P_d][(1 + P)(1 + P_d) + aP_d]}{P_d^2[1 + (1 + \alpha)P]} \quad (5.3)$$

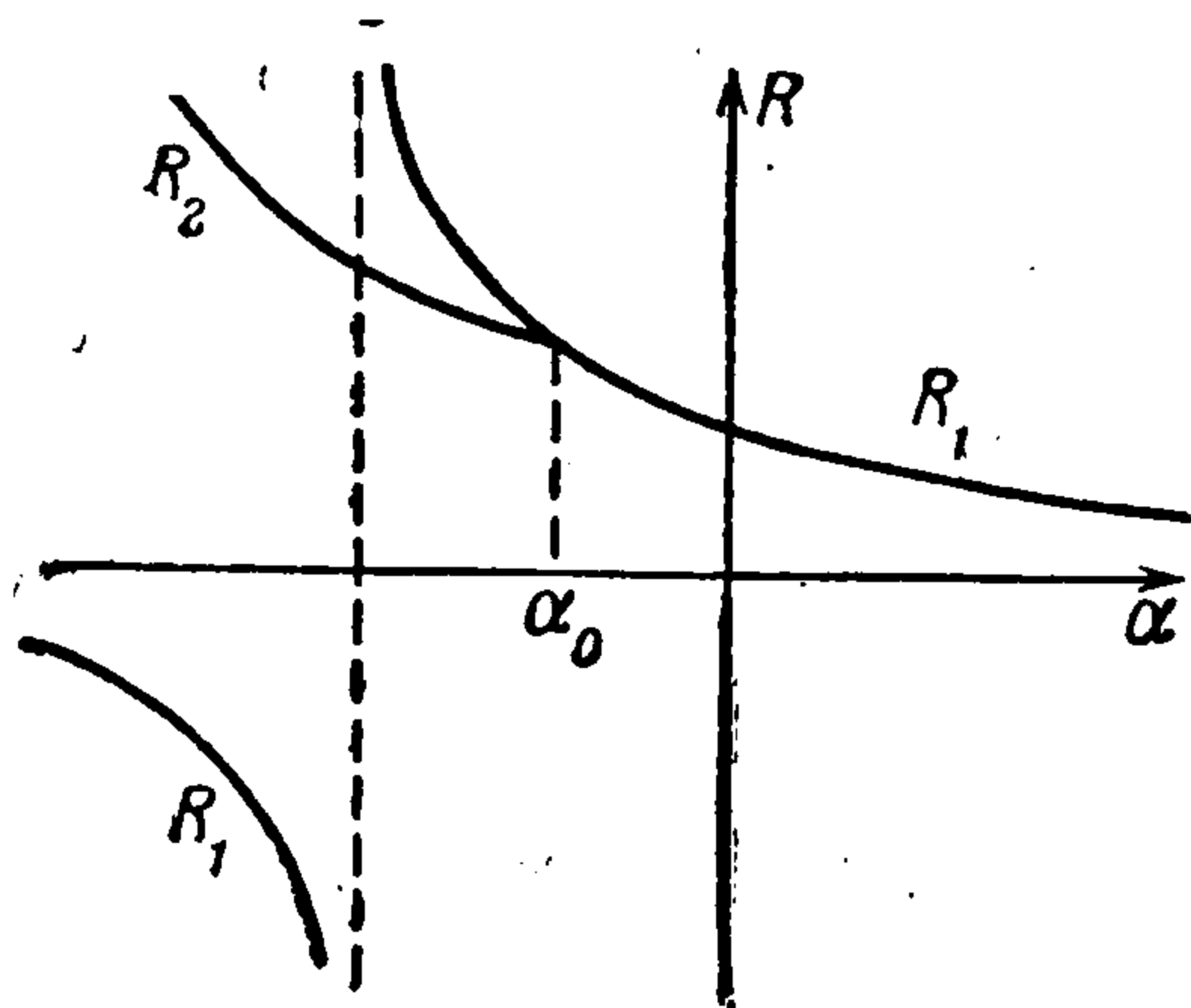
На фиг. 3 изображены критические числа R_1 и R_2 в зависимости от параметра термодиффузии α при постоянных P, P_d, a . Кривые $R_1(\alpha)$ и $R_2(\alpha)$ пересекаются при $\alpha = \alpha_0$, где

$$\alpha_0 = - \frac{(P + aP_d)(1 + P + aP_d) + aP_d^2}{(P + P_d + aP_d)(1 + P + aP_d) + (1 + a)P_d^2} \quad (5.4)$$

Частота нейтральных колебаний на линии $R_2(\alpha)$ равна

$$\sigma_2^2 = \frac{(P + P_d + aP_d)(1 + P + aP_d)}{PP_d^2(1 + P + \alpha P)} (\alpha_0 - \alpha) \quad (5.5)$$

Как видно из фиг. 3, при нормальной термодиффузии ($\lambda < 0, \alpha > 0$) возможна только неустойчивость относительно монотонных возмущений причем с ростом α критическое число R_1 падает. В области значительной аномальной термодиффузии возможна колебательная неустойчивость



Фиг. 3

$$-\left(1 + \frac{1}{P}\right) < \alpha < \alpha_0 \quad \text{ветвь } R_2$$

а также неустойчивость монотонного вида при подогреве сверху

$$\alpha < - \frac{P + aP_d}{P + P_d + aP_d} \quad \text{нижняя ветвь } R_1$$

Аналогично обстоит дело и в случае $q = 0$. Связь R и R_d теперь такова:

$$-\alpha(1 + a)P_d R + aPR_d = 0 \quad (5.6)$$

Приведем лишь критические значения диффузионного числа Рейля для монотонных и колебательных возмущений

$$R_{d1} = \frac{(1 + a)P_d}{[(1 + a)^2 P_d + aP] + (a/\alpha)[P + (1 + a)P_d]} \quad (5.7)$$

$$R_{d2} = \frac{(1 + a)(P + P_d + aP_d)[(1 + P)(1 + P_d) + aP_d]}{P^2[1 + (1 + a + a/\alpha)P_d]} \quad (5.8)$$

Авторы благодарны Е. П. Велихову за обсуждение результатов.

Поступила 28 XI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. В е р т г е й м Б. А. Об условиях возникновения конвекции в бинарной смеси. ПММ, 1955, т. 19, вып. 6.
2. О с т р о у м о в Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. ГИТТЛ, 1952.
3. С о р о к и н В. С. Вариационный метод в теории конвекции. ПММ, 1953, т. 17, вып. 1.
4. Ш а п о ш н и к о в И. Г. К теории конвективных явлений в бинарной смеси. ПММ, 1953, т. 17, вып. 5.
5. Г е р ш у н и Г. З., Ж у х о в и ц к и й Е. М. О спектре конвективной неустойчивости проводящей среды в магнитном поле. ЖЭТФ, 1962, т. 42, вып. 4.
6. Ш л и о м и с М. И. Об устойчивости вращающейся и подогреваемой снизу жидкости относительно периодических по времени возмущений. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.