Прикладная математика и механика. Том XXVII, 1963

ОБ УРАВНЕНИЯХ СТАЦИОНАРНОЙ КОНВЕКЦИИ

М. Р. Уховский, В. И. Юдович

(Ростов-на-Дону)

1. Известно, что нагретая жидкость в поле силы тяжести может находиться в равновесии только в том случае, когда температура T имеет вид

$$T = T_0(x_3) = Cx_3 + C_0 \qquad (1.1)$$

где C, C_0 — постоянные, ось x_3 направлена вертикально вниз. Однако это решение может оказаться неустойчивым: например, может возникнуть устойчивое стационарное течение жидкости. Этот случай рассматривается в дальнейшем. Указанные течения, называемые стационарной свободной конвекцией, описываются следующей системой уравнений [1]:

$$\nu\triangle\mathbf{v}' = (\mathbf{v}'\cdot\nabla)\,\mathbf{v}' + \nabla p' + \beta\mathbf{g}T', \qquad \chi\triangle T' = \mathbf{v}'\nabla T', \qquad \operatorname{div}\mathbf{v}' = 0 \qquad (1.2)$$

где $\mathbf{v}'(x)$ — скорость движения жидкости; $x = (x_1, x_2, x_3)$ — точка трехмерного пространства; $T'(x)$ — температура; $p'(x)$ — давление; ν, χ, β — коэффициенты соответственно вязкости, теплопроводности и теплового расширения жидкости; $\mathbf{g} = (0, 0, g)$ — ускорение силы тяжести; плотность жидкости считается равной единице.

Будем искать решение $(\mathbf{v}', p', T')$ системы (1.2) в ограниченной области Ω, удовлетворяющее на ее границе S условию

$$\mathbf{v}'|_S = 0, \qquad T'|_S = Cx_3 + C_0 \qquad (1.3)$$

Очевидно, что

$$\mathbf{v}_0 = 0, \qquad T_0 = Cx_3 + C_0, \qquad p_0 = -\beta g\left(\tfrac{1}{2}Cx_3^2 + C_0x_3\right) + \text{const} \qquad (1.4)$$

будет решением задачи (1.2), (1.3). Делая в (1.2) и (1.3) замену

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}, \qquad p' = p_0 + p, \qquad T' = T_0 + T \qquad (1.5)$$

получим

$$\nu\triangle\mathbf{v} = (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} + \nabla p + \beta\mathbf{g}T, \qquad \chi\Delta T = \mathbf{v}\nabla T + Cv_3, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \qquad (1.6)$$

$$v|_S = 0, \qquad T|_S = 0 \qquad (1.7)$$

Наряду с этой задачей будем рассматривать соответствующую линеаризованную (1.8)

$$\nu\triangle\mathbf{v} = \nabla p + \beta\mathbf{g}T, \qquad \chi\triangle T = Cv_3, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0; \qquad \mathbf{v}|_S = 0, \qquad T|_S = 0$$

Будем искать те значения параметра C, при которых появляются нетривиальные решения задачи (1.6), (1.7). Для этого сведем задачу (1.6), (1.7) к операторному уравнению

$$\mathbf{v} = K(\mathbf{v}\ C) \qquad (1.9)$$

в некотором гильбертовом пространстве H_1. При этом оператор K вполне непрерывен, что дает возможность применить для исследования уравнения (1.9) общую теорию бифуркации решений [2]. Система (1.8) сводится к операторному уравнению

$$\mathbf{v} = CB\mathbf{v} \tag{1.10}$$

где B — линейный оператор — дифференциал Фреше оператора K. Дальше устанавливаются следующие факты.

Теорема 1.1. Оператор B — самосопряженный, положительный, вполне непрерывный. Следовательно, существует счетное число характеристических значений уравнения (1.10) (задачи (1.8))

$$0 < C_1 < C_2, \ldots, C_n \to +\infty,$$

и соответствующая полная система собственных векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots$

Теорема 1.2. (1) Уравнение (1.6) (задача (1.9), (1.7)) при $C < C_1$ имеет только тривиальное решение. (2) Точками бифуркации могут быть лишь $C_1, C_2, \ldots$ (3). Всякое число C_k ($k = 1, 2, \ldots$), которому соответствует нечетное число собственных векторов уравнения (1.10), действительно является точкой бифуркации уравнения (1.10). В пункте 4 приводится пример приложения теорем 1.1 и 1.2.

Вопросам конвекции в вязкой жидкости посвящены работы В. С. Сорокина [3,4]. В работе [3] установлен вариационный принцип, которому удовлетворяют собственные векторы и собственные числа задачи (1.18), и предложен метод Ритца для их приближенного вычисления, однако доказательства существования собственных чисел не дано. При доказательстве теоремы 1.1 выводится другой вариационный принцип (и соответственно другой вариант метода Ритца). Обоснование вариационного принципа и метода Ритца, данных в работе [3], можно провести методом, близким к примененному здесь. Утверждение (1) теоремы 1.2 доказано в работе [4]. Кроме того, приведено утверждение, что единственность имеет место и при $C = C_1$, но доказательство содержит ошибку [1]. В работе [4], кроме того, строятся формальные разложения решения задачи конвекции в ряды специального вида.

2. Для вывода операторных уравнений применяется методика, близкая к развитой в работе [5]. Определим гильбертово пространство H_1 как замыкание множества гладких соленоидальных в области Ω векторов, равных нулю вблизи границы S, в норме, порожденной скалярным произведением

$$(\bar{u}, \mathbf{v})_{H_1} = \int_\Omega \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}\, dx \tag{2.1}$$

Пусть H_2 — замыкание множества гладких в области Ω функций, равных нулю вблизи границы, в норме, порожденной скалярным произведением

$$(f, g)_{H_2} = \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g\, dx \tag{2.2}$$

[1] В (2.10) и (1.5) (см. [4], стр. 199) буквой P обозначены разные величины. Поэтому в (2.11) справа должно стоять ∇q, и дальнейшие рассуждения теряют силу. Сам факт, по-видимому, верен.

Назовем обобщенным решением задачи (1.6), (1.7) пару $(\mathbf{v}, T)$, $\mathbf{v} \in H_1$, $T \in H_2$, удовлетворяющую интегральным тождествам

$$\nu (\mathbf{v}, \Phi)_{H_1} = -\int_\Omega (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v}\Phi \, dx - \beta \int_\Omega T\mathbf{g}\, \Phi \, dx \tag{2.3}$$

$$\chi (T, \varphi)_{H_2} = -\int_\Omega \mathbf{v} \nabla T\varphi \, dx - C \int_\Omega v_3 \varphi \, dx \tag{2.4}$$

где $\Phi \in H_1$, $\varphi \in H_2$ и произвольны.

Из результатов работы [6] нетрудно вывести, что введенное обобщенное решение всюду внутри Ω бесконечно дифференцируемо и удовлетворяет уравнениям (1.6) — (1.7); если граница S достаточно гладкая, то производные любого заданного порядка будут непрерывны [1] в замкнутой области Ω.

Лемма 2.1. Из (2.4) вытекает, что

$$T = CA\mathbf{v} \tag{2.5}$$

где A — оператор, действующий из H_1 в H_2, усиленно непрерывный и независящий от C. Для любой функции $f \in L_{6/5}(\Omega)$ определим оператор Lf интегральным тождеством

$$\chi (Lf, \varphi)_{H_2} = \int_\Omega f\varphi \, dx \tag{2.6}$$

для всех $\varphi \in H_2$. Пользуясь теоремой вложения С. Л. Соболева [8], получаем, что правая часть (2.6) — линейный функционал относительно φ в H_2, а потому оператор L определен по теореме Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве; L — линейный оператор из $L_p(\Omega)$ $\left(p \geqslant \frac{6}{5}\right)$ в H_2, вполне непрерывный при $p > \frac{6}{5}$. Из 2.4) получаем

$$T = L_1 T = L_{\mathbf{v}} T - CLv_3, \qquad L_{\mathbf{v}} T = -L(\mathbf{v}\nabla T) \tag{2.7}$$

При фиксированном $\mathbf{v} \in H_1$ оператор $L_{\mathbf{v}}$ — вполне непрерывный в H_2. Покажем, что при $C = 0$ из (2.7) вытекает $T = 0$. В самом деле, умножая (2.7) скалярно на T и применяя (2.6), легко найдем, что $\| T \|_{H_2} = 0$. Согласно теореме Фредгольма отсюда вытекает обратимость оператора $E - L_{\mathbf{v}}$, и будет иметь место (2.5) при $A\mathbf{v} = -(E - L_{\mathbf{v}})^{-1} Lv_3$.

Пусть теперь $\mathbf{v}_n \to \mathbf{v}$ в H_1 при $n \to \infty$. Положим $T_n = CA\mathbf{v}_n$ и покажем, что $T_n \Rightarrow T = CA\mathbf{v}$ в H_2. Запишем (2.4) для T_m, $\mathbf{v}_m$ и T_n, $\mathbf{v}_n$. Вычитая эти соотношения одно из другого и полагая $\varphi = T_m - T_n$, получим

$$\chi \| T_m - T_n \|_{H_2}^2 = \int_\Omega (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_m) \nabla T_m (T_m - T_n) \, dx - {}$$
$$- C \int_\Omega (v_{m3} - v_{n3}) (T_m - T_n) \, dx \tag{2.8}$$

---

[1] Тем же методом, что и в работах [5,6], можно доказать разрешимость «в целом» более общей задачи с двумя неоднородными уравнениями (1.6) (см., также, [7]).

Оценивая правую часть (2.8) при помощи неравенства Гёльдера и теорем вложения, получим

$$\chi \| T_m - T_n \|_{H_2} \leqslant M \left(\| \mathbf{v}_m - \mathbf{v}_n \|_{L_4} \cdot \| A\mathbf{v}_m \|_{H_2} + C \| \mathbf{v}_m - \mathbf{v}_n \|_{L_2} \right) \tag{2.9}$$

где M — постоянная [1], зависящая лишь от области Ω. Но из (2.4), полагая $\varphi = T$, легко найдем, что

$$\| A\mathbf{v} \|_{H_2} \leqslant CM_1 \| \mathbf{v} \|_{L_2} \tag{2.10}$$

Из (2.9), (2.10), используя вполне-непрерывность [8] вложения H^1 в L_p $(p < 6)$, получим, что

$$\| T_m - T_n \|_{H_2} \to 0 \quad \text{при } m, n \to \infty \tag{2.11}$$

Отсюда следует усиленная непрерывность оператора A. Лемма доказана.

Для любого вектора $\mathbf{F}(x) \in L_p(\Omega)$ $\left(p > \frac{6}{5}\right)$ определим оператор $K_1\mathbf{F}$ интегральным тождеством

$$\nu (K_1 \mathbf{F}\, \mathbf{\Phi})_{H_1} = \int\limits_{\Omega} \mathbf{F}\mathbf{\Phi}\, dx \qquad (\mathbf{\Phi} \in H_1) \tag{2.12}$$

Так же, как и выше для оператора L, устанавливается, что K_1 — линейный, а при $p > \frac{6}{5}$ вполне непрерывный оператор.

Лемма 2.2. Всякое обобщенное решение $(\mathbf{v}, T)$ задачи (1.6), (1.7) в смысле (2.3), (2.4) удовлетворяет операторным уравнениям

$$\mathbf{v} = K(\mathbf{v}, C), \qquad K(\mathbf{v}, C) = K_2\mathbf{v} + CK_3\mathbf{v} \tag{2.13}$$

$$K_2\mathbf{v} = -K_1 (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v}, \qquad K_3\mathbf{v} = -K_1 (\beta g A\mathbf{v}) \tag{2.14}$$

где K_2 и K_3 вполне непрерывны в H_1. Обратно, всякое решение $(\mathbf{v}, T)$ системы (2.13) — (2.14) является обобщенным решением.

Утверждение леммы 2.2 сразу следует из леммы 2.1 и вполне-непрерывности оператора K_1.

Определим теперь обобщенное решение линеаризованной задачи (1.8) как пару $(\mathbf{v}, T)$, $\mathbf{v} \in H_1$, $T \in H_2$, удовлетворяющую интегральным тождествам

$$\nu (\mathbf{v}, \mathbf{\Phi})_{H_1} = -\beta \int\limits_{\Omega} T\mathbf{g}\, \mathbf{\Phi}\, dx, \quad \chi (T, \varphi)_{H_2} = -C \int\limits_{\Omega} v_3 \varphi\, dx \tag{2.15}$$
$$(\mathbf{\Phi} \in H_1) \qquad\qquad (\varphi \in H_2)$$

Лемма 2.3. Отыскание обобщенных решений задачи (1.8) в смысле (2.15) эквивалентно решению операторного уравнения

$$\mathbf{v} = CK_1 (\beta \mathbf{g} L v_3) \tag{2.16}$$

причем оператор в правой части вполне непрерывен и является дифференциалом Фреше оператора $K(\mathbf{v}, C)$ в точке $\mathbf{v} = 0$. Доказательство этой леммы с очевидностью следует из определения операторов K_1, L и простых оценок, которые для краткости опустим.

[1] Дальше M, M_i означают везде различные постоянные зависящие лишь от области Ω.

3. Для доказательства теоремы (1.1) заметим, что в силу лемм 2.2 и 2.3 достаточно доказать самосопряженность и положительность оператора $B\mathbf{v} = K_1(\beta g L v_3)$ в H_1.

Самосопряженность B в силу (2.6) и (2.12) вытекает из следующей цепочки равенств, справедливых для любых $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in H_1$,

$$(B\mathbf{v}, \mathbf{w})_{H_1} = (K_1(\beta g L v_3), \mathbf{w})_{H_1} = \frac{1}{\nu}\int\limits_\Omega \beta g L v_3 \cdot \mathbf{w}\, dx =$$

$$= \frac{\beta g}{\nu}\int\limits_\Omega L v_3 w_3\, dx = \frac{\beta g \chi}{\nu}(L v_3, L w_3)_{H_2} = (\mathbf{v}, B\mathbf{w})_{H_1} \tag{3.1}$$

Из (3.1), полагая $\mathbf{w} = \mathbf{v}$, имеем

$$(B\mathbf{v}, \mathbf{v})_{H_1} = \frac{\beta g \chi}{\nu}\|L v_3\|^2_{H_2} \geqslant 0 \tag{3.2}$$

Значит, оператор положителен. Теорема (1.1) доказана.

Пусть C_1 — минимальное собственное число линейной задачи (1.8), $(\mathbf{v}_1, T_1, p_1)$ — соответствующее ему собственное решение. Умножая первое уравнение (1.8) на $\mathbf{v}_1$, а второе — на T_1 и интегрируя, получим

$$\nu\|\mathbf{v}_1\|^2_{H_1} + \chi\|T_1\|^2_{H_2} + (\beta g + C_1)\int\limits_\Omega v_{13} T_1\, dx = 0 \tag{3.3}$$

С другой стороны, как показано в работе [4], уравнения (1.8) будут уравнениями Эйлера вариационной задачи

$$J(\mathbf{v}, T) = \frac{1}{2}[\nu\|\mathbf{v}\|^2_{H_1} + \chi\|T\|^2_{H_2}] \tag{3.4}$$

$$-\int\limits_\Omega v_3 T\, dx = 1, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{3.5}$$

Значит, если существуют значения $\mathbf{v} = \mathbf{v}_+$, $T = T_+$, дающие минимум функционалу (3.4) при условии (3.5), то в совокупности с некоторым $P = P_+$ они будут давать решение задачи (1.8) при некотором $C = C_+$. Ясно, что

$$\beta g + C_+ = \frac{\nu\|\mathbf{v}_+\|^2_{H_1} + \chi\|T_+\|^2_{H_2}}{-\int\limits_\Omega v_{3+} T_+ dx} = \min \frac{\nu\|\mathbf{v}\|^2_{H_1} + \chi\|T\|^2_{H_2}}{-\int\limits_\Omega v_3 T\, dx}. \tag{3.6}$$

Из (3.6), принимая во внимание (3.3) и минимальность C_1, получаем

$$C_1 = C_+ = \min \frac{\nu\|\mathbf{v}\|^2_{H_1} + \chi\|T\|^2_{H_2}}{-\int\limits_\Omega v_3 T\, dx} - \beta g \tag{3.7}$$

Пусть теперь $(\mathbf{v}, p, T)$ — произвольное нетривиальное решение нелинейной задачи (1.6), соответствующее некоторому C. Поступая точно так же, как при выводе (3.3), будем иметь

$$C = \frac{\nu\|\mathbf{v}\|^2_{H_1} + \chi\|T\|^2_{H_2}}{-\int\limits_\Omega v_3 T\, dx} - \beta g \tag{3.8}$$

Из (3.7) и (3.8) окончательно получаем $C_1 \leqslant C$.

Справедливость пунктов (2) и (3) вытекает из результатов М. А. Красносельского [2] на основании лемм 2.2 и 2.3. Теорема полностью доказана.

4. В общем случае не удается определить кратность собственных чисел задачи (1.8), т. е. в силу самосопряженности оператора B, число собственных функций, соответствующих данному собственному числу.

Приведем пример, для которого это можно сделать, и предыдущие рассмотрения приводят к доказательству существования точек бифуркации.

Будем разыскивать решения $\mathbf{v}$, T, p системы (1.6), периодические по x_1, x_2, x_3 с периодами 2α, 2δ, 2γ, такие, что v_1 — четно по x_2, x_3 и нечетно по x_1; v_2 — четно по x_1, x_3 и нечетно по x_2; v_3, T — четны по x_1, x_2 и нечетны по x_3; p — четно по x_1, x_2, x_3. Нетрудно показать, что теоремы 1.1 и 1.2 справедливы и в этом случае, так как условие периодичности вполне заменяет прежние краевые условия.

Заметим далее, что соответствующая линеаризованная задача сводится путем исключения $\mathbf{v}$, p к отысканию T из уравнения

$$\Delta^3 T = \frac{\beta g C}{\varkappa \nu}(T_{x_1x_1} + T_{x_2x_2}) \tag{4.1}$$

при указанных условиях периодичности и четности. Собственными числами этой задачи будут

$$\lambda_{kmn} = \frac{\nu\chi\pi^4}{\beta g}\left(\frac{k^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\delta^2} + \frac{n^2}{\gamma^2}\right)^3\left(\frac{k^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\delta^2}\right)^{-1} \tag{4.2}$$

$$(k^2 + m^2 \neq 0;\ k,\, m = 0, 1, 2, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots)$$

которым соответствуют собственные функции

$$T_{kmn} = \cos\frac{k\pi x_1}{\alpha}\cos\frac{m\pi x_2}{\delta}\sin\frac{n\pi x_3}{\gamma} \tag{4.3}$$

Заметим, что $\lambda_{kmn} \geqslant \nu\chi\pi^4/\beta g = \lambda_0$, и это значит, что при $C < \lambda_0$ рассматриваемых решений задачи (1.6) не существует ни при каких α, δ, γ.

Если собственному числу λ_{kmn} отвечает более одной собственной функции, то $\lambda_{kmn} = \lambda_{k_1m_1n_1}$ для некоторого другого набора k_1, m_1, n_1. Зафиксируем α и δ. Тогда γ однозначно выражается через k, m, n, k_1, m_1, n_1, α, δ. Ясно, что множество таких γ, соответствующих всевозможным наборам k, m, n, k_1, m_1, n_1, не более, чем счетно. Итак, для любых значений γ, кроме, может быть, некоторого счетного множества, все собственные числа будут простыми и, значит, каждое будет точкой бифуркации.

Поступила 18 XII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. ГИТТЛ, 1954.
2. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. ГИТТЛ, 1956.
3. Сорокин В. С. Вариационный метод в теории конвекции. ПММ, 1953, т. XVII, вып. 1.
4. Сорокин В. С. О стационарных движениях в жидкости, подогреваемой снизу. ПММ, 1954, т. XVIII, вып. 2.
5. Ворович И. И. и Юдович В. И. Стационарное течение вязкой жидкости, ДАН СССР, 1959, т. 124, № 2.
6. Ворович И. И. и Юдович В. И. Стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости. Матем. сб., 1961, т. 53, вып. 4.
7. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Физматгиз, 1961.
8. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1950.