Прикладная математика и механика. Том XXVII, 1963.

О НЕКОТОРЫХ УПРОЩЕНИЯХ В ОПИСАНИИ ДВИЖЕНИЯ МЯГКИХ ГРУНТОВ

С. С. Григорян

(Москва)

Предложенная в работах [1,2] система уравнений, описывающих движения мягких грунтов, весьма сложна. Однако при изучении различных конкретных задач возможно значительное упрощение этой системы, поэтому желательно иметь возможность по характеру рассматриваемой конкретной задачи установить, какие упрощения в этом случае возможны и какой упрощенной системой уравнений следует пользоваться. Ниже дается полная классификация всех возможных задач для отмеченной системы уравнений с выводом упрощенных систем для каждого из классов задач.

1. Уравнения из [1, 2] имеют вид

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)=\rho F_i^{\,e}-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i}=0,\qquad p=f(\theta,\theta_*),\qquad \theta\equiv1-\frac{\rho_0}{\rho},\qquad \theta_*\equiv1-\frac{\rho_0}{\rho_*}$$

$$\frac{\partial\theta_*}{\partial t}+v_i\frac{\partial\theta_*}{\partial x_i}=\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}+v_i\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\right)e(\theta-\theta_*)\,e\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}+v_i\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\right)$$

$$G\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)=\frac{DS_{ij}}{Dt}+\lambda S_{ij}$$

$$\frac{DS_{ij}}{Dt}=\frac{\partial S_{ij}}{\partial t}+v_k\frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k}-\Omega_{ik}S_{jk}-\Omega_{jk}S_{ik},\qquad \Omega_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\lambda=\frac{2GW-F'(p)\,(\partial p/\partial t+v_i\partial p/\partial x_i)}{2F(p)}\,e\,[I_2-F(p)]\times$$

$$\times\, e\left[2GW-F'(p)\left(\frac{\partial p}{\partial t}+v_i\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)\right]$$

$$W\equiv\frac{1}{2}S_{ij}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right),\qquad I_2\equiv\frac{1}{2}S_{ij}S_{ij}$$

В этих уравнениях фигурируют определяемые из опыта функции — характеристики грунта

$$p=f(\theta,\theta_*),\quad I_2=F(p),\quad G=G(\theta_*) \tag{1.2}$$

Способ определения этих функций из динамических и статических опытов указан в работах [1, 2], а некоторые результаты такого определения содержатся в работах [3, 4].

Основная задача механики грунтов, возникающая для системы (1.1), состоит в следующем. Дана область Ω, заполненная средой, находящейся сначала в покое. На части границы этой области заданы напряжения $\mathbf{P}_n$, на остальной части границы — перемещения $\mathbf{u}$ как функции координат точек границы и времени. Требуется определить возникающие в среде движения и распределение напряжений.

Задание граничных функций $\mathbf{P}_n$ и $\mathbf{u}$ всегда может быть представлено в виде

$$\mathbf{P}_n = \sigma_0 \mathbf{\Pi}_n \left(\frac{x_i}{l}, \frac{t}{t_0}\right), \qquad \mathbf{u} = V_0 t_0 \mathbf{U} \left(\frac{x_i}{l}, \frac{t}{t_0}\right) \tag{1.3}$$

где $\mathbf{\Pi}_n$ и $\mathbf{U}$ — безразмерные функции безразмерных аргументов, поэтому граничные условия вносят в математическую формулировку задачи параметры σ_0, V_0, t_0, l — характерные значения напряжений, скоростей, времени и линейных размеров. Различные классы задач будут при прочих одинаковых условиях определяться различием в численных значениях этих параметров. Для того чтобы произвести классификацию задач, необходимо эти параметры дополнить параметрами, содержащимися в системе уравнений (1.1). Для выявления этих параметров заметим, что соотношения (1.2) всегда можно представить в виде

$$p = Kf(\theta, \theta_*), \qquad I_2 = \sigma_*^2 F(p / \sigma_*), \qquad G = G_0 g(\theta_*)$$

$$\lim_{\substack{\theta \to 0 \\ \theta_* \to \min\theta_*}} f(\theta, \theta_*) \to \theta, \qquad \lim_{p/\sigma_* \to 0} F(p / \sigma_*) \to 1, \qquad \lim_{\theta_* \to \min\theta_*} g(\theta_*) \to 1 \tag{1.4}$$

Введем обозначение

$$S_\infty = \lim_{p/\sigma_* \to \infty} \sqrt{\sigma_*^2 F(p / \sigma_*)} = \sigma_* \sqrt{F(\infty)} \tag{1.5}$$

Опыт показывает, что

$$K \sim G_0, \qquad \sigma_* \ll G_0 \tag{1.6}$$

Кроме того, можно считать, что S_∞ имеет порядок G_0 или меньше, т. е.

$$S_\infty \lesssim G_0 \tag{1.7}$$

Таким образом, в число параметров следует включить еще K, G_0, σ_*, S_∞, ρ_0, так что полная система существенных постоянных определяющих параметров задачи приобретает вид

$$\sigma_0, \ V_0, \ t_0, \ l, \ K, \ G_0, \ \sigma_*, \ S_\infty, \ \rho_0 \tag{1.8}$$

Следует отметить, что в случаях, когда граничные условия даны только в напряжениях или только в перемещениях, в эту систему будет входить либо только σ_0, либо только V_0, а σ_0 и V_0 будут связаны некоторым соотношением.

Классификация будет в конечном счете сводиться к установлению некоторых оценок и неравенств для безразмерных комбинаций, составленных из (1.8), при выполнении которых будут иметь место соответствующие упрощения в системе (1.1).

2. Начнем рассмотрение с чисто упругого случая, когда $\sigma_0 < \sigma_*$ и $u_0 \sim V_0 t_0$ весьма малы. В этом случае $\lambda \equiv 0$ в уравнениях (1.1), и соотношение между девиаторами тензоров напряжений и скоростей дефор-

маций из системы (1.1) принимает вид

$$G\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)=\frac{DS_{ij}}{Dt} \tag{2.1}$$

Произведем оценку различных членов в этом соотношении, полагая, что

$$v_i=V_0V_i\left(\frac{x_k}{l},\frac{t}{t_0}\right),\qquad S_{ij}=\sigma_0\,\Sigma_{ij}\left(\frac{x_k}{l},\frac{t}{t_0}\right) \tag{2.2}$$

причем, функции V_i, Σ_{ij} и их производные по безразмерным аргументам имеют порядок единицы. Будем иметь из (2.1)

$$G_0\frac{V_0}{l}\sim\sigma_0\left(\frac{1}{t_0}+\frac{V_0}{l}\right) \tag{2.3}$$

Так как в рассматриваемом случае $\sigma_0\sim\sigma_*\ll G_0$, из (2.3) следует, что

$$\frac{V_0t_0}{l}\sim\frac{\sigma_0}{G_0}\ll 1 \tag{2.4}$$

Это означает, что смещения $u_0\sim V_0t_0$ и деформации $u_0\,/\,l$ малы, а в выражениях для полных производных по времени можно пренебречь конвективными членами, т. е.

$$\frac{D}{Dt}\sim\frac{d}{dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+v_i\frac{\partial}{\partial x_i}\sim\frac{\partial}{\partial t} \tag{2.5}$$

Система (1.1) переходит при этом в

$$\begin{gathered}\rho_0\frac{\partial v_i}{\partial t}=\rho_0F_i^e-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j},\qquad \frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=0\\ p=K\theta,\qquad G_0\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)=\frac{\partial S_{ij}}{\partial t}\end{gathered} \tag{2.6}$$

Второе и четвертое из этих уравнений интегрируются и вместе с третьим дают закон Гука

$$S_{ij}=G_0\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{2}{3}\theta\delta_{ij}\right),\qquad \theta=-\frac{\partial u_k}{\partial x_k},\qquad p=K\theta\qquad\left(u_i=\int_0^t v_i\,dt\right) \tag{2.7}$$

где u_i — смещение. Таким образом, для этого случая система (1.1) переходит в обычные уравнения линейной теории упругости.

Для уравнений (2.6) интересно рассмотреть два класса движений — существенно динамических и квазистатических. В первом случае все члены в уравнении импульсов имеют один порядок, т. е.

$$\rho_0\frac{V_0}{t_0}\sim\frac{\sigma_0}{l} \tag{2.8}$$

Сравнивая это с (2.4), получаем

$$\frac{l}{t_0}\sim\sqrt{\frac{G_0}{\rho_0}}\sim C,\qquad \sigma_0\sim\rho_0V_0C$$

и так как $\sigma_0\sim K\theta\sim G_0\theta$, то и $V_0\sim\theta C$. В этих оценках C — характерная скорость распространения упругих волн. Все это — известные соотношения для упругих волн. В случае, когда движение квазистатично, должно быть

$$\rho_0\frac{V_0}{t_0}\ll\frac{\sigma_0}{l}\quad\text{или}\quad\frac{l}{t_0}\ll\sqrt{\frac{G_0}{\rho_0}}\sim C \tag{2.9}$$

Это условие определяет масштаб времени t_0 граничных функций (1.3), при котором упругими волнами можно пренебречь. Если ввести «волновой» масштаб времени $t_w \sim l/C$, то условие (2.9) запишется в виде

$$t_0 \gg t_w \tag{2.10}$$

3. Рассмотрим движение с упруго-пластическими, но малыми деформациями. Здесь, как и в предыдущем случае, $\sigma_0 \sim \sigma_*$, $u_0 \sim V_0 t_0 \ll l$, но $\lambda \neq 0$. Очевидно, оценки (2.5) сохраняются. Оценка членов в законе упруго-пластического течения

$$G\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) = \frac{DS_{ij}}{Dt} + \lambda S_{ij}$$

дает

$$G_0 \frac{V_0}{l} \sim \frac{\sigma_0}{t_0} + \left(\frac{G_0 V_0}{\sigma_0 l} + \frac{1}{t_0}\right)\sigma_0 \tag{3.1}$$

В правой части этого соотношения все члены должны быть одного порядка (упругие и пластические составляющие деформации одного порядка в рассматриваемом случае). Это возможно, если

$$\frac{G_0 V_0 t_0}{\sigma_0 l} \sim 1 \tag{3.2}$$

Выполнение условия (3.2) одновременно приводит и к удовлетворению условия (3.1) и, кроме того, это условие сводится к (2.4). Условия динамичности и вытекающие из них оценки для σ_0 и V_0, а также условие квазистатичности в этом случае также сохраняются теми же, что в предыдущем случае. Система (1.1) переходит в следующую:

$$\begin{gathered}
\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} = \rho_0 F_i^e - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}, \qquad p = f(\theta, \theta_*) \\
\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \qquad \frac{\partial \theta_*}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial t}\, e\,(\theta - \theta_*)\, e\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right) \\
G_0\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) = \frac{\partial S_{ij}}{\partial t} + \lambda S_{ij} \\
\lambda = \frac{2G_0 W - F'(p)\,\partial p/\partial t}{2F(p)}\, e\,[I_2 - F(p)]\, e\left[2G_0 W - F'(p)\frac{\partial p}{\partial t}\right]
\end{gathered} \tag{3.3}$$

4. Рассмотрим теперь движения с большими упруго-пластическими деформациями, но при умеренных напряжениях, т. е. случай, когда $V_0 t_0 \sim l$ и $\sigma_* \ll \sigma_0 \ll G_0$. Это реальный и практически интересный случай, так как, например, для песка $\sigma_* \sim 0{,}5$ *кГ/см*^{2}, $G_0 \sim 10^3$ *кГ/см*^{2} и, следовательно, речь идет о напряжениях $\sigma_0 \sim 10$ *кГ/см*^{2} — 100 *кГ/см*^{2}. В этом случае

$$\frac{G_0 V_0 t_0}{\sigma_0 l} \gg 1 \tag{4.1}$$

и из соотношения (3.1) (закон течения) следует, что упругими составляющими в законе течения можно пренебречь. Уравнение неразрывности переходит в оценочное соотношение

$$\frac{\theta}{t_0} + \frac{V_0}{l} \sim 0$$

Опыт показывает, что при $p \sim \sigma_0 \sim 10$ *кГ/см*^{2} — 100 *кГ/см*^{2}, $\theta \sim 10^{-2}$. Отсюда и из последнего соотношения следует, что в уравнении неразрывности членами, содержащими производные плотности, следует пренебречь. Наконец, оценка членов в уравнениях импульсов для динамической задачи дает

$$\rho_0\left(\frac{V_0}{t_0}+\frac{V_0^2}{l}\right)\sim\frac{\sigma_0}{l} \quad \text{или} \quad \sigma_0\sim\rho_0V_0^2 \tag{4.2}$$

поэтому уравнения эти должны сохраниться в неизменном виде (с заменой ρ на ρ_0, конечно).

Таким образом, в этом случае из системы (1.1) получаем

$$\begin{gathered}\rho_0\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)=\rho_0F_i^e-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}, \qquad \frac{\partial v_i}{\partial x_i}=0\\ \frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}=\frac{W}{F(p)}e\,[I_2-F(p)]\,e(W)\,S_{ij}\end{gathered} \tag{4.3}$$

Отметим, что после того, как из (4.3) найдено распределение давления p, задача отыскания распределения плотностей может быть решена отдельно при помощи зависимости $p=f(\theta,\theta_*)$ и функции $\partial p/\partial t+v_i\,\partial p/\partial x_i$.

В рассматриваемом случае условие динамичности движения дает

$$\frac{l}{t_0}\sim\sqrt{\frac{\sigma_0}{\rho_0}}\sim\sqrt{\frac{\sigma_0}{G_0}}C\sim\sqrt{\theta}C \quad \text{или} \quad t_0\sim\frac{1}{\sqrt{\theta}}t_w \tag{4.4}$$

Теперь нужно отметить, что все, сказанное выше в этом пункте, относится только к областям движения, удаленным от фронтов волн. В областях, примыкающих к таким фронтам, дело будет обстоять, как в предыдущем случае, так как из условий совместности на фронте волны следуют оценки для прифронтовых областей движения

$$t_0\sim t_w, \quad V_0\sim\theta C, \quad \sigma_0\sim\rho_0\theta C^2$$

Таким образом, в прифронтовых областях движение будет описываться системой (3.3). Следует только иметь в виду, что в задачах, для которых в прифронтовой области градиенты велики и волна распространяется на расстояния, значительные по сравнению с ее длиной (короткая волна), нужно учитывать конвективные члены в производных по времени [5]. Но и в этом случае основные уравнения значительно упрощаются при помощи соображений из работы [5] и допускают сравнительно простой анализ, который здесь однако не будет проводиться.

Итак, в рассматриваемом случае возможны два типа существенно динамических движений среды: в прифронтовой зоне, где движение носит резко выраженный волновой характер, и вдали от фронта, где волновые эффекты пренебрежимы, и движение описывается в схеме несжимаемой жидкости. Надо отметить, что такого рода ситуация имеет место при описании движений капельных жидкостей (воды, например), которые тоже обладают весьма малой сжимаемостью. Так, при подводном взрыве область, охваченная движением, довольно быстро разделяется на две части с существенно различным характером движения в них — прифронтовую и окрестность газового пузыря; в первой проявляется сжимаемость, и движение распространяется в виде волны, а во второй движение очень хорошо описывается в схеме идеальной несжимаемой жидкости [6]. Очевидно, причина такого разделения и в случае капельной жидкости, и в рассматриваемом здесь случае грунта одна — это малая сжимаемость среды.

Хотя упрощенные системы уравнений, описывающие движения в прифронтовой области и в области, удаленной от фронта, разные, их можно объединить в одну систему, которая в указанных двух областях автоматически будет переходить в соответствующие системы. Объединенная система имеет вид

$$\rho_0\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)=\rho_0F_i^e-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}, \qquad p=f(\theta,\theta_*)$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=0, \qquad \frac{\partial\theta_*}{\partial t}=\frac{\partial\theta}{\partial t}\,e\,(\theta-\theta_*)\,e\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)$$
$$G\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)=\frac{\partial S_{ij}}{\partial t}+\lambda S_{ij} \tag{4.5}$$
$$\lambda=\frac{2GW-F'(p)\,\partial p/\partial t}{2F(p)}\,e\,[I_2-F(p)]\,e\left[2GW-F'(p)\frac{\partial p}{\partial t}\right]$$

Эта система отличается от системы для прифронтовой области только наличием конвективных слагаемых в полной производной скорости по времени, но эти слагаемые там малы, и фактически система не отличается от системы (3.3) для прифронтовой области. С другой стороны, система (4.5) в области, удаленной от фронта, почти не отличается от системы (4.3), так как в этой области производные по времени во всех уравнениях, кроме уравнений импульсов, пренебрежимо малы.

Условием квазистатичности в рассматриваемом случае, очевидно, будет (см. (4.4))

$$t_0 \gg \frac{t_w}{\sqrt{\theta}} \gg t_w \tag{4.6}$$

т. е. здесь имеем более сильное условие, чем в предыдущих случаях, когда было достаточно условия (2.10). Отметим, что для $\sigma_0 \sim 10$—100 *кГ/см*^{2} величина $\theta \sim 10^{-2}$, и при $l \sim 10$ *м*, и $C \sim 10^2$ *м/сек* будем иметь $t_w / \sqrt{\theta} \sim 1$ *сек*, т. е. условие квазистатичности (4.6) требует, чтобы было $t_0 \gg 1$ сек. Таким образом, для всех задач обычной строительной механики оснований и фундаментов это условие всегда выполнено. Лишь для взрывных и ударных явлений следует прибегать к динамическим уравнениям.

При выполнении условия (4.6) основные уравнения получим из (4.3) в виде

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}+\rho_0F_i^e=0, \qquad \frac{\partial v_i}{\partial x_i}=0$$
$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}=\frac{W}{F(p)}\,e\,[I_2-F(p)]\,e\,(W)\,S_{ij} \tag{4.7}$$

Это — уравнения жестко-пластического квазистатического течения грунта с развитыми пластическими деформациями или уравнения «предельного равновесия» среды. В частном случае плоской задачи отсюда получаются уравнения плоского предельного равновесия статики сыпучей среды [7]. В самом деле, из закона течения получаем $S_{zz} = 0$, что приводит условие пластичности к виду

$$\frac{1}{2}\left[(\sigma_{xx} + p)^2 + (\sigma_{yy} + p)^2 + 2\sigma_{xy}^2\right] = F(p)$$

а также приводит к соотношению

$$\sigma_{zz} = -p \quad \text{или} \quad p = -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

Это, в свою очередь, приводит условие пластичности к окончательному виду

$$\frac{1}{4}\left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2\right] = F\left[-\frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\right]$$

В случае, если $F(p) = (kp + b)^2$ (см., например, работы [3, 4]), отсюда получаем

$$\frac{1}{4}\left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2\right] = \frac{k^2}{4}\left[-(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + 2\frac{b}{k}\right]^2$$

В книге [7] условие предельного равновесия имеет вид

$$\frac{1}{4}\left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2\right] = \frac{\sin^2\rho}{4}\left[-(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + 2H\right]^2$$

где ρ — угол внутреннего трения, H — сцепление.

Таким образом, видим, что с точностью до обозначений и наименований эти условия совпадают. Добавив к этому соотношению уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} + \rho_0 F_x^e = 0, \qquad \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \rho_0 F_y^e = 0$$

получаем систему трех уравнений для σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{yy}, которая и составляет единственную основу статики сыпучей среды [7].

Следует отметить, что этих уравнений недостаточно для естественной постановки и правильного решения задач статики сыпучей среды даже для плоского случая (не говоря о том, что статика сыпучей среды вообще не имеет уравнений для пространственной задачи). Это, во-первых, потому, что не всякую плоскую задачу предельного равновесия можно сформулировать только в напряжениях. Во-вторых, даже задачи, формулируемые в напряжениях, невозможно решить и быть уверенным в правильности построенного решения, не построив поля скоростей. Аналогичное положение дел имело место в теории пластичности до сравнительно недавнего времени, когда стала очевидной необходимость построения поля скоростей и даже был введен в научный обиход специальный термин «полное решение» для обозначения решений, содержащих построенное поле скоростей. Подобно тому, как некоторые из решений плоской задачи теории пластичности оказались неудовлетворительными, так как для них оказалось невозможным построить поле скоростей, можно найти такого рода решения и в статике сыпучей среды.

Выведенная система (4.7) позволяет изучать не только плоскую, но и произвольную пространственную задачу предельного равновесия, и не только задачи, формулируемые в напряжениях, но и задачи с любыми смешанными граничными условиями, т. е. все задачи в их естественной постановке. Следует, конечно, оговорить, что существуют задачи статики, (и, конечно, динамики), в которых главной, иногда единственной причиной возникновения деформаций является сжимаемость среды (одноосное сжатие, например), и для решения этих задач разумеется, уравнения (4.7) непригодны. В таких случаях следует исходить из полных уравнений (1.1) для квазистатического случая.

5. Следующим будет случай, когда и упруго-пластические деформации велики, т. е. $V_0t_0 \sim l$, и напряжения велики, т. е. $\sigma_0 \sim S_\infty$. Если при этом $S_\infty \ll G_0$, то это будет предыдущий случай. Если же $S_\infty \sim G_0$, то никаких упрощений в уравнениях (1.1) уже сделать нельзя, так как при этом величина θ не будет мала: $\theta \sim 1$. Условие квазистатичности сохраняется в виде (4.6). В случае динамического движения здесь не будет разбиения на два типа, так как $\theta \sim 1$, и движение как вблизи, так и вдали от фронта описывается полными уравнениями (1.1).

6. Наконец, в случае, когда имеется течение с очень большими напряжениями $\sigma_0 \gg S_\infty$, в силу того, что $S_{ij} \sim S_\infty \ll \sigma_0 \sim p$, всюду можно пренебречь касательными напряжениями, и система (1.1) перейдет в уравнения для идеальной сжимаемой жидкости с возможной необратимостью в объемных деформациях

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) = \rho F_i^e - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \qquad p = f(\theta, \theta_*)$$

$$\theta = 1 - \frac{\rho_0'}{\rho}, \qquad \theta_* = 1 - \frac{\rho_0}{\rho_*}, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial \theta_*}{\partial t} + v_i \frac{\partial \theta_*}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i}\right) e(\theta - \theta_*) e\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_j}\right)$$

Рассмотрение квазистатических движений в этом случае неинтересно, так как они здесь тривиальны.

Этим исчерпывается изучение всех возможных существенно разных типов движений грунта.

Очевидно, аналогичный анализ можно произвести для любой другой твердой среды (для пластичных металлов, например), и результаты будут вполне подобны полученным выше.

Поступила 5 I 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С. С. Об общих уравнениях динамики грунтов. ДАН СССР, 1959, т. 124, № 2.
2. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов. ПММ, 1960. т. XXIV, вып. 6.
3. Алексеенко В. Д., Григорян С. С., Новгородов А. Ф., Рыков Г. В. Некоторые экспериментальные исследования по динамике мягких грунтов. ДАН СССР, 1960, т. 133, № 6.
4. Алексеенко В. Д., Григорян С. С., Кошелев Л. И., Новгородов А. Ф., Рыков Г. В. Измерение волн напряжений в мягких грунтах. ПМТФ, 1963, № 2.
5. Христианович С. А. Ударная волна на значительном расстоянии от места взрыва. ПММ, 1956, т. XX, вып. 5.
6. Коул Р. Подводные взрывы. М., ИЛ., 1950.
7. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. М., Физматгиз, 1960.